This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

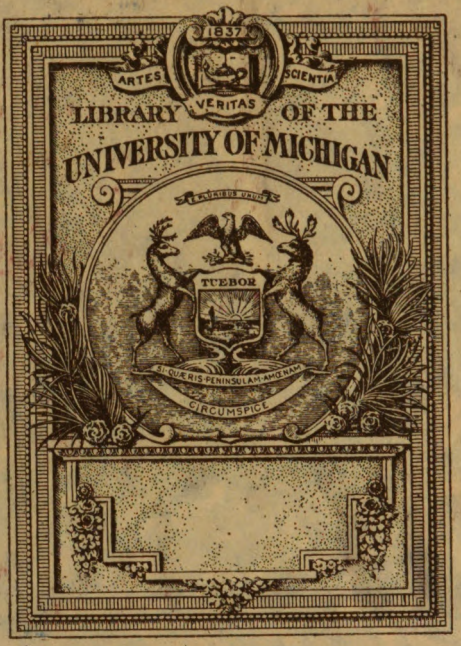
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

Digitized by Google

QA
43
.W197
1908

Digitized by Google

Digitized by Google

MATURITÄTSFRAGEN

AUS DER

MATHEMATIK.

ZUM GEBRAUCHE FÜR DIE OBERSTEN KLASSEN DER GYMNASIEN UND REALSCHULEN

ZUSAMMENGESTELLT

VON

Dr. FRANZ WALLENTIN,
K. K. REGIERUNGSRAT,
REALSCHUL-DIREKTOR I. R.

NEUNTE AUFLAGE.

WIEN 1908.
VERLAG VON KARL GEROLDS SOHN
I., BARBARAGASSE 2.

Digitized by Google

Alle Rechte, einschließlich des Übersetzungsrechtes, vorbehalten.

Buchdruckerei Carl Gerold's Sohn in Wien.

Digitized by Google

Vorwort.

In der obersten Klasse der Gymnasien und Realschulen ist vom Gesetze die Wiederholung des gesamten Lehrstoffes der Mathematik mittels zahlreicher Übungsaufgaben vorgeschrieben. Der Lehrstoff, welcher auf diese Art wiederholt werden soll, ist ein sehr bedeutender, der Lehrer der Mathematik muß daher, soll er dem Gesetze gerecht werden, eine besondere Sorgfalt der Auswahl der Wiederholungsaufgaben widmen und muß speziell solche Aufgaben stellen, welche die Anwendung mehrerer wichtiger Gesetze verlangen, eine mehrfache Behandlung gestatten, oder sich gleichzeitig auf mehrere Gebiete erstrecken.

Ähnliche, ja vielfach die gleichen Gesichtspunkte müssen auch bei der Stellung der Aufgaben zur schriftlichen Maturitätsprüfung maßgebend sein. Der Gedanke lag daher nahe, daß eine Auswahl von Maturitätsfragen, methodisch geordnet, ein recht brauchbares Hilfsmittel für die obersten Klassen unserer Mittelschulen abgeben möchte.

Mit vorliegender Arbeit suchte der Verfasser ein solches Hilfsmittel zu schaffen. Das Buch soll dem Lehrer das Material für die in der obersten Klasse zu stellenden Wiederholungsaufgaben liefern und ihn in den Stand setzen, leicht eine passende Auswahl für die schriftliche Maturitätsprüfung treffen zu können.

Bezüglich der Ausführung vorliegender Arbeit bemerkt der Verfasser, daß die Aufgaben den in den Jahren 1872—1878 an den österreichischen Gymnasien und Realschulen gestellten schriftlichen Maturitätsfragen entnommen sind. In erster Linie wurden dabei die an deutschen, in zweiter Linie die an čechischen und an italienischen Anstalten gestellten Fragen berücksichtigt. Was die Verteilung auf die einzelnen Provinzen betrifft, so hat Niederösterreich und speziell Wien ungefähr 30%, Böhmen und Mähren je 15%, Steiermark 10%

395104

Digitized by Google

der Aufgaben geliefert; die übrigen 30% entfallen auf die anderen Provinzen Österreichs.

Einzelne Teile, wie die Zinseszinsen- und Rentenrechnung, das schiefwinkelige Dreieck, der Kegel und die Kugel, ferner die Gerade und der Kreis bezüglich der analytischen Geometrie haben eine eingehende Berücksichtigung erfahren, da beinahe keine Gruppe von Maturitätsfragen gestellt wurde, in welcher nicht zwei oder drei der gegebenen Themen auf diese Teile Bezug gehabt hätten. Diese Tatsache findet wohl ihre Erklärung darin, daß Aufgaben aus den genannten Teilen dem Abiturienten vielfach Gelegenheit geben, seine Vertrautheit mit den wichtigsten Sätzen der Elementarmathematik zu dokumentieren.

Das Buch enthält nahezu 1200 Aufgaben, der bei weitem größere Teil davon entfällt auf die Geometrie, und zwar speziell auf jene Partien, welche den Lehrstoff der sechsten und siebenten Klasse unserer Gymnasien und Realschulen ausmachen.

Der Verfasser hat alle Aufgaben selbst gerechnet und die Resultate entweder kurz oder, wo es das Verständnis zu erfordern schien, in extenso aufgenommen. Dabei leitete ihn der Gedanke, daß es dem Zwecke dieses Buches, einerseits zur Wiederholung des Lehrstoffes und andererseits als Material für die schriftliche Maturitätsprüfung zu dienen, ganz angemessen sei, wenn der Lehrer schon aus dem Gange der Rechnung oder aus dem Resultate derselben ersehen kann, ob sich eine Aufgabe für den Zweck, den er im Auge hat, eigne oder nicht. Auch den Schülern dürften die Resultate, wie sie hier aufgenommen worden sind, gute Dienste leisten.

Möge diese Arbeit, die erste dieser Art in Österreich, den beabsichtigten Nutzen stiften und sich einer freundlichen Aufnahme erfreuen!

Zum Schlusse fühlt sich der Verfasser verpflichtet, der Verlagsbuchhandlung für die nette Ausstattung des Buches seinen besten Dank auszusprechen.

Wien, im März 1879.

Digitized by Google

Die zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten einerseits dadurch, daß für mehrere Aufgaben andere gesetzt wurden, welche den seit 1879 gestellten schriftlichen Arbeiten entnommen sind und dem Charakter des Buches besser entsprechen, andererseits dadurch, daß bei den logarithmischen Lösungen nun auch die Resultate angeführt sind, welche sich mit fünfstelligen, bezüglich der Winkelfunktionen von 10 zu 10 Sekunden fortschreitenden Tafeln ergeben.

Durch beide Punkte glaubt der Verfasser die Brauchbarkeit des Buches wesentlich erhöht zu haben.

Wien, im April 1885.

Die achte Auflage unterscheidet sich von der früheren nur dadurch, daß einige Aufgaben durch geeignetere ersetzt worden sind.

Dem Wunsche, die Lösungen, versehen mit einem kurzen Hinweise auf den Gang der Rechnung, in einem besonderen Hefte erscheinen zu lassen, ist der Unterzeichnete auch bezüglich dieser neuen Auflage nachgekommen*).

Wien, im August 1905.

Da diese Sammlung auch bei der geänderten Form der Maturitätsprüfungen ihre Brauchbarkeit in den obersten Klassen der Mittelschulen behält, so erscheint sie, nahezu unverändert, in neunter Auflage.

Wien, im September 1908.

Dr. Franz Wallentin.

---

*) Auflösungen zu den Maturitätsfragen aus der Mathematik. 5. Auflage. Wien, Verlag von Karl Gerolds Sohn.

Das Buch „soll dem Schüler nur ein Führer sein, nicht aber dessen geistige Tätigkeit überflüssig machen. Aus dem Grunde bringt es von den einzelnen Lösungen nur so viel, als zur genaueren Orientierung über den Gang der Rechnung notwendig ist".

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhalt.

I. Abschnitt.

Arithmetik.

§ 1—2. Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten 1
§ 3—4. Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten . . . 3
§ 5—6. Gleichungen des zweiten Grades mit einer Unbekannten 8
§ 7—8. Gleichungen des zweiten Grades mit mehreren Unbekannten . . . 16
§ 9. Unbestimmte Gleichungen 26
§ 10. Arithmetische Progressionen 29
§ 11. Geometrische Progressionen 34
§ 12. Zinseszinsen- und Rentenrechnung 40
§ 13. Kombinationslehre und binomischer Lehrsatz 62
§ 14. Wurzeln und Logarithmen 66

II. Abschnitt.

Geometrie.

Planimetrie.

§ 15. Konstruktions-Aufgaben 68
§ 16. Regelmäßige Polygone 69
§ 17. Rechnungs-Aufgaben aus der Planimetrie 71

Trigonometrie.

§ 18. Goniometrie und trigonometrische Gleichungen 73
§ 19. Rechtwinkeliges Dreieck 76
§ 20. Schiefwinkeliges Dreieck 82
§ 21. Viereck 101
§ 22. Sphärische Trigonometrie 106

Digitized by Google

Stereometrie.

§ 23. Prisma 110
§ 24. Zylinder 112
§ 25. Pyramide 114
§ 26. Kegel 119
§ 27. Kugel 130
§ 28. Regelmäßige Körper 144

Analytische Geometrie.

§ 29. Gerade Linie 148
§ 30. Kreis 159
§ 31. Ellipse 172
§ 32. Hyperbel 183
§ 33. Parabel 187

Digitized by Google

I. Abschnitt.

Arithmetik.

§ 1. Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten.

1) $\left[\sqrt{\frac{4x-3}{x-3}}+1\right]\sqrt{x-\frac{3}{4}}=\frac{6x-7}{2\sqrt{x-3}}$.

2) $\sqrt{x+3\frac{1}{4}}=\frac{2(2x+3)}{\sqrt{(x+2)^2-(x^2-9)}}-\sqrt{x-2\frac{3}{4}}$.

3) $\sqrt{4x-9}+\sqrt{x-1}=\sqrt{x+6}$.

4) $\sqrt{5-\sqrt{x}}=\sqrt{7-\sqrt{x}}-2\sqrt{3-\sqrt{x}}$.

5) $\sqrt{x-7}+\sqrt{x-2}-\sqrt{x-10}=\sqrt{x+5}$.

6) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=\sqrt{x+3}+\sqrt{x-\frac{1}{3}}$.

7) $\frac{a^{x-3}+1}{a^{x-1}-1}=b$.

8) $a^{x+b}+b^{x+a}=c.b^x$.

9) $4^{x+2}+2^{x+4}=24.2^x$.

10) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2+\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{3+\frac{1}{x}}=\left(\frac{4}{5}\right)^{4+\frac{1}{x}}$.

11) $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2+\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{3+\frac{1}{x}}=\left(\frac{5}{3}\right)^{5}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{4+\frac{1}{x}}$.

12) $3.4^x+\frac{1}{3}.9^{x+2}=6.4^{x+1}-\frac{1}{2}.9^{x+1}$.

13) $3^{2x+1}-2^{3x-2}=5^2(3^{2x}-2^{3x})$.

14) $3^{1+4x}-2^{3x-5}=2^{3x-1}-3^{4x}$.

15) $4^{3x-2}-5^{2x-1}=\frac{1}{9}(4^{3x-1}-5^{2x})$.

16) $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}+3^{x+3}=4^x+4^{x+1}+4^{x+2}$.

17) $5^x+5^{x+1}+5^{x+2}=3^x+3^{x+1}+3^{x+2}$.

18) $5^{2x-1}+5^{2x}+5^{2x+1}+5^{2x+2}=2[4^{2x-1}+4^{2x}+4^{2x+1}+4^{2x+2}]+$
$+25.4^{2x-1}$.

19) $\frac{\sqrt[5]{x-2}.\sqrt{2\cdot52}}{\sqrt[6]{0\cdot023}}=\sqrt{\frac{2\cdot8\sqrt[4]{0\cdot6561}}{\sqrt[3]{0\cdot023(x-2)}}}$.

Digitized by Google

20) $5^{\log x} + 2^{1-\log(2x)} \cdot 10^{\log(2x)} = 25.$

21) $5^{\log x} + 2^{-\log(2x)} \cdot 10^{\log(2x)} = 25.$

22) $\frac{2^{3x-10} \cdot 3^{x+2}}{8^{x-4} \cdot 6^{7-x}} = \frac{1}{8} \cdot 9^{x-2}.$

23) $\log(x+2) + \log(x+3) = \log(x-1) + \log x.$

24) $4 \log(x-1) = 2 \log(x+1) + \log(x-5) + \log(x-1).$

25) $\sqrt{3^{4x}+1} + \sqrt{3^{4x}+2} = 5.$

§ 1a.

1) $x = 7.$ 2) $x = 9.$ 3) $x = \frac{55}{19}.$

4) $x = \frac{1225}{144}.$ 5) $x = 11.$

6) $x = -\frac{11598}{2184}.$ 7) $x = \frac{\log[a^3(b+1)] - \log[a^2b-1]}{\log a}.$

8) $x = \frac{\log(c-b^a) - b \log a}{\log a - \log b}.$ 9) $x = -1.$

10) $x = -0{\cdot}60149.$ 11) $x = 1.$ 12) $x = -0{\cdot}5.$

13) $x = 1.$ 14) $x = -0{\cdot}87205.$ 15) $x = 1.$

16) $x = 2{\cdot}239824$ ($2{\cdot}2398$). 17) $x = -1{\cdot}701242$ ($-1{\cdot}70124$).

18) $x = 1.$ 19) $x = 3.$

20) $x = 12{\cdot}6317.$ 21) $x = 25{\cdot}1625.$

22) $x = 5.$ 23) $x = -1.$

24) $x = -\frac{1}{8}.$ 25) $x = 0{\cdot}35505.$

§ 2.

1) Aus einem vollen Wasserreservoir wurden zweimal nacheinander jedesmal 30 *hl* mehr als die Hälfte des Inhaltes entnommen, und so blieben schließlich nur 20 *hl* zurück. Wie groß war der ursprüngliche Inhalt, und wieviel wurde die beiden Male entnommen?

2) Zwei Körper, *A* und *B*, bewegen sich vom Punkte *M* aus nach entgegengesetzten Richtungen. Der Körper *B* legt in 3 Sekunden um 2 *m* mehr als *A* in derselben Zeit zurück und befindet sich, wiewohl er seine Bewegung um 2 Minuten später als *A* begonnen hat, doch schon 10 Minuten nach seinem Abgange um 160 *m* weiter von *M* als *A*. Mit welcher Geschwindigkeit bewegen sich die beiden Körper?

3) Zwei Körper, *M* und *N*, bewegen sich von *A* nach *B*. *M* macht in 2 Sekunden um 3 *m* mehr als *N* und legt den ganzen Weg in 10 Minuten 50 Sekunden zurück, während *N* in derselben Zeit um 325 *m* mehr als $^3/_4$ des Weges zurücklegt. Wie groß

Digitized by Google

ist die Entfernung der Orte A und B, und wie groß ist die Geschwindigkeit der beiden Körper?

4) A hat 4 Fässer, füllt er das leere zweite aus dem vollen ersten, so bleibt im letzteren noch $^1/_5$ seines Inhaltes zurück. Füllt er das leere dritte aus dem vollen zweiten, so bleiben noch 12 l übrig. Das vierte Faß, welches den vierfachen Fassungsraum des zweiten hat, wird durch die vollen ersten drei Fässer und 17 l erst $^5/_6$ vollgefüllt. Wie groß sind die einzelnen Fässer?

5) Der Kaufmann S erhält 50 kg einer Ware, der Eingangszoll beträgt 8% vom Preise der Ware, und da S 20% gewinnen will, so kann er ein Kilogramm soviel über 4 K 99·2 h verkaufen, als er es ohne Zoll, aber bei gleichem Nutzen unter diesem Betrag hätte geben können. Wie teuer hat S ein Kilogramm gekauft und wie teuer verkauft?

6) A bezog aus einer Tuchwarenfabrik eine bestimmte Menge Tuch und verkaufte dasselbe an den Detailhändler B mit einem 15perzentigen Nutzen. B arbeitete selbst mit 25% Nutzen und verkaufte so ein Meter Tuch um $1^3/_4$ K teurer, als A es aus der Fabrik bezogen hat. Wie teuer kaufte A ein Meter und wie teuer verkaufte es B?

7) In einem Gefäße sind 20 l Spiritus und 30 l Wasser, in einem anderen 18 l Spiritus und 7 l Wasser. Wie viele Liter Flüssigkeit hat man aus jedem der beiden Gefäße zu nehmen, um eine neue Mischung zu erhalten, in welcher 9 l Spiritus und 6 l Wasser sind? Wieviel hat man zu nehmen, wenn in dem ersten Gefäße 25 l Spiritus und 30 l Wasser sind?

§ 2a.

1) 260 hl; 160 hl, 80 hl.
2) A 2 m, B $2^2/_3$ m.
3) M 8 m, N $6^1/_2$ m, $AB = 5200$ m.
4) 75, 60, 48, 240 l.
5) 4 K, 5·184 K.
6) A kaufte ein Meter um 4 K, B verkaufte es um 5 K 75 h.
7) $5^5/_8$ und $9^3/_8$ l.
$6^{57}/_{73}$ und $8^{16}/_{73}$ l.

§ 3. Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

1) $$x - \frac{2y - x}{23 - x} = 20 - \frac{59 - 2x}{2}$$
$$y + \frac{y - 3}{x - 18} = 30 - \frac{73 - 3y}{3}.$$

Digitized by Google

2) $\sqrt{2x-y} - 2\sqrt{2x+y} = 2\sqrt{x+\sqrt{2x-y}}$.
$\frac{8x+y}{x+y} + 8 = \frac{34}{x+y}$.

3) $(2y+3) : (3y+2) = (4x+1) : (6x-1)$
$\frac{30y}{10y+1} + \frac{21-15y}{5y-7} = \frac{10y-35x+1}{50y^2-65y-7}$.

4) $(3x+2y) : (2x+3y) = (8a+7b) : (7a+8b)$.
$\frac{(5x+7y)-(a+3b)}{3(x+y)-(a+b)} = 2$.

5) $xy^2 + 2x = 12 - 3xy$, $xy^2 = x + 3$.

6) $x^8 + x^6y^2 + x^4y^4 + x^2y^6 + y^8 = \frac{a}{x^2-y^2}$
$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = \frac{b}{x-y}$.

7) $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{6}z$
$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = 30$
$\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{2}z = 35$.

8) $x + \frac{1}{2}(y+z) = 102$
$y + \frac{1}{3}(x+z) = 78$
$z + \frac{1}{4}(x+y) = 61$.

9) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$, $\frac{5}{x} - \frac{2}{z} = \frac{14}{15}$
$\frac{6}{y} + \frac{3}{z} = \frac{58}{5}$.

10) $\frac{x-y}{x-z} = 2$, $\frac{y-z}{z-a^2} = -\frac{a}{b}$
$x + z = 3ab + 2y$.

11) $\frac{ax+z}{y-z} = \frac{1+b}{1-b}$ $\frac{2ax-3b}{2y-3z} = 1$
$\frac{5z-4b}{3a^2x-2ay} = \frac{b}{a}$.

12) $3^{2\sqrt{2x+y}} = \frac{9^{3x}}{3^y}$ $125^{\frac{1}{5x-y}} = \frac{20^{\frac{2}{y}}}{2^{\frac{4}{y}}}$.

13) $\sqrt[3]{m^x} \cdot \sqrt[7]{m^y} = m^7$ $\sqrt[4]{m^x} : \sqrt[3]{(m^2)^y} = \frac{1}{m^{11}}$.

14) $5^x \cdot 8^y = 512000$ $x + y = 7$.

15) $5^x \cdot 3^y = 1125$, $3^x \cdot 5^y = 675$.

16) $\sqrt[3]{m^{x-5}} : \sqrt[5]{m^{y-3}} = 1$ $\sqrt[4]{m^{3x-1}} \cdot \sqrt[3]{m^{5y-1}} = m^{16}$.

17) $x^y = 243$ $\sqrt[y]{1024} = \left(\frac{2x}{3}\right)^2$.

18) $2\sqrt[x]{9^5} = 3\sqrt[y]{6^4}$ $\sqrt[x]{2^{10}} \cdot \sqrt[y]{2^{24}} = 2^8$.

19) $\frac{2}{3}\sqrt[x]{59049} = \sqrt[y]{1296}$
$\frac{\sqrt[2x]{1048576}}{\left(\sqrt[-y]{4096}\right)^2} = 256$.

20) $2^{\log x} \cdot 3^{\log y} = \sqrt{54}$
$\log x + \log y = 2$.

Digitized by Google

21) $2^{\log x} \cdot 3^{\log y} = 12$
$\log x + \log y = 3.$

22) $8\left[3\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^y = 27.2^y$
$7.5^{x-1} = \frac{1}{5}\sqrt[y]{5} + 10.5^{x-2}$

§ 3a.

1) $x = 21 \quad y = 20.$
2) $x = 1 \quad y = 2.$
3) $x = 3 \quad y = 5.$
4) $x = 2a + b \quad y = a + 2b.$
5) $x = 1, \quad y = 2.$
6) $x = \sqrt[5]{\frac{a+b^2}{2b}} \quad y = \sqrt[5]{\frac{a-b^2}{2b}}.$
7) $x = 20 \quad y = 30 \quad z = 40.$
8) $x = 62 \quad y = 46 \quad z = 34.$
9) $x = \frac{3}{2} \quad y = \frac{3}{4} \quad z = \frac{5}{6}.$
10) $x = a^2 + ab + b^2 \quad y = a^2 - ab + b^2 \quad z = a^2 + b^2.$
11) $x = \frac{1}{a} \quad y = 1 \quad z = b.$
12) $x = 1, \quad y = 2.$
13) $x = 12 \quad y = 21.$
14) $x = 3 \quad y = 4.$
15) $x = 3 \quad y = 2.$
16) $x = \frac{917}{127} \quad y = \frac{851}{127}.$
17) $x = 3 \quad y = 5.$
18) $x = 5 \quad y = 4.$
19) $x = 5 \quad y = 4.$
20) $x = 3{\cdot}16228 \quad y = 31{\cdot}62278.$
21) $x = 100, \quad y = 10.$
22) $x = -0{\cdot}5, \quad y = 2.$

§ 4.

1) $\frac{27 + 34x}{(3 + 4x)(6 + 7x)}$ soll in die Summe zweier Quotienten zerlegt werden, deren Divisoren $(3 + 4x)$ und $(6 + 7x)$ sind.

2) Zwei Brüche, von denen der erste $(2 + 5x)$, der zweite $(10 + x)$ zum Nenner hat, geben

$$\frac{48 + 48x}{(2 + 5x)(10 + x)}$$

zur Summe. Wie lauten diese Brüche, und welchen Wert muß x annehmen, daß der zweite Bruch dreimal so groß wird als der erste?

3) Vermehrt man in zwei Brüchen mit den Nennern 5 und 6 jeden der Zähler um 1, so ist ihre Summe $1^4/_5$; vermindert man aber jeden der Nenner der Brüche um 1, so ist ihre Summe $1^3/_4$. Wie heißen die Zähler der beiden Brüche?

4) 37 *dkg* Zinn verlieren im Wasser 5 *dkg* an Gewicht und 23 *dkg* Blei verlieren 2 *dkg*. Wenn nun eine Legierung von Zinn und Blei im Gewichte von 120 *dkg* im Wasser 14 *dkg* verliert, wie viele Dekagramm Blei und Zinn müssen in der Legierung sein?

Digitized by Google

5) Zwei Körper haben die Entfernung d Meter. Bewegen sie sich mit gleichmäßiger Geschwindigkeit gegeneinander, so treffen sie nach m Sekunden zusammen, bewegen sie sich aber mit denselben Geschwindigkeiten hintereinander, so treffen sie nach n Sekunden zusammen. Wie viele Meter legt jeder Körper in einer Sekunde zurück?

6) Vertauscht man in einer dreizifferigen Zahl, deren Ziffersumme 11 ist, die Ziffer der Zehner mit jener der Hunderter, so bleibt die Zahl dieselbe; vertauscht man aber die Ziffer der Zehner mit jener der Einheiten, so wird die neue Zahl um 18 größer als die ursprüngliche. Welche Zahl hat diese Eigenschaft?

7) Der fünfte Teil der ersten Zahl vermehrt um den sechsten Teil der zweiten und um den siebenten Teil der dritten geben zur Summe 9. Der fünfte Teil der ersten Zahl vermehrt um den dritten Teil der zweiten ist aber um $1^1/_2$ kleiner als die Hälfte der dritten Zahl und die zweite Zahl ist das arithmetische Mittel aus der ersten und dritten. Welche Zahlen sind es?

8) Ein Reservoir hat drei Zuflußröhren: werden alle drei gleichzeitig geöffnet, so ist das leere Reservoir in 8 Stunden gefüllt und dabei verhalten sich die Mengen, welche die erste und zweite Röhre geliefert haben, wie 6 : 5; die Mengen, welche durch die erste und dritte zugeflossen sind, wie 3 : 2. Wie lange braucht jede Röhre allein, um das leere Reservoir zu füllen?

9) A hat zwei Sorten einer Ware, von der ersteren um 50 *kg* mehr als von der zweiten. Von der ersten Sorte verkauft er je 5 *kg* um denselben Preis wie je 4 *kg* der zweiten Sorte und hat auf diese Weise für die ganze Ware eine Einnahme von 870 *K*. Würde er aber von der ersten Sorte je 5 *kg* um eine Krone billiger, von der zweiten Sorte aber je 4 *kg* um eine Krone teurer verkaufen als in der Tat, so wäre seine Gesamteinnahme 875 *K*. Wie viele Kilogramm hat A von jeder Sorte und wie teuer verkauft er 1 *kg* davon?

10) Jemand hat von zwei Sorten einer Ware zusammen 20 *kg* verkauft und dafür 52 *K* eingenommen. Hätte er 1 *kg* der ersten Sorte zu dem Preise der zweiten Sorte und 1 *kg* der zweiten Sorte zu dem Preise der ersten Sorte verkauft, so würde die Einnahme nur 48 *K* betragen haben, indem er für die erste Sorte um 12 *K* weniger als früher bekommen hätte. Wie viele Kilogramm hatte er von jeder Sorte und wie teuer hat er 1 *kg* verkauft?

Digitized by Google

11) Die Armen eines Versorgungshauses wurden mit 540 *K* beteilt, die Anzahl der Männer betrug um 13 mehr als die der Frauen. Hätte jeder Mann so viel wie eine Frau bekommen, so wären 55 *K* übrig geblieben, hätte aber jede Frau soviel wie ein Mann erhalten, so hätten gerade noch 42 *K* gefehlt. Wie viele Männer und Frauen waren in dem Versorgungshause und was bekam ein Mann und was eine Frau?

12) Vier Metalle sind in dem Verhältnisse 1 : 3 : 5 : 7 miteinander verbunden; setzt man zum Gewichte der Quantität noch das $3^3/_8$fache einer andern aus denselben Metallen bestehenden Legierung hinzu, so ändert sich das genannte Verhältnis in das 3 : 4 : 5 : 6 um; in welchem Verhältnisse stehen die Metalle der hinzugesetzten Legierung?

13) *A* und *B* gehen gleichzeitig von den Punkten *M* und *N* einander entgegen und treffen sich in *C*; die zurückgelegten Wege verhalten sich dabei wie 4 : 5. Ohne sich in *C* aufzuhalten, gehen sie weiter, *A* nach *N*, *B* nach *M* und *B* erreicht seinen Bestimmungsort um $6^3/_4$ Minuten früher als *A* den Ort *N*. Wären beide schon vom Anfang an mit einer größeren Geschwindigkeit ausgegangen, und zwar *A* mit einer um 1 *m*, *B* mit einer um $^1/_2$ *m* größeren Geschwindigkeit in der Sekunde als in der Tat, so hätten sie sich schon nach $11^1/_4$ Minuten getroffen. Mit welcher Geschwindigkeit gehen die beiden? Wie lange braucht jeder, um den Weg *MN* zurückzulegen? Wie weit ist *M* von *N* entfernt?

14) *A* und *B* gehen gleichzeitig, aber mit verschiedener Geschwindigkeit von den Punkten *M* und *N* auseinander entgegen. Als sie sich nach 8 Stunden treffen, hat *A* 8 *km* mehr als *B* zurückgelegt. *B* vergrößert nun seine Geschwindigkeit pro Stunde um 1 *km* und kommt in *M* um $1^5/_{11}$ Stunden später an als *A* in *N*. In derselben Zeit wäre *B* in *M* auch angelangt, wenn er von Anfang an pro Stunde um $^1/_2$ *km* mehr gemacht und diese Geschwindigkeit während seiner ganzen Bewegung beibehalten hätte. Mit welcher Geschwindigkeit bewegen sich die beiden Körper und wie weit ist *M* von *N* entfernt?

15) *A* und *B* gehen gleichzeitig vom Orte *M* nach dem Orte *N*. Da *A* in derselben Zeit 6 Schritte macht, in welcher *B* 5, und 10 Schritte des *A* der Größe nach soviel betragen als 9 Schritte des *B*, so kommt wohl *B* um eine Stunde später nach *N* als *A*, aber *A* hat um 3600 Schritte mehr als *B* gemacht. Wie viele Schritte machen *A* und *B* in der Stunde und wie lange brauchen sie, um nach *N* zu gelangen?

Digitized by Google

§ 4a.

1) Die Zähler sind 2 und 5.

2) $\frac{3}{2+5x} + \frac{9}{10+x} = \frac{48(1+x)}{(2+5x)(10+x)}$
$x = 2.$

3) $x = 3 \quad y = 5.$

4) 74 *dkg* Zinn, 46 *dkg* Blei.

5) $x = \frac{d(m+n)}{2mn} \quad y = \frac{d(n-m)}{2mn}.$ 6) 335.

7) $x = 15 \quad y = 18 \quad z = 21.$

8) $x = 20 \quad y = 24 \quad z = 30$ Stunden.

9) Von der ersten Sorte 350 *kg*, je 5 *kg* zu 6 *K*.
Von der zweiten Sorte 300 *kg*, je 4 *kg* zu 6 *K*.

10) Von der ersten Sorte 12 *kg*, 1 *kg* zu 3 *K*.
Von der zweiten Sorte 8 *kg*, 1 *kg* zu 2 *K*.

11) 55 Männer und 42 Frauen; jeder Mann bekommt 6 *K* und jede Frau 5 *K*.

12) Bedeuten x, y, z, u die Mengen der hinzugesetzten Metalle, so ist $x : y : z : u = 96 : 113 : 130 : 147$.

13) *A* macht 2 *m*, *B* aber $2^1/_2$ *m* per Sekunde, *A* braucht $33^3/_4$, *B* aber 27 Minuten, $MN = 4050$ *m*.

14) *A* macht $5^1/_2$ *km*, *B* $4^1/_2$ *km* per Stunde.
Die Entfernung der beiden Orte *M* und *N* beträgt 80 *km*.

15) *A* macht 2880 Schritte und braucht $12^1/_2$ Stunden.
B macht 2400 Schritte und braucht $13^1/_2$ Stunden.

§ 5. Gleichungen des zweiten Grades mit einer Unbekannten.

1) $x^2 + (a-x)^2 = b + x(a-x)$
speziell $a = 30$, $b = 525$.

2) $\frac{x}{b} + \frac{5a}{x+5a} = 1 + \frac{6a(a+b)}{b(x+5a)}.$

3) $2 - \frac{2}{x} + \frac{2(4-3x)}{x(x-2)^2} + \frac{16x}{(x-3)(x-4)} = \frac{2x^2+31}{x^2-7x+12}.$

4) $\frac{(x-3)^2}{x-4} = \frac{21x}{x^2-2x+1} + \frac{9}{(x-1)^2(x-4)}.$

5) $(x^2+2x+3)^2 - 8x(x+2) = 537.$

6) $x(x+3) = \sqrt{346 + 3x(x+3)} - 2.$

7) $x + a = \sqrt{a^2 + x\sqrt{2x^2 - a^2}}.$

8) $\sqrt{\frac{5}{x^2} + 49} - \sqrt{\frac{5}{x^2} - 49} = 7.$

9) $\frac{\sqrt{x}}{21-\sqrt{x}} + \frac{21-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 2\frac{1}{2}.$

Digitized by Google

10) $\sqrt{2x+2}+\sqrt{7+6x}=\sqrt{7x+72}$.

11) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-6}=\sqrt{2x+19}$.

12) $\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{15x+4}$.

13) $\sqrt{5+\sqrt{x}}+\sqrt{7+\sqrt{x}}=\sqrt{2\,(6+\sqrt{x})}$.

14) $\frac{16-4\sqrt{x}}{8-3\sqrt{x}}=\frac{88+33\sqrt{x}}{4+\sqrt{x}}+\frac{x^2-5x+11}{(8-3\sqrt{x})\,(4+\sqrt{x})}$.

15) $\frac{2a^2}{x+\sqrt{4a^2-x^2}}+\frac{2a^2}{x-\sqrt{4a^2-x^2}}=x$.

16) $\frac{1}{x-4}\sqrt{x^2-8x+31}=\frac{5}{x-4}+4-x$.

17) $\frac{(a-x)\sqrt{a-x}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}=a-b$.

18) $\frac{2x}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}}+\frac{2x}{\sqrt{x}-\sqrt{a-x}}=\frac{2b}{\sqrt{x}}$.

19) $\sqrt{\frac{a}{b}-x}-\sqrt{\frac{a}{b}+x}-2\sqrt{2x}+2\sqrt{\frac{a-4bx}{2b}}=0$.

20) $\frac{2x+\sqrt{x}}{2x-\sqrt{x}}=3\left[\frac{52}{45}-\frac{2x-\sqrt{x}}{2x+\sqrt{x}}\right]$.

21) $x+4-2\sqrt{\frac{x+4}{x-4}}=\frac{3}{x-4}$.

22) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2\,(x-3)}-\sqrt{\frac{x+1}{2}}=\sqrt{\frac{x-3}{2}}$.

23) $4x\sqrt{7x-5}-2x\sqrt{4x-3}=10x\sqrt{3x-8}$.

24) $12x\sqrt{3x-8}-3x\sqrt{5x-4}=6x\sqrt{2x+9}$.

25) $\frac{3x-1}{\sqrt{3x+1}}=1+\frac{1}{2}(\sqrt{3x}-1)$.

26) $\sqrt[10]{\frac{1+fg^2x}{1-fgx}}-3\sqrt[10]{\frac{1-fgx}{1+fg^2x}}=2$.

27) $\sqrt[10]{\left(\frac{3x^2+3}{x+3}\right)^7}=2\cdot 6390159$.

28) $x^2\,(x+6)^2+13x^2+78x+40=0$.

29) $\sqrt{\frac{31}{2}-\sqrt[3]{x}}+\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{4+\sqrt[3]{x}}}=2\sqrt{4+\sqrt[3]{x}}$.

30) $\sqrt[3]{x+a}+\sqrt[3]{x-a}=\sqrt[3]{2x}$.

31) $\sqrt[3]{x+\sqrt{2}}-\sqrt[3]{x-\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

32) $\sqrt[3]{x+84\cdot 5}-\sqrt[3]{x-84\cdot 5}=1$.

Digitized by Google

33) $3\sqrt[4]{\frac{x-40}{x+40}} + 3\sqrt[4]{\frac{x+40}{x-40}} = 10.$

34) $\frac{5-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x}} - \frac{\sqrt[4]{x}}{5-\sqrt[4]{x}} + \frac{5}{6} = 0.$

35) $\sqrt[5]{\frac{5-x}{3+x}} + \sqrt[5]{\frac{3+x}{5-x}} = 4.$

36) $3x^4 - 16x^3 + 26x^2 - 16x + 3 = 0.$

37) $2x^4 + 9x^3 + 14x^2 + 9x + 2 = 0.$

38) $2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 3x - 2 = 0.$

39) $x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 3x + 1 = 0.$

40) $2^{4x+3} - 27.2^{3x+1} + 101.2^{2x} - 216.2^{x-2} + 8 = 0.$

41) $\operatorname{tg}^4 x + \frac{5}{6}\operatorname{tg}^3 x - 6\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2 x + \frac{5}{6}\operatorname{tg} x + 1 = 0.$

42) $\frac{\log 2x}{\log(4x-15)} = 2.$

43) $\frac{1}{5-\log x} + \frac{1}{1+\log x} = 1.$

44) $\log(3x-4)^2 + \log(x-8)^2 = 4.$

45) $\frac{\log[x(x+2)^2]}{\log(x+1)} = 3.$

46) $3.4^{x+2} = 4.3^{\frac{3x+2}{x}}.$

47) $(a+b)^{x+1} + (a^2-b^2) = \frac{a}{(a+b)^{x-2}}.$

48) $\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - \frac{15}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^x = -\frac{25}{2}.$

49) $\frac{3\sqrt[x]{12}}{60+\sqrt[2x]{12}} = 6.$

50) $(a+b)^{x-1}(a-b)^x + \frac{a(a+2b)}{(a+b)^{x+1}(a-b)^x} = 2.$

51) $\sqrt{3^{4x}+1} + \sqrt{2.3^{4x}+3} = 5.$

52a) $3.\sqrt[x+1]{8} = 6^{x-1}.$ 52b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}\sqrt[x]{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt[4]{3})^{3x-4}.$

53) $\log\sqrt[3]{12x(3x-1)+5(x-6)} - \frac{2}{3}\log\sqrt{x-1} = \frac{2}{3}.$

54) $3.10^{2(3-x)(4-x)} + 10000 = 400.10^{(3-x)(4-x)}.$

55) $10000\,x^{[(\log x)^2 - 5\log x]} = 1.$

56) $(10000\,x)^{[(\log x)^2 - 5\log x]} = 1.$

57) $(2x+1)^{\log(2x+1)-3} = \frac{1}{100}.$

58) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-\log x} - 5\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{\log x}{2}} = 24.$

Digitized by Google

§ 5a.

1) $x = \frac{3a \pm \sqrt{3(4b - a^2)}}{6}$, $x_1 = 25 \quad x_2 = 5.$

2) $x_1 = a + b \qquad x_2 = -6a.$

3) $x_1 = 3 \cdot 236068 \qquad x_2 = -1 \cdot 236068$

4) $x_1 = 6 \cdot 358899 \qquad x_2 = -2 \cdot 358899$
$x_3 = 0 \qquad x_4 = 4.$

5) $x_1 = 4 \qquad x_2 = -6 \qquad x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{-21}.$

6) $x_1 = 3 \qquad x_2 = -6.$
$x_3 = -1 \cdot 5 + 4 \cdot 092676\, i \qquad x_4 = -1 \cdot 5 - 4 \cdot 092676\, i.$

7) $x_1 = 5a \qquad x_2 = -a \qquad x_3 = 0.$

8) $x = \pm \frac{2}{7}.$

9) $x_1 = 196 \qquad x_2 = 49.$

10) $x_1 = 7 \qquad x_2 = -11\frac{42}{47}.$

Der vorgelegten Gleichung entspricht die erste Wurzel, der abgeleiteten rationalen Gleichung entsprechen aber beide Wurzeln.

11) $x_1 = 15 \qquad x_2 = -10.$

12) $x_1 = 3 \qquad x_2 = -\frac{4}{11}.$ 13) $x_1 = 25 \qquad x_2 = 49.$

14) $x_1 = 93 \qquad x_2 = 7.$ 15) $x_1 = 2a \quad x_2 = -2a \quad x_3 = 0.$

16) $x_1 = 5 \qquad x_2 = 3 \qquad x_3 = 7 \cdot 1622777 \quad x_4 = 0 \cdot 8377223.$

17) $x_1 = a \qquad x_2 = b.$

18) $x = \frac{b \pm \sqrt{b(b - 2a)}}{2}.$ 19) $x_1 = \frac{a}{7b} \qquad x_2 = \frac{a}{9b}.$

20) $x_1 = \frac{49}{16} \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 4 \qquad x_4 = 0.$

21) $x_{1,2} = \pm 5 \qquad x_{3,4} = \pm \sqrt{17}.$

22) $x_1 = 3 \cdot 236068 \qquad x_2 = -1 \cdot 236068.$

23) $x_1 = 7\frac{556}{1401} \qquad x_2 = 3 \qquad x_3 = 0.$

24) $x_1 = 8 \qquad x_2 = \frac{3272}{1065} \qquad x_3 = 0.$

25) $x_1 = 1 \cdot 635778 \qquad x_2 = 0 \cdot 0679255 \qquad x_3 = \frac{1}{3}.$

26) $x_1 = \frac{8}{fg(9 + g)} \qquad x_2 = 0.$

27) $x_1 = 2 \cdot 522588 \qquad x_2 = -1 \cdot 189255.$

28) $x_1 = -1 \qquad x_2 = -5 \qquad x_3 = -2 \qquad x_4 = -4.$

29) $x_1 = 8 \qquad x_2 = -50 \cdot 653.$

30) $x_1 = a \qquad x_2 = -a \qquad x_3 = 0.$

31) $x_{1,2} = \pm \sqrt{2}.$

32) $x_{1,2} = \pm 427 \cdot 5.$

33) $x_{1,2} = \pm 41.$

34) $x_1 = 81 \qquad x_2 = 10000.$

Digitized by Google

35) $x_1 = 4 \cdot 988965 \qquad x_2 = -2 \cdot 988965.$

36) $x_1 = 3 \qquad x_2 = \frac{1}{3} \qquad x_{3,4} = 1.$

37) $x_1 = -1 \qquad x_2 = -1 \qquad x_3 = -2 \qquad x_4 = -\frac{1}{2}.$

38) $x_1 = -1 \qquad x_2 = -1 \qquad x_3 = 2 \qquad x_4 = \frac{1}{2} \qquad x_5 = 1.$

39) $x_{1,3,5} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \qquad x_{2,4,6} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$

40) $x_1 = 2 \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = 1 \qquad x_4 = -1.$

41) $\operatorname{tg} x_1 = 2 \qquad \operatorname{tg} x_2 = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{tg} x_3 = -3 \qquad \operatorname{tg} x_4 = -\frac{1}{3}.$

42) $x_1 = \frac{9}{2} \qquad x_2 = \frac{25}{8}.$

43) $x_1 = 100 \qquad x_2 = 1000.$

44) $x_1 = \frac{34}{3} \qquad x_2 = -2 \qquad x_{3,4} = \frac{14 \pm \sqrt{-200}}{3}.$

45) $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$

46) $x_1 = -1 \qquad x_2 = 1 \cdot 58496.$

47) $x = \frac{\log \frac{1}{2}\left\{(b-a) \pm \sqrt{5a^2+2ab+b^2}\right\}}{\log (a+b)}.$

48) $x_1 = 1 \qquad x_2 = 1 \cdot 756471 \ (1 \cdot 7565).$

49) $x_1 = 0 \cdot 5 \qquad x_2 = 0 \cdot 5395906.$

50) $x_1 = \frac{\log (a+2b)}{\log (a^2-b^2)} \qquad x_2 = \frac{\log a}{\log (a^2-b^2)}.$

51) $x_1 = 0 \cdot 25 \qquad x_2 = 1 \cdot 1293439.$

52a) $x_1 = 2 \qquad x_2 = -1 \cdot 38685.$

52b) $x_1 = 2 \qquad x_2 = -0 \cdot 1294.$

53) $x_1 = 2 \qquad x_2 = \frac{35}{36}.$

54) $x_1 = 5 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = 4 \cdot 8314949 \qquad x_4 = 2 \cdot 1685051.$

55) $x_1 = 100 \qquad x_2 = \frac{1}{100} \qquad x_3 = 10 \qquad x_4 = \frac{1}{10}.$

56) $x_1 = 1 \qquad x_2 = \frac{1}{10000} \qquad x_3 = 10^{\sqrt{5}} \qquad x_4 = \frac{1}{10^{\sqrt{5}}}.$

57) $x_1 = 49 \cdot 5 \qquad x_2 = 4 \cdot 5.$

58) $x_1 = 22 \cdot 077 \qquad x_2 = 9 \cdot 481 \qquad x_3 = \frac{1}{x_1} \qquad x_4 = \frac{1}{x_2}.$

§ 6.

1) 4 *kg* einer Ware kosten 2 *K* weniger als 4 *kg* einer andern. Nimmt man von jeder um $8^3/_4$ *K*, so erhält man von der ersteren um 2 *kg* mehr als von der letzteren. Was kostet 1 *kg* von jeder Ware?

Digitized by Google

2) Jemand legte sein Vermögen in einem Geschäfte an und ließ den im ersten Jahre erzielten Gewinn liegen. Da er im zweiten Jahre ebensoviele Prozente verlor, als er im ersten gewann, so forderte er am Schlusse des zweiten Jahres sein Geld zurück und erhielt um $^1/_4$ weniger, als er anfangs eingelegt hatte. Wie viele Prozente betrug der Gewinn des ersten Jahres?

3) Zwei Lichtquellen A und B sind voneinander $a = 40\ m$ entfernt; A hat in der Entfernung 1 die Lichtstärke 1, B in derselben Entfernung die Lichtstärke 2. Man soll in der Geraden a den Punkt bestimmen, der von beiden Lichtquellen gleich stark beleuchtet wird.

4) Die Schallstärke zweier $a = 7500\ m$ voneinander entfernten Schallerreger A und B verhält sich wie $3 : 5$; in welchen Punkten von a wird man den Schall beider gleich stark vernehmen?

5) Ein Diamant im Werte von 1000 K zerbricht einem Juwelier in zwei Teile, wodurch er einen Schaden von 200 K erleidet. Wie zerbrach der Diamant, wenn der Wert mit dem Volumen im quadratischen Verhältnisse wächst?

6) A verkauft ein Stück Tuch von 35 m Länge in zwei Partien. Von der ersten Partie war das Meter um eine Krone teurer als von der zweiten Partie und doch betrug die Einnahme gleich viel, nämlich je 60 K. Wie viele Meter hatte jede Partie und wie teuer wurde ein Meter verkauft?

7) In welchem Zahlensysteme ist 188 durch 356 bezeichnet? Und wie wäre die Zahl 188 des dekadischen Systems im pentadischen Systeme zu bezeichnen?

8) Die Fläche eines Trapezes beträgt 2000 m^2; die größere Parallelseite mißt 60 m, wie lang ist die kleinere Parallelseite, wenn sie dem Abstande der beiden Parallelen gleich ist?

9) Wenn α eine Wurzel der Gleichung:

$$x^3 + px + q = 0$$

ist, wie heißen die beiden anderen Wurzeln? Durch ein spezielles Beispiel zu erläutern:

$$\alpha = 6,\ x^3 - 15x - 126 = 0.$$

10) Aus einem mit 30 l Weingeist gefüllten Fasse wird eine bestimmte Menge herausgenommen und durch Wasser ersetzt, hierauf wird von dieser Mischung eine um 5 l größere Menge herausgenommen und wieder durch Wasser ersetzt. Es bleibt nun eine Mischung zurück, welche doppelt so viel Weingeist als Wasser enthält. Wieviel Liter wurden zum ersten Male herausgenommen?

Digitized by Google

11) Zwei Körper bewegen sich auf den Schenkeln eines rechten Winkels, A ist 123 m vom Scheitelpunkt entfernt und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 239 m in einer Minute vom Scheitelpunkte weg. B ist 239 m vom Scheitelpunkte entfernt und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 123 m in der Minute nach dem Scheitelpunkte hin. Zu welcher Zeit ist die geradlinige Entfernung der beiden Körper 850 m?

12) Auf den Schenkeln eines rechten Winkels bewegen sich zwei Körper, jeder 100 m vom Scheitel entfernt, der eine mit der Geschwindigkeit $c_1 = 8\ m$, der andere mit $c_2 = 6\ m$ gleichförmig gegen den Scheitelpunkt; wann ist die Entfernung der beiden Körper ein Minimum und wie groß ist dasselbe?

13) Ein Vater hinterließ ein Vermögen von 48.000 K seinen minorennen Kindern, und zwar zu gleichen Teilen mit der Bestimmung, daß, sollte eines derselben sterben, bevor es majorenn sei, sein Anteil den Überlebenden zu gleichen Teilen zuzufallen habe. Es starben zwei der Kinder, bevor sie majorenn wurden, und dadurch erbten die anderen jedes noch 3500 K. Wie viele Kinder hat der Vater hinterlassen?

14) Bei einem gemeinschaftlichen Geschäfte werden 1296 K gewonnen. A, welcher 400 K weniger eingelegt hatte als B und seine Einlage nur 8 Monate stehen ließ, während B 12 Monate beteiligt war, erhielt an Einlage und Gewinn 3480 K. Wie viel hatte jeder eingelegt?

15) Von einem rechtwinkligen Dreieck ist die eine Kathete um 17 größer als die andere; vermehrt man die kleinere um 20, die größere um 10, so wird die Hypotenuse um 20 größer. Wie groß sind die drei Seiten des Dreieckes?

16) In einem Trapeze ist die größere Parallelseite um 3 m länger als die kleinere, die Höhe ist die mittlere arithmetische Proportionale der beiden Parallelseiten. Wie lang sind die beiden Parallelseiten und die Höhe, wenn der Flächeninhalt des Trapezes nur um $7 \cdot 75\ m^2$ weniger beträgt als das Doppelte des über der kürzeren Parallelen errichteten Quadrates?

17) In einem gleichschenkligen Trapeze ist ein Schenkel das arithmetische Mittel aus den beiden Parallelen, welche der Größe nach um 2 m verschieden sind. Wie groß sind die Seiten, wenn der Flächeninhalt 18 m^2 beträgt?

18) Aus der kubischen Gleichung:
$a)\ x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0,\ b)\ x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$
soll die reduzierte Gleichung abgeleitet und diese dann aufgelöst werden.

Digitized by Google

19) Zwei Orte A und B sind $3^3/_4$ Meilen voneinander entfernt. Es werden zu gleicher Zeit von beiden Orten in derselben Richtung Boten abgesendet; der von A ausgehende braucht zu einer Meile 8 Minuten weniger als der von B ausgehende. Beide treffen im Orte C zusammen. Wie weit ist C von B entfernt und welche Zeit braucht jeder der zwei Boten zu einer Meile, wenn beide nach 10 Stunden in C eintreffen?

§ 6a.

1) Von der einen Sorte $1^3/_4$ K, von der anderen $1^1/_4$ K. Die negative Wurzel ist unbrauchbar.
2) 50%.
3) $r_1 = a(\sqrt{2} - 1)$, $\quad a - r_1 = a(2 - \sqrt{2})$;
$r_1 = 16{\cdot}5685\ m$, $\quad a - r_1 = 23{\cdot}4315\ m$
$r_2 = -a(\sqrt{2} + 1)$, $\quad a - r_2 = a(2 + \sqrt{2})$;
$r_2 = -96{\cdot}5685\ m$, $\quad a - r_2 = 136{\cdot}5685\ m$.
Im ersten Falle liegt der Ort zwischen A und B, im letzteren Falle vor A.
4) $r_1 = \frac{1}{2}a(\sqrt{15} - 3) = 3273{\cdot}6874\ m$;
$a - r_1 = \frac{1}{2}a(5 - \sqrt{15}) = 4226{\cdot}3126\ m$;
$r_2 = -\frac{1}{2}a(\sqrt{15} + 3) = -25773{\cdot}6874\ m$;
$a - r_2 = \frac{1}{2}a(5 + \sqrt{15}) = 33273{\cdot}6874\ m$.
5) 0·88729833 und 0·11270167, wenn das Volumen des ganzen Diamanten mit 1 bezeichnet wird.
6) 15 m à 4 K, 20 m à 3 K.
7) Im 7. Systeme. 1223.
8) 40 m.
9) Ist α eine Wurzel, so muß $\frac{x^3 + px + q}{x - \alpha} = 0 = x^2 + \alpha x + (p + \alpha^2)$
daher $x_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{-4p - 3\alpha^2}}{2}$, $\quad x_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{-4p - 3\alpha^2}}{2}$
z. B. $x^3 - 15x - 126 = 0$ hat die Wurzeln:
$x_1 = 6$, $\quad x_2 = -3 + 2\sqrt{-3}$, $\quad x_3 = -3 - 2\sqrt{-3}$.
10) $x = 2{\cdot}877856$, das negative Zeichen von $\sqrt{2425}$ ist hier allein zulässig.
11) Nach oder vor drei Minuten vom Augenblicke des Beginnes der Bewegung an gerechnet.
12) In 14 Sekunden beträgt die Entfernung das Minimum von 20 m.
13) 8.

Digitized by Google

14) Die Einlage des A beträgt 3000 K.

15) 28, 45, 53.

16) Die beiden Parallelen sind 8 m und 5 m, die Höhe 6·5 m.

17) Die beiden Parallelen sind 5·30197 m und 3·30197 m, ein Schenkel beträgt 4·30197 m.

18) Die reduzierte Gleichung ist *a)* $y^2 - y = o$, *b)* $y^2 - 4y = o$.
Die Wurzeln derselben sind:
a) $y_1 = o, \quad y_2 = +1, \quad y_3 = -1;$
b) $y_1 = o, \quad y_2 = +2, \quad y_3 = -2,$
Daher die Wurzeln der gegebenen Gleichung:
a) $x = y + 3$ oder $x_1 = 3, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 2;$
b) $x = y + 4$ oder $x_1 = 4, \quad x_2 = 6, \quad x_3 = 2.$

19) Der eine Bote braucht 32, der andere 40 Minuten zu einer Meile; C ist von B 15 Meilen entfernt.

§ 7. Gleichungen des zweiten Grades mit mehreren Unbekannten.

1) $x^2 - 2y^2 - 2x + 3y = 1$
$x + y = 3.$

2) $x^2 + y^2 = 68 + 8(x - y)$
$x = 14 - y.$

3) $\frac{x-3}{8-y} + \frac{y-8}{x-8} = \frac{16}{15}.$
$x + y = 13.$

4) $(x-1)^2 - (y+1)^2 = 12$
$x + 2y + 1 = 0.$

5) $3x^2 + 4y^2 = 4(35 + 4y) - 18x$
$3x = 2(y + 1).$

6) $x^3 + y^3 = 1792$
$xy = 48.$

7) $x^2 + y^2 + xy = \frac{3a^2+b^2}{(a^2-b^2)^2}$
$xy = \frac{1}{a^2-b^2}.$

8) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10}$
$\frac{10}{xy} = \frac{1}{72}.$

9) $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{5}{\sqrt{xy}}$
$2 : \sqrt{x} = \sqrt{y} : 3.$

10) $\frac{x-y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = 10;$
$\sqrt{xy} = 16.$

11) $\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \frac{1}{\sqrt{y-2}} = \frac{3}{2};$
$\frac{1}{\sqrt{(x+2)(y-2)}} = \frac{1}{2}.$

12) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 141$
$x + y = 10305.$

13) $12 : x = y : 3$
$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5.$

14) $(x^2 - y^2) + (x + y) = 0{\cdot}375$
$(x^2 - y^2) - (x - y) = 0{\cdot}125.$

15) $x + y = 5\sqrt{x} - \frac{1}{3}\sqrt{3y}$
$6 = 5\sqrt{x} + \frac{1}{3}\sqrt{3y}.$

16) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 12$
$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 104.$

Digitized by Google

17) $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{2}{3}} = 3x$
$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{3}} = x.$

18) $\frac{x^2}{y^2} + 4\frac{x}{y} = \frac{85}{9}$
$x - y = 2.$

19) $x^2 - 20 = 2\sqrt{x^2 + 4y + 28} - 4y$
$3x - 2y = 2.$

20) $x^2 + 3y = 55 - 4\sqrt{x^2 + 3y + 5}$
$6x = 16 + 7y.$

21) $\sqrt{6\sqrt{x} + 6\sqrt{y}} + \frac{1}{2}\sqrt{x} = 9 - \frac{1}{2}\sqrt{y}$
$x = y + 12.$

22) $x^2 - 2xy + 3y^2 = 33$
$3x^2 + 14xy + 6y^2 = 291.$

23) $x^2 + 2xy + 5y^2 = 113$
$y(x + y) = 28.$

24) $x^2 + xy + y^2 = 49$
$2x^2 - 3xy + 4y^2 = 41.$

25) $x^3y + xy^3 = 300, \quad x^2y^2 = 144.$

26) $(2x + 3y)(x + y) = 3(5 + xy)$
$x - 2 + \frac{2}{x+2} = 2y\frac{x-y}{x+2}.$

27) $x^2 + y^2 = 2(6 + 3y + 2x)$
$x + \frac{3y}{x} = 2\left(2 - \frac{y}{x}\right).$

28) $x + y = \sqrt{x} + \sqrt{y} - 2\sqrt{xy} + 42$
$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1.$

29) $\frac{17}{\sqrt{x+y}} - \frac{7\sqrt{x+y}}{x} = \frac{10x}{\sqrt{(x+y)^3}}$
$\sqrt{y-x} = y - 1.$

30) $\sqrt{\frac{3x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{3x}} = 2$
$xy - (x + y) = 54.$

31) $x + y + \sqrt{x+y} = 30$
$x^3 + y^3 = 8125.$

32) $\frac{51y}{2\sqrt{x+y}} - \frac{15y^2}{\sqrt{(x+y)^5}} = \frac{21}{2}\sqrt{x+y}$
$x - \sqrt{y-x} = 1.$

33) $x + y - \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{306}{x-y}$
$x^2 + y^2 = 1476.$

34) $\frac{3}{4}\sqrt{x-y} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$
$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 5.$

35) $x^2 + y^2 + 3xy = 19$
$x + y + 2xy = 10.$

Digitized by Google

36) $x^2 - 3xy + 3y^2 = 15 + 2x$
$y(y+4) = 20 + xy.$

37) $3x^2 + 5y = 27$
$3y(2x+y) = 73 - 5x.$

38) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 6x = 37$
$3x^2 + 8xy + 5y^2 + 12y = 45.$

39) $x^2 + y^2 - xy = 61$
$19(x+y) - xy = 211.$

40) $x^2 + y^2 = 337,$
$\sqrt{1+\frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{30}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}}\sqrt{1+\frac{y}{x}}.$

41) $xy + 10(x-y) = x^2 + 3y^2$
$xy = 2(8 - y^2).$

42) $x^4 + y^4 = 706; \qquad x - y = 2.$

43) $x^2 + y^2 + x - y = 32$
$3x^2 + 3y^2 - 5xy = 27.$

44) $y^2 + 3x^2 + 4xy - 21y - 41x = -110$
$x^2 - 4y^2 - 9x + 50y = 136.$

45) $x^2 + y\sqrt{xy} = 70$
$y^2 + x\sqrt{xy} = 105.$

46) $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 + \frac{x}{y} = 14\frac{4}{9} - \frac{y}{x}$
$\frac{x}{4} = \frac{y}{4} + 1.$

47) $\sqrt[3]{6x+2} + \sqrt[3]{6y-4} = 4$
$\sqrt{12x+12y-11} - \frac{15}{\sqrt{12(x+y)-11}} = 2.$

48) $x + y + z = 42;$
$x : y = y : z;$
$y(x+z) = 272.$

49) $3x - z = 3y; \quad xy - yz = 7; \quad y^2 + z^2 = 10.$

50) $\frac{x^2+y^2}{xyz} = \frac{5}{12}; \quad \frac{x^2+z^2}{xyz} = \frac{5}{6}; \quad \frac{y^2+z^2}{xyz} = \frac{13}{12}.$

51) $x + y + z = 18; \qquad xz = 6y - 1;$
$x^2 + z^2 = 2(y^2 + 1).$

52) $x^2 + y^2 = 20$
$x^4 + z^4 = 257$
$y^2 - z^4 = 3.$

53) $x^2 + y^2 + z^2 = 77$
$y^2 - xz = 1$
$5x - 2z = 8.$

54) $xy + xz + yz = 11$
$\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} = \frac{6}{xyz}$
$xy = 6.$

55) $x^2 + y^2 + z^4 + u^2 = 486$
$x : y : z = 2 : 3 : 5$
$7x + 5y = 8u - 9.$

Digitized by Google

56) $(x+z)^2+(y+u)^2=208$
$zy+u(x+z)=48$
$x+y+z+u=20$
$x+y=14.$

57) $x^2+y^2+z^2+u^2=86$
$\frac{x}{3}\left(14u-\frac{x}{2}\right)=83$
$x:y=3:4$
$x:z=3:5.$

58) $2^x+3^y=19$
$2^{2x}+3^{2y}=265.$

59) $y^x=64$
$y^{\frac{x+1}{x-1}}=16.$

60) $2^{4(x+2)}.5^{4(x+2)}=(10^x)^4$
$\frac{10^{x^2}+2xy+y^2}{10^{x^2}-2xy+y^2}=(10^8)^2.$

61) $3^{y+2}=\sqrt[x+1]{9^{8-x}},\qquad 2^{y+2}=\sqrt[x-1]{8^{2\frac{1}{3}-x}}.$

62) $\sqrt[xy]{s^y.r^x}=\frac{\sqrt[15]{r^8}}{\sqrt[x]{\frac{r}{s}}},\qquad \sqrt[x]{r^{7+y}}=r^2.$

63) $10.x^{\frac{2}{y-1}}-1001x^{\frac{1}{y-1}}+100=0$
$10^{y-1}=0{\cdot}01x.$

64) $3^x.2^y=486,\qquad 3^y=\sqrt[x]{243}.$

65) $5^{\log x}+3^{\log y}=32.$
$5^{\log x}.3^{\log y}=135.$

66) $4\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{y}}=11\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{y}}-6$
$y=2-\log x.$

§ 7a.

1) $x_1=5,\ y_1=-2;\ x_2=2,\ y_2=1.$
2) $x_1=12,\ y_1=2;\ x_2=10,\ y_2=4.$
3) $x_1=8,\ y_1=5;\ x_2=3\frac{3}{4},\ y_2=9\frac{1}{4}.$
4) $x_1=5,\ y_1=-3;\ x_2=-3,\ y_2=1.$
5) $x_1=4,\ y_1=5;\ x_2=-2\frac{1}{2},\ y_2=-4\frac{3}{4}.$
6) $x_1=12,\ y_1=4;\ x_2=4,\ y_2=12.$

Da aber $\sqrt[3]{1728}=12\sqrt[3]{1}$ und $\sqrt[3]{64}=4\sqrt[3]{1}$ ist und $\sqrt[3]{1}$ die drei Wurzeln 1, $-\frac{1}{2}(1-\sqrt{-3})$, $-\frac{1}{2}(1+\sqrt{-3})$ hat, so entsprechen den gegebenen Gleichungen noch vier andere Wurzelsysteme.

7) $x_{1,2}=\pm\frac{1}{a-b}=y_{3,4}\qquad y_{1,2}=\pm\frac{1}{a+b}=x_{3,4}.$
8) $x_1=60=y_2;\ y_1=12=x_2.$
9) $x_1=4=y_2;\ y_1=9=x_2.$
10) $x_1=4=y_2;\ y_1=64=x_2.$
11) $x_1=-1,\ y_1=6;\ x_2=2,\ y_2=3.$

Digitized by Google

12) $x_1 = 7056 = y_2$; $y_1 = 3249 = x_2$.

13) $x_1 = 9$, $y_1 = 4$; $x_2 = 4$, $y_2 = 9$;
$x_3 = 36$, $y_3 = 1$, $x_4 = 1$, $y_4 = 36$
und zwar entsprechen die beiden ersten Systeme, wenn beide Wurzeln positiv, die beiden letzteren Systeme, wenn die eine Wurzel im positiven, die andere im negativen Sinne genommen wird, alle vier Systeme entsprechen aber den rationalen Gleichungen:
$x^2 + y^2 - 2xy - 50x - 50y + 625 = 0 \quad xy = 36$.

14) $x_1 = \frac{1}{8}$, $y_1 = \frac{5}{8}$; $x_2 = \frac{1}{8}$, $y_2 = \frac{3}{8}$.

15) $x_1 = \frac{9}{4}$, $y_1 = \frac{27}{4}$; $x_2 = 1$, $y_2 = 3$.
Das erste Wurzelpaar genügt der Gleichung, wenn die Wurzel von $\sqrt{3y}$ im negativen Sinne genommen wird.

16) $x_1 = 1000 = y_2$; $x_2 = 8 = y_1$.

17) $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = 4$, $y_2 = 8$; $x_3 = 1$, $y_3 = 8$.

18) $x_1 = 5$, $y_1 = 3$; $x_2 = 1 \cdot 7$, $y_2 = -0 \cdot 3$.

19) $x_1 = 4$, $y_1 = 5$; $x_2 = -10$, $y_2 = -16$
$x_{3,4} = -3 \pm \sqrt{21}$; $y_{3,4} = \frac{-11 \pm 3\sqrt{21}}{2}$.

20) $x_1 = 5$, $y_1 = 2$; $x_2 = -\frac{58}{7}$, $y_2 = -\frac{430}{49}$
$x_{3,4} = \frac{-9 \pm 4\sqrt{317}}{7}$ $\quad y_{3,4} = \frac{-166 \pm 24\sqrt{317}}{49}$.

21) $x_1 = 16$, $y_1 = 4$; $x_2 = \frac{59536}{81}$, $y_2 = \frac{58564}{81}$.

22) Diese Gleichung läßt sich mit der Substitution $y = xt$ oder auch, daß man beide Gleichungen addiert, leicht lösen.
$x_1 = 3$, $y_1 = 4$; $x_2 = \frac{75}{11} = 6 \cdot 818182$, $y_2 = \frac{16}{11} = 1 \cdot 454545$
$x_3 = -3$, $y_3 = -4$; $x_4 = -\frac{75}{11}$, $y_4 = -\frac{16}{11}$.

23) $x_{1,2} = \pm 3$; $y_{1,2} = \pm 4$; $x_{3,4} = \pm \frac{9}{2}$; $y_{3,4} = \pm \frac{7}{2}$.

24) $x_{1,2} = \pm 5$; $y_{1,2} = \pm 3$;
$x_{3,4} = \pm 4 \cdot 963973$; $y_{3,4} = \pm 3 \cdot 042435$.

25) $x_{1,2} = \pm 3$; $y_{1,2} = \pm 4$; $x_{3,4} = \pm 3i$; $y_{3,4} = \pm 4i$.
$x_{5,6} = \pm 4$; $y_{5,6} = \pm 3$; $x_{7,8} = \pm 4i$; $y_{7,8} = \pm 3i$.

26) $x_1 = 2$; $y_1 = 1$; $x_2 = -2$; $y_2 = -1$;
$x_{3,4} = \pm 1 \cdot 536443$; $y_{3,4} = \pm 1 \cdot 408406$.

27) $x_1 = -1$, $x_2 = 5$, $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{-56}$
$y_{1,2} = -1$, $y_{3,4} = 12$.

28) $x_1 = 16$, $y_1 = 9$; $\quad x_2 = \frac{25}{4}$, $y_2 = \frac{49}{4}$.

29) $x_{1,2} = \frac{7}{9}[1 \pm 2\sqrt{-2}]$; $\quad y_{1,2} = \frac{1}{3}[1 \pm 2\sqrt{-2}]$;
$x_3 = -1$, $y_3 = 0$.

30) $x_1 = 6$; $y_1 = 12$; $x_2 = -4\frac{1}{2}$; $y_2 = -9$.

Digitized by Google

31) $x_1 = 20 = y_2 \qquad y_1 = 5 = x_2$

$x_{3,4} = \frac{1}{18}[324 \pm \sqrt{-10617}] = y_{4,3}$.

32) $x_1 = 0, \quad y_1 = 1; \qquad x_2 = 3, \quad y_2 = 7; \qquad x_3 = \frac{1}{3}, \quad y_3 = \frac{7}{9}$.

33) $x_{1,2} = \pm 30; \qquad y_{1,2} = \pm 24$

$x_{3,4} = \pm 29{\cdot}706902, \qquad y_{3,4} = \pm 24{\cdot}361855$.

34) $x_1 = \frac{13}{2}; \quad y_1 = \frac{5}{2}; \quad x_2 = \frac{293}{18}; \quad y_2 = \frac{285}{18}$.

35) $x_1 = 3, \quad y_1 = 1; \qquad x_2 = 1, \quad y_2 = 3;$

$x_{3,4} = y_{4,3} = \frac{1}{4}(-7 \pm i\sqrt{59})$.

36) $x_1 = 5, \quad y_1 = 5; \quad x_2 = 3, \quad y_2 = 4.$

$x_{3,4} = 4 \pm \sqrt{-71}; \quad y_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{-71}}{2}$.

37) Man addiere beide Gleichungen und bestimme $(x + y)$.

$x_1 = 2, \quad y_1 = 3; \qquad x_2 = -\frac{1}{3}, \quad y_2 = 5\frac{1}{3}$.

$x_3 = 5{\cdot}394644; \quad y_3 = -12{\cdot}061311.$

$x_4 = -3{\cdot}727977; \quad y_4 = -2{\cdot}938689.$

38) Man ziehe zunächst die zweite Gleichung von der ersten ab und bestimme $x + 2y$.

$x_1 = 2, \quad y_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad y_2 = 3.$

$x_3 = -6{\cdot}165525; \quad y_3 = 4{\cdot}082763.$

$x_4 = 18{\cdot}165525; \quad y_4 = -8{\cdot}082763.$

39) $x_1 = 9, \quad y_1 = 4; \quad x_2 = 4, \quad y_2 = 9.$

$x_{3,4} = 22 \pm \sqrt{-141}; \quad y_{3,4} = 22 \mp \sqrt{-141}.$

40) $x_1 = 16, \quad y_1 = 9; \quad x_2 = 9, \quad y_2 = 16;$

$x_{3,4} = 18 \pm \sqrt{-155{\cdot}5}, \quad y_{3,4} = 18 \mp \sqrt{-155{\cdot}5}.$

41) Man addiere beide Gleichungen und bestimme $(x - y)$.

$x_1 = 9\frac{1}{3}, \quad y_1 = \frac{4}{3}; \quad x_2 = 4, \quad y_2 = -4;$

$x_3 = 4, \quad y_3 = 2; \quad x_4 = -\frac{2}{3}, \quad y_4 = -\frac{8}{3}$.

42) $x_1 = 5, \quad y_1 = 3; \quad x_2 = -3, \quad y_2 = -5.$

$x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{-22}; \quad y_{3,4} = -1 \pm \sqrt{-22}.$

43) Man multipliziere die zweite Gleichung mit 2 und subtrahiere dann die erste Gleichung.

$x_1 = 4{\cdot}8, \quad y_1 = 2{\cdot}6; \quad x_2 = -2{\cdot}6, \quad y_2 = -4{\cdot}8;$

$x_3 = 3, \quad y_3 = 5; \quad x_4 = -5, \quad y_4 = -3.$

44) Bestimmt man zunächst aus der zweiten Gleichung x, so ergibt sich $x_1 = 17 - 2y$, $x_2 = 2y - 8$.

Diese Werte in die erste Gleichung eingesetzt liefern:

$y_1 = 6, \quad y_2 = 5, \quad y_3 = 8, \quad y_4 = 7,$ daher

$x_1 = 4, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 3.$

45) $x_{1,2} = \pm 4; \quad y_{1,2} = \pm 9.$

Digitized by Google

46) $x_1 = 6, \quad y_1 = 2; \quad x_2 = -2, \quad y_2 = -6.$
$x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{\frac{28}{19}}, \qquad y_{3,4} = -2 \pm \sqrt{\frac{28}{19}}.$

47) $x_{1,2} = 1, \quad y_{1,2} = 2;$
$x_{3,4} = \frac{1}{27}(9 \pm \sqrt{-1734}), \quad y_{3,4} = \frac{1}{27}(36 \mp \sqrt{-1734}).$

48) $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{-1140}; \quad y_{1,2} = 34; \quad z_{1,2} = 4 \mp \sqrt{-1140}.$
$x_3 = 32 = z_4 \quad y_3 = 8 = y_4 \quad z_3 = 2 = x_4.$

49) $x_{1,2} = \pm \frac{4}{13}\sqrt{13}; \quad y_{1,2} = \pm \frac{7}{13}\sqrt{13}; \quad z_{1,2} = \mp \frac{9}{13}\sqrt{13}$
$x_{3,4} = \pm \frac{10}{3}; \quad y_{3,4} = \pm 3; \quad z_{3,4} = \pm 1.$

50) $x_1 = 2, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = -2;$
$y_1 = 4, \quad y_2 = -4, \quad y_3 = 4, \quad y_4 = -4;$
$z_1 = 6, \quad z_2 = -6, \quad z_3 = -6, \quad z_4 = 6.$

51) $x_1 = 7, \quad y_1 = 6, \quad z_1 = 5; \quad x_2 = 5, \quad y_2 = 6, \quad z_2 = 7;$
$x_{3,4} = 36 \pm \sqrt{1621}; \quad y_{3,4} = -54; \quad z_{3,4} = 36 \mp \sqrt{1621}.$

52) $x_{1,2} = \pm 4; \quad y_{1,2} = \pm 2$
$x_{3,4} = \pm i\sqrt{15}; \quad y_{3,4} = \pm \sqrt{35}$
$z_1 = \sqrt[4]{1}, \qquad z_2 = 2\sqrt[4]{2}.$

Da aber $\sqrt[4]{1}$ und $\sqrt[4]{2}$ vier Wurzeln haben, somit sowohl z_1 wie z_2 vier Wurzeln vorstellt, so ist auch jeder der angeführten Werte von x und y eine doppelte Wurzel.

53) $x_{1,2} = 4, \quad z_{1,2} = 6, \quad x_{3,4} = -\frac{20}{13}, \quad z_{3,4} = -\frac{102}{13}, \quad y_{1,2} = \pm 5;$
$y_{3,4} = \pm \frac{47}{13}.$

54) $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-23}}{2}; \quad y_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{-23}}{2}; \quad z_{1,2} = 5.$
$x_3 = 3 = y_4; \quad x_4 = 2 = y_3; \quad z_{3,4} = 1.$

55) $x_1 = 6, \quad y_1 = 9, \quad z_1 = 15, \quad u_1 = 12$
$x_2 = -\frac{6894}{1091}, \quad y_2 = -\frac{10341}{1091}, \quad z_2 = -\frac{17235}{1091}, \quad u_2 = -\frac{11268}{1091}.$

56) $x_1 = 8, \quad y_1 = 6, \quad z_1 = 4, \quad u_1 = 2$
$x_2 = 8, \quad y_2 = 6, \quad z_2 = 0, \quad u_2 = 6$
$x_3 = 6, \quad y_3 = 8, \quad z_3 = 6, \quad u_3 = 0$
$x_4 = 6, \quad y_4 = 8, \quad z_4 = 2, \quad u_4 = 4.$

57) $x_{1,2} = \pm 3; \quad y_{1,2} = \pm 4; \quad z_{1,2} = \pm 5; \quad u_{1,2} = \pm 6$
$x_{3,4} = \pm \frac{249}{99}; \quad y_{3,4} = \pm \frac{332}{99}; \quad z_{3,4} = \pm \frac{415}{99}; \quad u_{3,4} = \pm \frac{706}{99}.$

58) $x_1 = 4, \quad y_1 = 1; \quad x_2 = 1{\cdot}584963, \quad y_2 = 2{\cdot}523719.$

59) $x_1 = 3, \quad y_1 = 4; \quad x_2 = -\frac{1}{2}, \quad y_2 = \frac{1}{4096}.$

60) $x_1 = 2, \quad y_1 = 2; \quad x_2 = -1, \quad y_2 = -4.$

61) $x_1 = 2, \quad y_1 = 2; \quad x_2 = -13, \quad y_2 = -\frac{11}{2}.$

Digitized by Google

62) $x_1 = 5, \quad y_1 = 3; \quad x_2 = \frac{21}{16}, \quad y_2 = -4\frac{3}{8}.$

63) $x_1 = 10000, \quad x_2 = 10, \quad y_1 = 3, \quad y_2 = 0.$

64) $x_1 = 5, \quad y_1 = 1; \quad x_2 = \frac{\log 2}{\log 3}, \quad y_2 = \frac{5 \log 3}{\log 2}.$

65) $x_1 = 111 \cdot 64046; \quad y_1 = 29 \cdot 17248;$
$x_2 = 10; \quad y_2 = 1000.$

66) $x_1 = 0 \cdot 137609; \quad y_1 = 2 \cdot 861353$
$x_2 = 1 \cdot 667728; \quad y_2 = 1 \cdot 777875.$

§ 8.

1) Ein rechteckiges Stück Tuch zieht sich beim Benetzen in der Länge um den neunten, in der Breite um den zwanzigsten Teil zusammen und verliert dadurch 8·16 *m* an Umfang und 10·08 m^2 an Fläche; welche Dimensionen hatte es vor dem Benetzen?

2) Ein Fabriksbesitzer zahlte seinen Arbeitern täglich 65 *K* aus. Der Zeitverhältnisse wegen mußten sieben Arbeiter entlassen und der Taglohn der übrigen per Kopf um 40 *h* herabgesetzt werden, so daß dann die tägliche Lohnausgabe nur 39 *K* 60 *h* betrug. Wie viele Arbeiter waren ursprünglich und wie hoch war der Taglohn des einzelnen?

3) Jemand kauft zwei Häuser, von welchen das erste 600 *K* einträgt, das zweite, das um 2000 *K* billiger ist, und sich um 1% weniger verinteressiert, bringt um 200 *K* weniger ein. Wieviel kostet jedes Haus und wie hoch verinteressiert es sich?

4) Ein Kapital von 1800 *K* hat in einer bestimmten Zeit 360 *K* an Interessen getragen, als aber der Zinsfuß um 1% niedriger gestellt wurde, brachte das Kapital erst in einer um ein Jahr längeren Zeit dieselben Interessen. Wie hoch war anfangs der Zinsfuß und wie lange stand das Kapital aus?

5) Die Summe der Oberflächen zweier Würfel beträgt 61·5 dm^2 und die Summe zweier Kanten derselben ist 4·5 *dm*; wie groß ist der Kubikinhalt eines jeden Würfels?

6) Über derselben Hypotenuse liegen zwei rechtwinklige Dreiecke; die Katheten des ersten unterscheiden sich um 9 *cm*, die des zweiten um 13 *cm*. Wie groß sind die Katheten beider Dreiecke, wenn deren Inhalte zusammen 90 cm^2 betragen?

7) Vermehrt man die eine Kathete um 2 und vermindert die zweite um 2, so bleibt die Hypotenuse ungeändert; vermindert man aber die erste Kathete um 1 und vermehrt die zweite Kathete um 4, so wächst die Hypotenuse um 3. Wie lang sind die Seiten dieses rechtwinkligen Dreieckes?

Digitized by Google

8) Vermehrt man von einem Bruche, dessen Zähler und Nenner ganze Zahlen sind, den Zähler um 3 und gleichzeitig den Nenner um 5, so ist der Wert des neuen Bruches $^2/_3$; vermehrt man aber den Zähler um 9 und den Nenner um 5, so erhält man den reziproken Wert des ursprünglichen Bruches. Wie heißt dieser?

9) Vertauscht man in einer zweizifferigen Zahl die Ziffer der Zehner mit jener der Einheiten, so ist die neue Zahl um 27 kleiner. Die Summe der Quadrate der beiden Ziffern, ohne Rücksicht auf ihren Stellenwert, beträgt nur um zwei weniger als die siebenfache Ziffernsumme der Zahl. Wie heißt die Zahl?

10) Die Maßzahlen der Länge, Breite und Höhe eines rechtwinkligen Parallelepipeds bilden eine geometrische Reihe; das Volumen desselben beträgt 1000 cm^3 und die Oberfläche 700 cm^2. Welche Dimensionen hat der Körper?

11) Zwei Körper M und N bewegen sich von den Punkten A und B geradlinig und gleichförmig einander entgegen. N beginnt seine Bewegung um 3 Sekunden später, legt aber in einer Sekunde um 3 m mehr zurück als M. Beim Zusammentreffen verhält sich der Weg des M zu dem des N wie 25 : 27. Wäre M um 9 Sekunden länger unterwegs gewesen und hätte N in der Sekunde um 5 m weniger zurückgelegt, als es der Fall war, so wäre beim Zusammentreffen der Weg des M um 234 m größer gewesen als der des N. Wie lange und mit welcher Geschwindigkeit hat sich jeder Körper bewegt, und wie groß ist die Entfernung AB?

12) In einem Dreiecke, dessen Basis 12 m und dessen Höhe 8 m beträgt, soll parallel zur Basis derart ein Schnitt geführt werden, daß sich die Flächen der beiden Teile, d. i. die Fläche des abgeschnittenen Dreieckes zur Fläche des Trapezes, verhalten wie 7 : 9. In welcher Entfernung von der Basis hat der Schnitt zu geschehen, und wie groß ist die schneidende Gerade?

13) In einer stetigen geometrischen Proportion ist die Summe der äußeren Glieder um 8 größer als die Summe der inneren Glieder und das dreifache erste Glied nur um vier größer als das letzte Glied. Wie heißt die Proportion?

14) Wie heißt in reellen Zahlen die stetige geometrische Proportion, bei welcher die Summe der drei Glieder 126 und das Produkt derselben 13824 ist?

15) Aus drei reellen Zahlen, deren Summe 28 beträgt, ist eine stetige geometrische Proportion zu bilden, derart, daß das mittlere

Digitized by Google

Glied mit der Summe der beiden äußeren Glieder der Proportion multipliziert 160 als Produkt ergibt.

16) Drei geradlinige Straßen kreuzen sich so, daß zwischen ihnen eine rechtwinklige Dreiecksfläche mit einem Umfange von 48 *km* liegt. Zwei Spaziergänger gehen gleichzeitig vom Kreuzungspunkte jener zwei Straßen aus, welche die Katheten der Dreiecksfläche bilden, jeder einer anderen Kathete folgend; der eine macht in derselben Zeit 130 *m* Weges, in welcher der andere nur 110 *m* zurücklegt. Sie begegnen sich in der Mitte der Straße, welche die Hypotenuse des Dreieckes darstellt. Wie lang ist jede der drei Strecken?

17) Es wird eine Zahl gesucht, die mit 3 Ziffern geschrieben wird und so beschaffen ist, daß die Summe der Quadrate der einzelnen Ziffern ohne Rücksicht auf ihren Rang gleich 104, das Quadrat der mittleren Ziffer aber um 4 größer ist als das doppelte Produkt der beiden andern; daß ferner, wenn 594 von der gesuchten Zahl abgezogen wird, eine Zahl zum Vorschein kommt, welche die Ziffern der gesuchten Zahl in umgekehrter Ordnung enthält. Welche Zahl ist es?

18) Ein im Altertum berühmter Berg hat einen Namen, welcher aus drei Buchstaben besteht. Nimmt man aber statt der Buchstaben die Zahlen ihrer Stellen im Alphabete, so beträgt die Summe 14; die mittlere Zahl ist halb so groß als das um 1 verminderte Produkt der beiden äußeren und die Summe der Quadrate der ersten und dritten Zahl ist um 50 größer als das doppelte Quadrat der mittleren. Welcher Berg ist es?

19) Ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem die Summe von Basis $= b$ und Höhe $= h$ gleich ist der Summe der beiden Schenkel, hat denselben Flächeninhalt wie ein Quadrat, dessen Seite s gegeben ist. Wie groß sind die Seiten und die Höhe des gleichschenkligen Dreieckes?

§ 8a.

1) Die Dimensionen des Tuches sind $x_1 = 35 \cdot 908\ m$, $y_1 = 1 \cdot 804\ m$ oder $x_2 = 0 \cdot 812\ m$, $y_2 = 79 \cdot 8\ m$.
2) 25 Arbeiter à 2 *K* 60 *h* per Tag.
3) Das erste Haus kostet 12.000 *K* (5%) oder 10.000 *K* (6%), das zweite 10.000 *K* (4%) oder 8000 *K* (5%).
4) Der Zinsfuß war anfangs 1·05 und die Zeit 4 Jahre.
5) $\frac{125}{8}$, 8; 8, $\frac{125}{8}$.

Digitized by Google

6) Die Katheten des einen Dreieckes sind 7 und 16 *cm*, die des andern 4 und 17 *cm* lang.

7) 6, 8, 10.

8) $\frac{s}{4}$.

9) 85.

10) x sei die Länge, y die Breite und z die Höhe: $x_1 = 20$, $y_1 = 10$, $z_1 = 5$; $x_2 = 5$, $y_2 = 10$, $z_2 = 20$.

11) M: 30 Sek. mit 15 *m*; N: 27 Sek. mit 18 *m*. $AB = 936$ *m*. Die zweite Wurzel ist unbrauchbar.

12) Der Abstand beträgt 2·708497 *m*, die parallele Gerade 7·937254 *m*.

13) $x_1 = 18$; $y_1 = 30$; $z_1 = 50$; $[x_2 = 2,\ y_2 = -2,\ z_2 = 2]$.

14) Ist $a : b = b : c$ die Proportion, so ist $b = 24\sqrt[3]{1}$. Dem reellen Werte $b_1 = 24$ entsprechen $a_1 = 96$, $a_2 = 6$, $c_1 = 6$, $c_2 = 96$.

15) $16 : 8 = 8 : 4$; $4 : 8 = 8 : 16$.

16) 12, 16, 20 *km*; die anderen Wurzeln sind unbrauchbar.

17) 862, — 268.

18) Ida. $x = 9,\ y = 4,\ z = 1$.

19) Ist a ein Schenkel, so $a_1 = \frac{5b}{6}$, $a_2 = \frac{b}{2}$; $a_3 = \frac{b}{2}$ ist hier nicht zu brauchen, da für diesen Fall das Dreieck in eine Gerade übergeht. $a_1 = \frac{5b}{6}$ gibt: $b = s\sqrt{3}$, $h = \frac{4s\sqrt{3}}{6}$, $a = \frac{5s\sqrt{3}}{6}$; $h : a : b = 4 : 5 : 6$.

§ 9. Unbestimmte Gleichungen.

1) Die Gleichung

$$5x + 7y + 4 = 56$$

soll für ganze positive Werte der Unbekannten aufgelöst werden.

2) Es sind alle zusammengehörigen ganzen positiven Zahlen, kleiner als 30, zu suchen, welche der Gleichung

$$7x - 12y = 52$$

entsprechen.

3) Der Bruch $\frac{128}{117}$ ist in die Summe zweier Brüche zu zerlegen, deren Nenner 9 und 13 sind.

4) Es sollen alle jene dreizifferigen dekadischen Zahlen angegeben werden, welche bei der Division durch 9 den Rest 0 und bei der Division durch 13 den Rest 4 geben.

5) Ein Zehnkronenstück hat einen Durchmesser von 19 *mm*, ein Zwanzigkronenstück einen von 21 *mm*; es sollen sämtliche Auflösungen der Aufgabe gegeben werden, durch Aneinanderreihung

Digitized by Google

von Zehn- und Zwanzigkronenstücken eine Länge von 1 *m* zu erhalten.

6) Aus Mangel an Eichenholz erhält ein Forstbeamter den Auftrag, jemanden, der zum unentgeltlichen Empfange (also ins Haus gestellt) von 50 m^3 Eichenklobenholz aus dem Forste berechtigt ist, durch buchenes und fichtenes Klobenholz in ganzen Kubikmetern zu entschädigen und darauf zu sehen, daß weder die Forstkasse Schaden erleidet, noch der Empfänger durch Anfuhr der Hölzer wesentlich benachteiligt wird. Wie hat der Beamte die Ausgleichung zu bewirken, wenn die Taxe für Buchenholz 6 *K*, für Eichenholz 5 *K* 78 *h* und für fichtenes Klobenholz 3 *K* 25 *h* für ein Kubikmeter beträgt?

7) Ein Silberarbeiter verwendet 800-, 750teiliges Silber und Kupfer zur Herstellung einer Legierung von 25 *kg* 650teiligem Silber. Wenn er von den einzelnen Sorten nur eine ganze Anzahl von Kilogramm verwenden will, wie hat er die Mischung zu machen?

8) *A* bezahlte eine Schuld von 768 *K* in 10 *K*, 5 *K* und 1 *K* Stücken, und zwar war die Anzahl der 5 *K* Stücke noch einmal so groß, wie die Anzahl der 10 *K* und 1 *K* Stücke zusammen genommen. Wie konnte die Zahlung geschehen sein?

9) Drei Fässer haben zusammen 3829 Liter Inhalt. Zum Füllen des ersten Fasses wurde ein 10 Liter-, zum Füllen des zweiten ein 11 Liter- und zum Füllen des dritten ein 14 Litergefäß, und zwar jedesmal voll gefüllt, verwendet. Welchen Inhalt haben diese Fässer, wenn man weiß, daß das 14 Litergefäß dreimal öfter zur Anwendung kam, als das 10 Litergefäß und daß kein Faß weniger als 800 Liter hatte?

10) Welche positiven ganzen Werte der Unbekannten genügen den Gleichungen:

$$11x - 3y - 2z = 157$$
$$5x - 11y + 8z = 87?$$

11) Welche folgenden Gleichungen:

$$12x - 16y + 11z = 57$$
$$3x + 17y - 20z = 23?$$

12) Welche positiven ganzen Werte der Unbekannten leisten zwischen 0 und 1000 den Gleichungen:

$$17x + 15y - 28z = 61$$
$$19x - 25y + 12z = 31$$

genüge?

Digitized by Google

13) Welche Zahlen zwischen 100 und 1000 geben sowohl durch 4 als durch 9 dividiert den Rest 3 und sind durch 7 teilbar?

14) 24 soll in 3 Teile derart zerlegt werden, daß der erste mit 7, der zweite mit 9 und der dritte mit 3 multipliziert und diese Produkte dann addiert 148 zur Summe ergeben. Welche positiven ganzen Werte entsprechen diesen Bedingungen?

15) Ein Händler kauft drei Gattungen Vieh, zusammen 100 Stück, jedoch nirgends weniger als 20 Stück und zahlt dafür 6400 *K*, wobei der Preis eines Stückes der ersten Gattung mit 100 *K*, der zweiten mit 40 *K* und der dritten mit 24 *K* berechnet ist. Wie viele Stücke hat er von jeder Gattung?

16) Jemand wünscht um 16 *K* 120 Zigarren zu 10, 13 und 18 *h* das Stück zu kaufen; wieviel kann er von jeder Sorte erhalten?

17) Zwischen 1000 und 4000 sind jene Zahlen zu finden, welche durch 11, 13, 19 dividiert beziehungsweise die Reste 2, 12 und 18 geben.

18) Der Bruch $\frac{674}{385}$ ist in drei Partialbrüche zu zerlegen, so daß die Summe der Zähler gleich ist der Summe der Ziffern, aus denen die drei Nenner bestehen.

19) Der Bruch $\frac{848}{1001}$ kann als die Summe dreier Brüche dargestellt werden, deren Nenner 7, 11, 13 sind und deren Zählersumme 9 beträgt; wie heißen diese drei Brüche?

20) Welches Jahr des vorigen Jahrhunderts hat die goldene Zahl 18, den Sonnenzirkel 12 und die Römer-Zinszahl 7, wenn die goldene Zahl der Rest der Division $(a + 1) : 19$, der Sonnenzirkel der Rest von $(a + 9) : 28$ und die Römer-Zinszahl der Rest von $(a + 3) : 15$ ist, wo a die Jahreszahl bedeutet?

§ 9a.

1) $x = 9, \quad y = 1; \qquad x = 2, \quad y = 6.$

2) $x = 16, \quad y = 5; \qquad x = 28, \quad y = 12.$

3) Wenn die Zähler ganze positive Zahlen sein sollen, so kann x nur 5, y nur 7 sein, die Lösung in ganzen Zahlen überhaupt ist:
$$x = 5 - 9n; \quad y = 7 + 13n.$$

4) $z = 117n - 9$, wo n die Werte 1, 2, ... 8 haben kann:
108, 225, 342, 459, 576, 693, 810, 927.

5) $x = 46, 25, 4.$
$y = 6, 25, 44.$

6) $x = 13n - 6$ Buchenholz und $y = 100 - 24n$ Fichtenholz, wo $n = 4, 3, 2, 1$; der Aufgabe entsprechen $x = 46$, $y = 4$.

Digitized by Google

7) 10 *kg* von dem 800teiligen, 11 *kg* von dem 750teiligen Silber und 4 *kg* Kupfer.

8) 10 K Stücke : 1, 12, 23, 34,
1 „ „ : 68, 48, 28, 8,
5 „ „ : 138, 120, 102, 84.

9) 1. Faß : 840, 950, 1060, 1170,
2. „ : 1771, 1507, 1243, 979,
3. „ : 1218, 1372, 1526, 1680.

10) $x = 16 + 23n$; $y = 3 + 49n$, $z = 5 + 53n$.

11) $x = 9 + 19n$; $y = 8 + 39n$, $z = 7 + 36n$.

12) $x = 5 + 260n$; $y = 4 + 368n$, $z = 3 + 355n$,
wo n die Werte 0, 1, 2 haben kann:
$x = 5$, 265, 525
$y = 4$, 372, 740
$z = 3$, 358, 713.

13) $z = 147 + 252n$, wo n : 0, 1, 2, 3 sein kann, daher
147, 399, 651, 903.

14)

x	16	13	10	7	4	1
y	2	4	6	8	10	12
z	6	7	8	9	10	11.

15) $x = 48$, $y = 22$, $z = 30$.

16) $x = 5n$, $y = 112 - 8n$, $z = 3n + 8$,
wo n die Werte 1, 2 ... 13 annehmen kann.

17) 1234; 3951.

18) $\frac{674}{385} = \frac{2}{5} + \frac{5}{7} + \frac{7}{11}$.

19) $\frac{848}{1001} = \frac{1}{7} + \frac{6}{11} + \frac{2}{13}$.

20) 1879.

§ 10. Arithmetische Progressionen.

1) In einer arithmetischen Reihe mit positiven Gliedern und der Differenz $^1/_2$ beträgt die Summe der n ersten Glieder der Reihe 81; wird hiezu die Summe der nächsten vier Glieder addiert, so erhält man 124. Wie groß ist n und das Anfangsglied der Reihe?

2) Die konstante Differenz d, das letzte Glied z und die Summe s einer arithmetischen Progression ist gegeben. Es soll das Anfangsglied und die Anzahl der Glieder gefunden werden.
$d = 5$, $z = 212$, $s = 4599$.

3) Die Summe der 26 ersten Glieder beträgt 728, wie groß ist die Differenz und das letzte Glied, wenn das fünfte 11 ist? Das wievielte Glied der Reihe ist 43?

Digitized by Google

4) In der Reihe 2, 5, 8, 11, ... sollen zwischen das erste und zweite Glied so viele neue Glieder eingeschaltet werden, daß die Summe der eingeschalteten Glieder nur um 1 kleiner ist als die Summe der zwanzig ersten Glieder der Hauptreihe. Wie viele Glieder müssen eingeschaltet werden, und wie groß ist die Differenz der eingeschalteten Reihe?

In der Form von Gleichungen.

5) Die Summe dreier in arithmetischer Progression stehender Zahlen ist 21; die Summe der ersten und zweiten verhält sich zur Summe der zweiten und dritten Zahl wie 3 : 4; welche Zahlen sind es?

6) Die Summe aus dem zweiten, vierten, achten und zehnten Gliede ist — 12, die Summe aus dem dritten, fünften und dreizehnten Gliede vermindert um das siebente Glied ist — 7; wie groß ist das erste Glied und die Differenz der Reihe, und welches Glied beträgt den zehnten Teil der Summe aller vorhergehenden Glieder?

7) Die Summe von drei Zahlen, welche eine arithmetische Reihe bilden, ist 36; die Summe ihrer Quadratzahlen ist 482; welche Zahlen sind es?

8) Die Summe des vierten und sechsten Gliedes einer arithmetischen Progression ist 28, das Produkt aus dem dritten und zehnten Gliede 232; wie heißt das erste Glied und die Differenz?

9) Wie viele Glieder der arithmetischen Reihe, von welcher das dritte und siebente Glied zusammen 46 betragen und sich das zweite Glied zum sechsten wie 2 : 7 verhält, hat man zu nehmen, um 1575 zu erhalten?

10) Das erste und vierte Glied einer arithmetischen Progression haben zur Summe s, das zweite und dritte zum Produkte p; wie groß ist die Summe S der ersten fünf Glieder dieser Progression? (Allgemein aufzulösen, dann auszuwerten für $s = 16$, $p = 15$.)

11) In einer arithmetischen Progression ist die Summe aus dem dritten und siebenten Gliede 18 und das Quadrat des sechsten Gliedes 121; wie groß ist die Summe der ersten zehn Glieder?

12$_a$) Das mittlere Glied einer aus fünf Gliedern bestehenden arithmetischen Reihe ist x, die Summe aller ist 10, ihr Produkt 1440. Wie heißen die fünf Glieder?

12$_b$) Das Produkt aus dem ersten, dritten, fünften und siebenten Glied ist 105, die Summe aus dem ersten und siebenten Glied 8; wie lautet die arithmetische Reihe?

Digitized by Google

13) Von einer arithmetischen Reihe mit 14 Gliedern ist das Produkt des ersten und letzten Gliedes 276, das Produkt der beiden mittleren Glieder aber 1326. Wie heißt das erste Glied und die Differenz dieser Reihe?

14) In einer achtgliedrigen Reihe ist die Summe der letzten vier Glieder doppelt so groß als die Summe der ersten vier Glieder und das Produkt aus dem ersten und dritten Gliede um 10 größer als das fünffache siebente Glied; wie lautet die Reihe?

15) Acht Zahlen bilden eine arithmetische Reihe, die Summe der beiden mittleren Glieder beträgt 41 und das Produkt aus dem ersten und letzten Gliede 114. Wie heißen die Zahlen? Zwischen das erste und zweite Glied dieser Reihe sind fünf Glieder zu interpolieren, wie heißen dieselben?

16) Das Produkt des vierten und elften Gliedes einer arithmetischen Reihe ist $p = 18^1/_2$, das sechste Glied ist 6; wie lautet die Reihe und wie groß ist die Summe von 53 Gliedern derjenigen Reihe, welche aus der gegebenen durch Interpolation von je neun Gliedern entsteht?

---

17) In mehreren Fächern lagen zusammen 1368 *K* und die Einlagen standen zueinander in einer arithmetischen Progression. Im siebenten und zwölften Fache zusammen war die Summe von 204 *K* und im zweiten und elften Fache zusammen 228 *K*; wie viele Fächer hatten Geldeinlagen? wie viele Kronen lagen im ersten und wie viele im letzten Fache?

18) Eine Zahl wird mit drei Ziffern geschrieben, welche in arithmetischer Progression stehen. Dividiert man die Zahl durch ihre Ziffersumme, so erhält man 26 zum Quotienten, addiert man 396 zu der Zahl, so erscheinen dieselben Ziffern in umgekehrter Ordnung, wie heißt die Zahl?

19) Ein Jugendfreund übergab einem Lehrer eine gewisse Summe Geldes, um sie unter seine 25 armen Schüler auf folgende Art zu verteilen: der Lehrer soll eine schriftliche Ausarbeitung machen lassen, die Schüler nach der Qualität ihrer Arbeit klassifizieren und dem ersten das meiste geben, dem zweiten etwas weniger, dem dritten um ebensoviel weniger usw. Auf diese Art erhält der dritte und vierzehnte zusammen 32 *K*, der siebente und letzte zusammen 20 *K*. Wieviel erhielt jeder der vier Schüler und wieviel erhielten alle 25 zusammen?

20) Zwei Orte *A* und *B* sind 870 *km* voneinander entfernt; jemand geht von *A* aus und legt am ersten Tage 80 *km* zurück, am

Digitized by Google

zweiten 75, am dritten 70 usw. Ein anderer geht von B aus drei Tage später dem ersten entgegen und macht am ersten Tage 40, am zweiten 46, am dritten 52 *km* usw. Wo und wann begegnen sich die beiden?

21) In einem Strahle, AX, bewegen sich zwei Körper, M, N, beide von A ausgehend. Der Körper M legt in der ersten Sekunde 11 *m* und in jeder folgenden 1 *m* weniger zurück; N beginnt seine Bewegung um 3 Sekunden später wie M und legt in der ersten Sekunde 10 *m* und in jeder folgenden 1 *m* mehr zurück, muß also in einem Punkte B den Körper M einholen. Man berechne die Strecke AB.

22) Ein Reisender legte 64 *km* zurück, und zwar den letzten Tag 9 *km*; wie lange war er unterwegs, und wie viele Kilometer legte er den ersten Tag zurück, wenn er jeden folgenden $^2/_3$ *km* weiter reiste als den nächst vorhergehenden Tag?

23) Wie groß ist die Tiefe eines Brunnens, wenn man einen Stein, den man in einem bestimmten Augenblick hineinfallen läßt, nach $4{\cdot}5$ ($6{\cdot}5$) Sekunden auffallen hört, und wenn man annimmt, daß der Schall in jeder Sekunde einen Raum von 333 *m* ($332{\cdot}8$ *m*) zurücklegt? ($g = 9{\cdot}808$ *m*, der Luftwiderstand bleibt unberücksichtigt.)

24) Zwei Orte P und Q sind 342 *km* voneinander entfernt; A geht von P aus und legt in den aufeinander folgenden Tagen 40, 36, 32.. *km* zurück, B geht von Q aus, und zwar um zwei Tage später dem A entgegen und macht in den aufeinander folgenden Tagen 33, 38, 43.. *km*. Wann und wo treffen sich A und B?

25) Zwei Körper A und B bewegen sich von zwei Punkten, deren Entfernung d ist, in entgegengesetzter Richtung gleichzeitig aufeinander zu. Wann und wo treffen sie sich, wenn die Bewegung des Körpers A gleichförmig beschleunigt, jene des Körpers B gleichförmig verzögert ist? $d = 1200$ *m*, A habe die Anfangsgeschwindigkeit $c = 20$ *m* und die Acceleration $g = 10$ *m* per Sekunde. B habe die Anfangsgeschwindigkeit $c' = 90$ *m* und per Sekunde die Verzögerung $g' = 8$ *m*.

§ 10a.

1) $n_1 = 27$, $n_2 = 12$; $a_1 = -\frac{7}{2}$, $a_2 = 4$.
Der Aufgabe entspricht $n_2 = 12$ und $a_2 = 4$.

2) $n = \frac{(2s + d) \pm \sqrt{(2s + d)^2 - 8dS}}{2d}$; $a = \frac{d \mp \sqrt{(2s + d)^2 - 8dS}}{2}$

$n = 42$, $a = 7$. Der andere Wert von n ist unbrauchbar, da n nur eine ganze Zahl sein kann.

Digitized by Google

3) $d = 2,\ a = 3;\ s = 53;\ n = 21.$

4) $S_{20} = 610$, daher ist die Summe der einzuschaltenden Glieder 609 und mit den beiden Gliedern 2 und 5 zusammen 616.
$n_1 = 174;\ d_1 = \frac{3}{175}$; die Reihe ist:
2) $2\frac{3}{175},\ 2\frac{6}{175},\ \ldots\ 4\frac{172}{175},$ (5.

5) 5, 7, 9.

6) $a = -\frac{1}{2},\ d = -\frac{1}{2}$; das 21. Glied.

7) 7, 12, 17; 17, 12, 7.

8) $d_1 = 3,\ d_2 = \frac{6}{5};\ a_1 = 2,\ a_2 = \frac{46}{5}.$

9) $d = 5,\ a = 3;\ n = 25.$

10) $d = \pm\sqrt{s^2 - 4p};\ a = \frac{s \mp 3\sqrt{s^2 - 4p}}{2};\ S_5 = \frac{5}{2}[s \pm \sqrt{s^2 - 4p}].$
$d = \pm 14;\ a_1 = -13;\ a_2 = 29;\ S_5 = 75,\ S'_5 = 5.$

11) $d_1 = 2;\ d_2 = -20;\ a_1 = 1,\ a_2 = 89;\ S_{10} = 100,\ S'_{10} = -10.$

12a) $x = 2.$
$d = \pm 4,\ d = \pm i\sqrt{11}$, daher:

-6	-2	2	6	10
10	6	2	-2	-6
$2 \mp 2i\sqrt{11}$	$2 \mp i\sqrt{11}$	2	$2 \pm i\sqrt{11}$	$2 \pm 2i\sqrt{11}.$

12b) $a_{1,2} = 4 \mp \sqrt{151};\ a_{3,4} = 4 \mp 3;$
$d_{1,2} = \pm\frac{1}{3}\sqrt{151};\ d_{3,4} = \pm 1.$

13) $a_1 = 4,\ a_2 = -69,\ a_3 = 69,\ a_4 = -4$
$d_1 = 5,\ d_2 = 5,\ d_3 = -5,\ d_4 = -5.$

14) 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38
$-\frac{5}{9},\ -\frac{7}{9},\ -1,\ -\frac{11}{9},\ -\frac{13}{9},\ -\frac{15}{9},\ -\frac{17}{9},\ -\frac{19}{9}.$

15) $a_1 = 38,\ a_2 = 3;\ d_1 = -5,\ d_2 = 5$
38) $37\frac{1}{6},\ 36\frac{2}{6}\ \ldots$ (33 oder
3) $3\frac{5}{6},\ 4\frac{4}{6}\ \ldots$ (8.

16) $d_1 = \frac{5}{2},\ d_2 = -\frac{7}{10};\ a_1 = -6\frac{1}{2},\ a_2 = 9\frac{1}{2}.$
$\delta_1 = \frac{1}{4},\ S_{53}^{1} = 0;\ \delta_2 = -\frac{7}{100},\ S_{53}^{2} = 407{\cdot}04.$

17) $n = 12$; 136, 92. $n = 57$ ist unbrauchbar, da dieser Wert negative Einlagen ergibt.

18) 468.

19) $d = -\frac{4}{5};\ a = 22;\ S_{25} = 310\ K.$
$20^2/_5,\ 17^1/_5,\ 11^3/_5,\ 2^4/_5\ K.$

Digitized by Google

20) Nach 9 Tagen, der erste macht 540 *km*, der zweite 330 *km*.
21) 60 *m*.
22) $a = \frac{5}{8}$; $n = 12$.
23) 87·988 *m*; $a = \frac{g}{2}$, $d = g$, 175·025 *m*.
24) 6 Tage nach dem Abgange des *A* und 180 *km* von *P* entfernt.
25) Nach 10 Sekunden, *A* hat 700 *m* zurückgelegt.

§ 11. Geometrische Progressionen.

1) Von einer geometrischen Progression kennt man das erste Glied a, den Quotienten q und die Summe S, wie groß ist die Anzahl der Glieder und wie groß das letzte Glied dieser Reihe? Allgemein und speziell für $a = 1$, $q = \frac{3}{2}$, $S = 13\frac{3}{16}$.
2) Wenn von einer geometrischen Progression mit dem Quotienten $\frac{1}{2}$ und dem letzten Gliede $\frac{3}{8}$ die Summe aller Glieder $\frac{1533}{8}$ beträgt, wie groß ist dann das erste Glied und die Anzahl der Glieder dieser Reihe? (Allgemein und speziell durchzuführen.)
3) Wie groß ist die Summe der unendlichen Reihe:
$$\frac{a}{b} - \left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{a}{b}\right)^5 - \left(\frac{a}{b}\right)^7 + \left(\frac{a}{b}\right)^9 - \left(\frac{a}{b}\right)^{11} + \ldots$$
für $a < b$? Wie groß ist die Summe der vier ersten Glieder?
4) Das erste Glied einer geometrischen Reihe heißt $\frac{a^2}{b}(1 + x - x^2 - x^3)$, das fünfte Glied $\frac{b^3(1-x)}{a^2(1+x)^2}$; wie heißt der Quotient, wie heißen die übrigen Glieder und wie groß ist die Summe dieser fünfgliedrigen Reihe?
5) Zwischen das erste und zweite Glied der Reihe $\frac{5}{32}$, $\frac{5}{2}$, 40, ... sollen so viele Glieder eingeschaltet werden, daß die Summe derselben $2^3/_{16}$ beträgt; wie groß ist ihre Anzahl und wie heißen sie?
6) In einem gleichschenkligen Dreieck mit der Basis $2a$ und dem Basiswinkel α sind in der Richtung der Basishöhe einander berührende Kreise eingeschrieben; wie groß ist die Fläche sämtlicher eingeschriebener Kreise?

In der Form von Gleichungen.

7) Drei Zahlen bilden eine geometrische Progression, ihre Summe ist 13 und das Produkt des ersten und dritten Gliedes 9. Welche Zahlen sind es?

Digitized by Google

8) Die Zahl 155 ist in drei Zahlen so zu zerlegen, daß sie eine geometrische Progression bilden, deren drittes Glied das erste um 120 übertrifft; dann ist zwischen je zwei Gliedern der Reihe ein neues zu setzen, so daß die neue Reihe ebenfalls eine geometrische Progression ist.

9) Eine Zahl wird mit drei Ziffern geschrieben, welche eine geometrische Progression bilden. Die Summe der ersten und dritten Ziffer ist $2^1/_2$ mal so groß als die mittlere; kehrt man die Zahl um, so beträgt sie um 297 weniger als anfangs; welche Zahl ist es?

10) In einer geometrischen Reihe verhält sich die Differenz des vierten und zweiten Gliedes zur Differenz des zweiten und ersten Gliedes wie 6 : 1; die Summe der drei ersten Glieder ist 63. Wie heißt das erste Glied und der Quotient der Reihe?

11) In einer geometrischen Progression von vier Gliedern beträgt die Summe des ersten und letzten Gliedes 4097 und die Summe der mittleren Glieder 272; wie lautet die Reihe?

12) Drei Zahlen stehen in geometrischer Progression; ihre Summe ist 28, das Produkt aus dem mittleren Gliede und der Summe der beiden äußern ist 160. Welche Zahlen sind es?

13) Das erste und dritte Glied einer geometrischen Reihe geben als Produkt 100, das zweite und dritte Glied aber als Summe 50; bei welcher Reihe findet dies statt?

14) In einer geometrischen Progression ist die Summe aus dem ersten und letzten Gliede — 2920, das Produkt aus diesen zwei Gliedern ist 11664 und die Summe aus allen ihren Gliedern ist — 4372. Wie groß ist der Quotient, das erste und letzte Glied und die Anzahl der Glieder dieser Reihe?

15) Fünf Zahlen bilden eine geometrische Progression, die Summe der geraden Glieder ist 272, die Summe der ungeraden ist 1092. Wie heißen die einzelnen Glieder dieser Reihe?

16) In einer geometrischen Progression von acht Gliedern ist die Summe der ungeraden Glieder gleich $1\frac{21}{64}$, die Summe der geraden gleich $\frac{85}{128}$. Wie groß ist der Quotient, wie groß das erste Glied?

17) Vier Zahlen stehen in geometrischer Progression, die Summe der ersten und vierten verhält sich zur Summe der zweiten und dritten wie 3 : 2, die zweite Zahl ist um 72 kleiner als die vierte. Wie heißen die vier Zahlen?

18) In einer geometrischen Progression von vier Gliedern ist die Summe der beiden äußern Glieder gleich 1085, die Summe der beiden innern Glieder 210; diese Progression ist zu suchen.

Digitized by Google

19) Die Summe der ersten sechs Glieder einer geometrischen Progression ist 189 und die Summe der folgenden sechs Glieder 12096; es ist die Progression selbst anzugeben.

20) In einer sechsgliedrigen geometrischen Progression ist die Summe aus dem ersten und vierten Gliede um $\frac{91}{128}$ größer als aus dem zweiten und fünften Gliede und die Summe aus dem dritten und sechsten Gliede beträgt $1\frac{307}{512}$. Wie heißt diese Progression?

21) In einer geometrischen Progression ist das fünfte Glied gerade so groß wie der Quotient; das zweite und dritte Glied zusammen betragen $1\frac{1}{9}$, wie heißt die Reihe, wie ihr zehntes Glied und wie die Summe der zehn ersten Glieder?

22) In zwei geometrischen Progressionen ist das erste Glied gleich, die Summe der zweiten Glieder beträgt 10, das dritte Glied der ersten Reihe ist um 10 kleiner als das dritte Glied der zweiten Reihe, das vierte Glied der ersten Reihe ist um 38 kleiner als das vierte Glied der zweiten Reihe. Wie heißen die beiden Reihen?

23) In einer geometrischen Progression, in welcher die Summe der drei ersten Glieder $7\frac{1}{8}$ beträgt und die zwei ersten Glieder zusammen um $4\frac{1}{8}$ größer sind als das dritte Glied, sollen zwischen das erste und zweite Glied zwei neue Glieder eingeschaltet werden; wie heißt die Reihe und wie die eingeschalteten Glieder?

24) Eine bestimmte Summe soll unter fünf Personen derart verteilt werden, daß die Anteile eine geometrische Progression bilden, in welcher die Summe des zweiten und dritten Gliedes 8400 *K*, die Summe des ersten und dritten Gliedes aber 10.000 *K* beträgt. Wieviel erhält jede der fünf Personen und wieviel alle zusammen?

Arithmetische und geometrische Progressionen.

25) Das erste Glied einer arithmetischen und einer geometrischen Reihe ist $a = 4$, die zweiten Glieder beider Reihen stimmen ebenfalls überein, das dritte Glied der geometrischen Reihe ist das $n = \frac{25}{16}$fache des dritten Gliedes der arithmetischen Reihe. Es sind beide Reihen aufzustellen.

26) Es gibt drei Zahlen, die eine arithmetische, und drei andere, die eine geometrische Reihe bilden. Addiert man zu den Gliedern der arithmetischen die mit demselben Zeiger versehenen Glieder der geometrischen Reihe, so erhält man der Reihe nach die Summen 27, 39, 87. Die Summe der drei Glieder der arith-

Digitized by Google

metischen Reihe ist $s = 36$; wie heißt die arithmetische und wie die geometrische Reihe?

27) Eine achtgliedrige arithmetische und eine viergliedrige geometrische Progression beginnen mit 1 und stimmen in ihren letzten Gliedern überein. Die Summe der geometrischen Progression übersteigt das letzte Glied der arithmetischen um 21. Wie lauten die beiden Progressionen?

28$_a$) Vermehrt man in einer arithmetischen Progression von drei Gliedern das erste Glied um 8, so wird daraus eine geometrische Progression; die Summe der geometrischen Progression ist 26. Wie heißen die Progressionen?

28$_b$) Eine geometrische Reihe besteht aus drei Gliedern und hat zur Summe 31; vermehrt man das mittlere Glied um 8, so entsteht eine arithmetische Reihe. Wie heißen die Reihen?

29) Von einer arithmetischen Progression beträgt die Summe der zehn ersten Glieder 155. Das Anfangsglied dieser arithmetischen Progression ist zugleich Quotient einer geometrischen, von welcher die Summe der zwei ersten Glieder 9 ist und deren Anfangsglied mit der Differenz der arithmetischen Progression übereinstimmt. Welche Progressionen erfüllen diese Bedingungen?

30) In einer arithmetischen Reihe ist das erste Glied um 1 größer als das erste Glied einer geometrischen Reihe; das zweite Glied ist ebenfalls um 1 größer als das zweite Glied der geometrischen Reihe, die dritten Glieder sind gleich groß, das vierte Glied der geometrischen Reihe ist aber um 3 größer als das der arithmetischen Reihe. Wie heißen beide Reihen?

31) Das erste Glied einer arithmetischen Reihe ist um 1 größer als das erste Glied einer geometrischen Reihe, das dritte Glied der geometrischen Reihe ist aber um 1 größer als das der arithmetischen Reihe und die Summe der drei ersten Glieder der arithmetischen Reihe ist um 1 größer als die der drei ersten Glieder der geometrischen Reihe. Wie heißen die beiden Reihen, wenn der Exponent in beiden gleich ist, wie heißt das zehnte Glied, wie die Summe der zehn ersten Glieder?

32) In drei geometrischen Reihen bilden die ersten Glieder selbst eine geometrische Reihe mit dem Quotienten 2, die Quotienten der drei Reihen bilden eine arithmetische Reihe mit der Differenz 1; die Summe der zweiten Glieder der drei geometrischen Reihen beträgt 24 und die Summe der drei ersten Glieder der dritten geometrischen Reihe beträgt 84. Wie heißen die drei Reihen?

Digitized by Google

33) Wie groß ist die Summe der zusammengesetzten Reihe:
$$1 + 2\left(\frac{x}{y}\right) + 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{y}\right)^3 + \ldots + n\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}?$$

34) Wie groß ist die Summe der zusammengesetzten Reihe:
$a + (a+b)\,x + (a+2b)\,x^2 + (a+3b)\,x^3 + \ldots + (a+mb)\,x^m$?

§ 11a.

1) $n = \frac{\log[S(q-1)+a] - \log a}{\log q}$; $s = \frac{S(q-1)+a}{q}$.
$n = 5$, $s = \frac{81}{16}$.

2) $a = qs - S(q-1)$; $n = \frac{\log s - \log[qs - S(q-1)]}{\log q} + 1$.
$a = 96$, $n = 9$.

3) $S = \frac{ab}{a^2+b^2}$; $S_4 = \frac{a}{b^7}(b^4 + a^4)(b^2 - a^2)$.

4) $q = \frac{b}{a(1+x)}$; die Reihe ist:
$\frac{a^2(1+x)(1-x^2)}{b}$, $a(1-x^2)$, $b(1-x)$, $\frac{b^2(1-x)}{a(1+x)}$, $\frac{b^3(1-x)}{a^2(1+x)^2}$,
$S = \frac{(1-x)[b^5 - a^5(1+x)^5]}{a^2 b(1+x)^2[b - a(1+x)]}$.

5) Drei Glieder und sie sind $\frac{5}{16}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{4}$. **6)** $\frac{\pi a^2}{4}\operatorname{tg}\alpha \sin\alpha$.

7) $a_1 = 1$, $a_2 = 9$; $a_3 = 8 + \sqrt{55}$; $a_4 = 8 - \sqrt{55}$.
$q_1 = 3$, $q_2 = \frac{1}{3}$; $q_3 = \frac{-8+\sqrt{55}}{3}$; $q_4 = -\frac{8+\sqrt{55}}{3}$. Daher sind die Zahlen 1, 3, 9; 9, 3, 1; $8 \pm \sqrt{55}$, -3, $8 \mp \sqrt{55}$.

8) 5, 25, 125; $\frac{245}{3}$, $-\frac{385}{3}$, $\frac{605}{3}$
5, $\pm 5\sqrt{5}$, 25, $\pm 25\sqrt{5}$, 125
$\frac{245}{3}$, $\pm i\frac{245}{3}\sqrt{\frac{11}{7}}$, $-\frac{385}{3}$, $\mp i\frac{385}{3}\sqrt{\frac{11}{7}}$, $\frac{605}{3}$.

9) 421, -124.

10) $a_1 = 9$, $q_1 = 2$; $a_2 = 9$, $q_2 = -3$.

11) $a_1 = 4096$, $a_2 = 1$; $q_1 = \frac{1}{16}$, $q_2 = 16$.
4096, 256, 16, 1; 1, 16, 256, 4096.

12) $a_1 = 16$, $a_2 = 4$; $q_1 = \frac{1}{2}$, $q_2 = 2$; $a_{3,4} = 4(1 \mp \sqrt{-24})$;
$q_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{-24}}{5}$; 16, 8, 4; 4, 8, 16;
$4[1 \mp \sqrt{-24}]$, 20, $4[1 \pm \sqrt{-24}]$.

13) $\frac{5}{2}$, 10, 40, 160, 640 ...; $\frac{5}{3}$, -10, 60, -360, 2160...

14) $a_1 = -2916$; $a_2 = -4$; $z_1 = -4$, $z_2 = -2916$;
$q_1 = \frac{1}{3}$; $q_2 = 3$; $n = 7$.

Digitized by Google

15) 4, 16, 64, 256, 1024; 1024, 256, 64, 16, 4.
$a_{3,4} = 1124 \mp 16\sqrt{-285}$, $q_{3,4} = \frac{1}{17}(-2 \pm \sqrt{-285})$.

16) $a = 1$, $q = \frac{1}{2}$.

17) 12, 24, 48, 96; — 192, — 96, — 48, — 24.

18) $a_1 = 5$, $a_2 = 1080$; $q_1 = 6$, $q_2 = \frac{1}{6}$.
5, 30, 180, 1080; 1080, 180, 30, 5.

19) Die Auflösung führt auf $q^6 = 64$ oder $(q^3 + 8)(q^3 - 8) = 0$.
Die reellen Wurzeln sind $q_1 = 2$, $q_2 = -2$ und diesen beiden Wurzeln entsprechen die Reihen:
3, 6, 12, 24, 48, 96.
— 9, + 18, — 36, + 72, — 144, + 288.

20) $q_1 = \frac{3}{4}$, $q_2 = -3$; $a_1 = 2$, $a_2 = -\frac{7}{1024}$.

21) $q_1 = \frac{3}{2}$, $q_2 = -\frac{3}{5}$; $a_1 = \frac{8}{27}$, $a_2 = -\frac{125}{27}$.
Das zehnte Glied ist $\frac{729}{64}$, $\frac{729}{15625}$.
$S_1 = \frac{58025}{1728}$, $S_2 = -\frac{1213322}{421875}$.

22) $a(p + q) = 10$; $a(p^2 - q^2) = 10$; $a(p^3 - q^3) = 38$
sind aufzulösen.
$q_1 = 2$, $q_2 = -\frac{7}{15}$; $p_1 = 3$, $p_2 = \frac{8}{15}$; $a_1 = 2$, $a_2 = 150$.

23) $q_1 = \frac{2}{3}$, $q_2 = -\frac{2}{5}$; $a_1 = \frac{27}{8}$, $a_2 = 9\frac{3}{8}$.
Die Reihen sind daher:
$\frac{27}{8}, \frac{27}{8}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}, \frac{27}{8}\sqrt[3]{\frac{4}{9}}, \frac{9}{4}$; $\frac{75}{8}, \frac{75}{8}\sqrt[3]{-\frac{2}{5}}, \frac{75}{8}\sqrt[3]{\frac{4}{25}}, -\frac{15}{4}$.

24) 6400 *K*, 4800 *K*, 3600 *K*, 2700 *K*, 2025 *K*, zusammen 19525 *K*.

25) arithm. 4, 10, 16, ...; 4, $\frac{5}{2}$, 1 ...
geom. 4, 10, 25 ...; 4, $\frac{5}{2}$, $\frac{25}{16}$ ...

26) arithm. 18, 12, 6; — 54, 12, 78;
geom. 9, 27, 81 81, 27, 9.

27) $q_1 = 4$, $q_2 = -5$; $d_1 = 9$, $d_2 = -18$.
1) 1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64
1 4 16 64.
2) 1, — 17, — 35, — 53, — 71, — 89, — 107, — 125.
1, — 5, 25, — 125.

28a) Die geometrischen Progressionen sind: 2, 6, 18; 18, 6, 2.
Die arithmetischen: — 6, 6, 18; 10, 6, 2.

28b) geom. 1, 5, 25; 25, 5, 1.
arithm. 1, 13, 25; 25, 13, 1.

Digitized by Google

29) $a_1 = 12\frac{1}{2}$, $a_2 = 2$; $d_1 = \frac{3}{5}$, $d_2 = 3$,
somit 1) arithm. $12\frac{1}{2}$, $12\frac{1}{2} + \frac{3}{5}$, $12\frac{1}{2} + \frac{6}{5}$, ...
geom. $\frac{2}{5}$, $\frac{25}{5}$, $\frac{625}{6}$, ...
2) arithm. 2, 5, 8, 11, ...
geom. 3, 6, 12, 24. ...

30) 2, 3, 4, 5, 6, ...
1, 2, 4, 8, 16. ...

31) 1) arithm. 3, 5, 7, 9, 11, ... $Z_{10} = 21$, $S_{10} = 120$
geom. 2, 4, 8, 16, 32 ... $Z_{10} = 1024$, $S_{10} = 2046$
2) arithm. $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, ... $Z_{10} = -\frac{15}{2}$, $S_{10} = -30$
geom. $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, ... $Z_{10} = -\frac{1}{2}$, $S_{10} = 0$.

32) 1) 1, 2, 4, 8, 16, ...
2, 6, 18, 54, 162, ...
4, 16, 64, 256, 1024, ...
2) $\frac{192}{31}$, $-\frac{168}{31}$, $+\frac{147}{31}$, $-\frac{1029}{248}$, ...
$\frac{384}{31}$, $\frac{48}{31}$, $\frac{6}{31}$, $\frac{3}{124}$, ...
$\frac{768}{31}$, $\frac{864}{31}$, $\frac{972}{31}$, $\frac{2187}{62}$, ...

33) $S = \frac{n x^{n+1} - (n+1) x^n y + y^{n+1}}{y^{n-1}(x-y)^2}$.

34) $S = a \frac{x^{m+1} - 1}{x - 1} + b x \frac{m x^{m+1} - (m+1) x^m + 1}{(x-1)^2}$.

§ 12. Zinseszinsen- und Rentenrechnung.

A. Zinseszinsen.

a) Anfangs- oder Endkapital.

1) Ein Vater will seinem fünfjährigen Sohne nach vollendetem 18. Lebensjahre einen Betrag von 2000 *K* versichern. Welche Summe muß er einer Sparkasse, die Einlagen mit $3^1/_2\%$ jährlich verzinst, zahlen, damit dieselbe in der verlangten Zeit seinem Sohne das Kapital verabfolgt?

2) Eine Sparkasse entlehnt von jemandem 10.000 *K* zu 3% und leiht dieses Kapital wieder zu 6% aus. Wie hoch beläuft sich der Gewinn der Sparkasse zu Ende des zehnten Jahres, wenn ganzjährige Zinseszinsen gerechnet werden?

3) *A* hat an *B* die Summe von 4875 *K* nach 5 Jahren ohne Interessen zu zahlen, wieviel kann *A* für diese Summe bar bezahlen, wenn jährlich 5% Diskont gerechnet werden, und zwar:
a) bei einfachen Zinsen, *b)* bei Zins vom Zinse?

Digitized by Google

4) Ein Kapital, das 10 Jahre zu 5% ausstand, dann 7000 K verlor und die 30 folgenden Jahre zu $4^1/_2$% ausgeliehen war, ist durch Zinseszins auf 70.000 K angewachsen. Wie groß war es ursprünglich?

b) Prozente.

5) Die Bevölkerung einer Stadt, welche 32.500 Einwohner zählte, hat in 24 Jahren um 33.566 Seelen zugenommen. Wieviel betrug der jährliche Zuwachs auf 100 Seelen?

6) Wenn die Bevölkerung einer Stadt innerhalb 9 Jahren von 208.700 auf 318.500 Seelen zugenommen hat, wie stark wird dieselbe 15 Jahre nach diesen 9 Jahren sein, wenn sie in gleichem Maße zunimmt?

7) Zu wieviel Prozent müßte ein Kapital auf Zinseszins angelegt werden, wenn es nach $2n$ Jahren so hoch anwachsen sollte, daß ihm nur noch der Betrag des Anfangskapitales fehlt, um das $r$fache des Wertes zu erreichen, den es bereits nach n Jahren erlangt hatte?
Beispiel: $n = 10$, $r = 3$.

c) Die Zeit.

8) Jemand vermachte testamentarisch 18.500 K zur Erbauung einer Schule. Wenn die Kosten dem Voranschlage gemäß 56.478 K betragen werden, wie lange muß die testierte Summe auf Zinseszins anliegen, wenn die Bank 5% rechnet?

9) Wann wird ein Kapital, zu 6% Zinseszins angelegt, verdoppelt bei ganzjähriger und wann bei halbjähriger Verzinsung, wenn bei letzterer der relative Zinsfuß angewendet wird?

10) Eine Stadt, welche gegenwärtig 79.000 Einwohner zählt, hatte deren vor 20 Jahren nur 63.114; nach wieviel Jahren, von jetzt an, wird dieselbe, wenn sich die Verhältnisse nicht ändern, 200.000 Einwohner zählen?

11_a) Zwei Kapitalien von 8000 K und 12.000 K werden zu gleicher Zeit, das erste mit 5%, das zweite mit 3% auf Zinseszinsen gegeben. Wieviel Jahre müssen verfließen, bis die beiden Kapitalien mitsamt ihren Zinsen einander gleich werden?

11_b) In wieviel Jahren wird ein Kapital von 1637 K 42 h zu $6^1/_2$% Zinseszins ebenso groß als 1592 K 16 h zu $7^1/_2$% Zinseszins?

12) Drei Brüder, von denen jetzt der älteste $n_1 = 18$ Jahre, der mittlere $n_2 = 16$, der jüngste $n_3 = 13$ Jahre zählt, haben jeder

Digitized by Google

$m = 10$ Jahre alt, ein Geschenk von $c = 1500$ K erhalten, das zu $P = 4\%$ auf Zinseszins verwaltet wird. Sie sollen ein Geschäft gründen, sobald alle drei zusammen $c_1 = 10.000$ K besitzen. Wann wird das Geschäft eröffnet werden können?

B. Mit Terminalzahlungen.

a) Endkapital und Anfangskapital.

13) Jemand zahlt durch 24 Jahre, jedesmal zu Beginn das Jahres, 40 K in eine Anstalt ein, welche die eingezahlten Beträge mit 7% jährlich verinteressiert. Zu welcher Höhe sind diese Beträge bei Zinseszinsen am Ende des 24. Jahres angewachsen?

14) Jemand hat 6 Jahre nacheinander zu Beginn des Jahres 285 K zu bezahlen; er bleibt sie aber bis zu Anfang des sechsten Jahres schuldig; wieviel beträgt nun zu dieser Zeit die Schuld, wenn 4% Zinseszinsen gerechnet werden?

15) Wie groß ist die Schuld, welche, zu $3^1/_2\%$ Zinseszins verzinst, durch eine am Ende eines jeden Jahres fällige Abzahlung von 1550 K in 13 Jahren getilgt wird?

16) Eine Stadt will bei einer Bank ein Anlehen mit der Verpflichtung aufnehmen, dasselbe durch einen am Ende eines jeden Jahres zahlbaren Betrag von 10.000 K binnen 20 Jahren zu tilgen; welche Summe wird die Bank der Stadt bei 4% Zinseszinsen leihen können?

17) Jemand legt am 1. Jänner und 1. Juli eines jeden Jahres einen Betrag von 120 K an. Wie groß ist der Wert der gesamten Einlage nach 15 Jahren vom Tage der ersten Einlage an gerechnet, wenn der halbjährigen Verzinsung der relative Zinsfuß von 5% jährlich zugrunde gelegt ist? Und wie groß ist der Unterschied, wenn der konforme Zinsfuß angewendet wird?

18) Es legt jemand den Betrag von 500 K in die Sparkasse und gibt dazu am Ende des ersten und jedes folgenden Jahres einen weiteren Betrag von 125 K 48 h. Wie groß ist der ganze Betrag nach zehn Jahren zu $4^1/_2\%$ Zinseszinsen?

19) Ein Kapital von 2536 K steht zu 5% aus und wird außer den Zinsen zu Ende des ersten und jedes folgenden Jahres noch um 100 K vermehrt. Wie groß ist die Summe nach 10 Jahren?

20) Ist eine Unternehmung vorteilhaft, welche eine Vorauslage von 12.480 K sogleich und während der nachfolgenden 6 Jahre, zu Anfang eines jeden, einen Zuschuß von 2400 K erfordert, wenn

Digitized by Google

die Interessen zu 5% gerechnet werden und das vollendete Werk erst mit Anfang des siebenten Jahres einen reinen jährlichen Nutzen von 1500 *K* erwarten läßt?

21) Ein Gutsbesitzer beteiligte sich beim Bau einer Eisenbahn mit 8 Aktien à 350 *K* und bezahlte am Ende des ersten und weiterer drei Jahre 700 *K*. Nach sechs Jahren war der Bau beendet und der Staat zog nun die ganze Bahn gegen Rückerstattung der Herstellungskosten an sich. Wieviel hat dieser Gutsbesitzer verloren, wenn man eine $4^1/_2$prozentige Verinteressierung annimmt?

22) Jemand versichert sein Leben am Anfange des *n*ten Jahres mit *a K* und zahlt dafür am Anfange eines jeden Jahres eine Prämie von *r K*. Wenn er nun bald nach Beginn des *m*ten Jahres stirbt, was gewinnt oder verliert die Bank, die Zinsen zu *p*% gerechnet?
1. Beispiel: $n = 35$, $m = 75$, $r = 100$, $a = 5000$, $p = 4$.
2. „ $n = 38$, $m = 65$, $r = 180$, $a = 6000$, $p = 3^1/_2$.

b) Die jährliche Zahlung wird gesucht.

23) Eine Schuld von 800 *K* wird in zehn gleichen Jahresraten, am Ende des Jahres zahlbar, abgetragen. Wie groß ist eine solche Rate, wenn 5% Zinseszinsen gerechnet werden?

24) Wie groß ist eine Rate, wenn statt 800, 10 und 5, die Größen: 2506 *K* 44 *h*, $4^1/_2$%, 8 Jahre gesetzt werden?

25) Jemand, der sogleich eine Summe von *A K* zu erlegen hätte, verpflichtet sich, selbe in *n* gleichen dekursiven Jahresraten samt *p*% Zinseszins abzutragen. Wie groß wird eine solche Rate sein? Speziell f. $A = 35780$ *K*, $n = 15$, $p = 4^1/_2$%.

26a) Eine $3^1/_2$prozentige Anleihe von einer Million Kronen soll in 25 Jahren getilgt sein. Wieviel muß am Ende eines jeden Jahres zur Zinszahlung und Tilgung bestimmt werden, und wieviel beträgt die jährliche Tilgungsrate in Prozenten des ursprünglichen Kapitals?

26b) Wie groß ist die Tilgungsrate, wenn statt 1,000.000 *K*, 25 Jahre, $3^1/_2$% die Größen *A K*, 25 Jahre, 6% gesetzt werden?

27) Jemand will einer Person nach *n* Jahren bei einer Versicherungsanstalt eine Summe von *b K* versichern. Welche jährliche antizipative Einlage muß er bis zu jener Zeit an die Anstalt machen, die Kapitalisierung ganzjährig zu *p*% gerechnet?
Speziell f. 1. $b = 3.000$, $n = 15$, $p = 4$.
2. $b = 16.000$, $n = 20$, $p = 6$.

Digitized by Google

28) Ein Kapital von 16.582 *K* 70 *h*, welches sogleich bezahlt werden sollte, wird in zehn dekursiven Jahresraten getilgt; wie groß ist jede Rate, wenn 5·5% gerechnet werden?

29) Ein Darlehen von 200.000 *K* soll in 20 gleichen Jahresraten, jede beim Jahresschlusse fällig, zurückgezahlt werden. Wie groß ist die jährliche Tilgungsquote, wenn $4^1/_2$% Zinsen gerechnet werden?

30) Nach 20 Jahren hat jemand eine Summe von 8590 *K* ohne Interessen zu erheben; er will aber lieber mit Ende eines jeden Jahres durch 20 Jahre hindurch einen gleichen Betrag beziehen, so daß die obige Summe getilgt ist; wieviel kann man ihm geben, wenn $4^1/_2$% Zinseszinsen gerechnet werden?

31) Jemand ist verpflichtet, 10.000 *K* mit 5% Zinseszinses nach 10 Jahren zu bezahlen. Er will diese Schuld in 10 gleichen Raten abtragen. Welche Höhe erreicht eine solche Rate, wenn sie am Schlusse eines jeden Jahres bezahlt und die Kapitalisation am Ende eines jeden Jahres vorgenommen wird?

32) Es hinterläßt jemand seinem 14jährigen Sohne ein Vermögen von 3000 *K*, welches 5% trägt. Wieviel darf der Vormund auf die Erziehung des Knaben jährlich höchstens verwenden, wenn das Vermögen bis zu dessen vollendetem 24. Jahre reichen soll: *a*) wenn der Erziehungsbeitrag zu Anfang, *b*) zu Ende eines jeden Jahres weggenommen wird?

33) Jemand hat 18.770 *K* zu 4% auf Zinseszinsen liegen und nimmt am Schlusse eines jeden Jahres eine gewisse Summe heraus; wie groß ist diese Summe, wenn nach Verlauf von 12 Jahren das Kapital aufgezehrt ist?

34) *A* braucht eine Summe von 86.400 *K*. Er kann das Anlehen nur dadurch realisieren, daß er für je 96 *K*, die er erhält, 100 *K* verschreibt. Welche Summe muß er demnach für die 86.400 *K* verschreiben, und wie groß ist die Annuität, wenn die Schuld mit 5% verzinst und in 10 Jahren, immer am Schlusse des Jahres, getilgt werden soll?

35) Bei der Geburt eines Knaben werden 6000 *K* mit der Bestimmung angelegt, daß zu Beginn eines jeden der neun ersten Lebensjahre desselben ein bestimmter Betrag und durch die folgenden neun Jahre die doppelte Summe als Erziehungsbeitrag ausgefolgt werde. Wie groß können diese Beträge sein, wenn für das angelegte Kapital eine 5prozentige, für die rückbezahlten Summen eine 6prozentige Verzinsung angenommen wird und am Schlusse des 18. Jahres die angelegten 6000 *K* noch vorhanden sein sollen?

Digitized by Google

c) Wie groß ist die Endsumme, wenn der Anfangsbetrag eine bestimmte Zeit jährlich um einen gewissen Betrag vermindert wird?

36) Jemand hat ein Kapital von 30.000 *K* zu 4% ausstehen. Er nimmt am Ende eines jeden Jahres von den erhaltenen Zinsen 800 *K* zu seinem Unterhalte weg und schlägt den Rest zum Kapitale; wie groß wird dieses nach 15 Jahren sein?

37$_a$) Ein Vater hinterläßt seinem achtjährigen Sohne 10.000 *K*, welche auf Zinseszinsen zu $4^3/_4$% angelegt werden. Wenn von diesem Kapitale für den Lebensunterhalt und die Ausbildung jährlich im vorhinein 600 *K* erhoben werden, welchen Betrag hat der Sohn, wenn er volle 25 Jahre alt geworden ist, noch zu erheben?

37$_b$) Welchen Betrag erhält er noch mit vollendetem 24. Lebensjahre, wenn die 600 *K* immer am Ende eines Jahres behoben werden?

38) Ein Vater hinterläßt seinen 7 Kindern ein Vermögen von 40.000 *K*, welches zu $5^1/_2$% anliegt; davon beziehen die Kinder am Ende eines jeden Jahres 2000 *K*. Wieviel erhält jedes der 7 Kinder nach 10 Jahren, wenn das gesamte Vermögen zu gleichen Teilen unter sie verteilt wird?

39) Von einem Walde, dessen jährlicher Zuwachs $2^1/_2$% beträgt, ist der gegenwärtige Bestand 51.619 m^3; wie groß ist der Bestand nach 20 Jahren, wenn am Ende eines jeden Jahres 1873 m^3 gefällt werden?

d) Die Zeit.

40) In wieviel Jahren wird eine Schuld von *A K* durch eine jedesmal am Ende des Jahres erfolgende Abschlagszahlung von *a K* getilgt sein, wenn der Berechnung *p*% zugrunde gelegt werden? Beispiel: $A = 10.000\ K$; $a = 2373\ K\ 93\ h$; $p = 6$.

41) Nach wieviel Jahren wird eine zu $P = 5$% gemachte Anleihe von $C = 11$ Millionen Kronen getilgt sein, wenn jährlich am Schlusse des Jahres $a = 715.566\ K$ zur Bezahlung der Zinsen und zur Tilgung eines Teiles der Anleihe verwendet werden?

42) Eine Stadt macht ein Anlehen von 80.000 *K* und verwendet am Schlusse eines jeden Jahres zur Zahlung der fünfprozentigen Zinsen und zur Abtragung der Schuld 6419 *K* 46 *h*; nach wieviel Jahren wird die ganze Schuld getilgt sein?

43) Jemand hat sein ganzes Vermögen von 100.000 *K* zu 5% auf Zinsen angelegt, ist aber nicht imstande, mit den Zinsen des Kapitals seinen Aufwand zu bestreiten, weil er dazu jährlich

Digitized by Google

6000 *K* braucht. Er ist daher genötigt, am Ende eines jeden Jahres soviel vom Kapital wegzunehmen, daß dies samt den erhaltenen Zinsen 6000 *K* beträgt. Nach wieviel Jahren wird dieser Mann, wenn er so fortwirtschaftet, sein ganzes Kapital aufgezehrt haben?

44) Durch wie viele am Schlusse eines jeden Jahres fällige Annuitäten von 768 *K* 70 *h* wird ein Anlehen von 10.000 *K* zu $4^1/_2\%$ Zinseszinsen amortisiert?

45) Auf einem Gute lastet eine Hypothek von 20.000 *K* mit der Bedingung der Rückzahlung in halbjährigen dekursiven Raten von 777 *K* 33 *h* und der Verzinsung von 3% halbjährlich, und zwar Zins vom Zinse. Nach wieviel Jahren ist *a*) die halbe Schuld, *b*) die ganze Schuld getilgt?

46) Wie lange kann man ein auf eine Schuld von 20.000 *K* verpfändetes Grundstück benützen, wenn dasselbe jährlich 1500 *K* reinen Gewinn gibt und die Zinsen zu 5% gerechnet werden? (Dabei soll vorausgesetzt werden, daß über den Reinertrag des Grundstückes immer erst zu Ende des Jahres verfügt und dieser somit erst zu Beginn des nächsten Jahres fruchtbringend angelegt werden kann.)

47) Ein Wald ist auf 30.500 m^3 abgeschätzt; seine jährliche Vermehrung rechnet man zu 2%; wie stark wird er in 11 Jahren sein, wenn am Schlusse eines jeden Jahres 1400 m^3 geschlagen werden, und in wieviel Jahren würde so der Wald ganz abgeholzt sein?

48) Zur Gründung einer Fabrik bildet sich eine Aktiengesellschaft mit einem Gesamtbetrage von 150.000 *K*. Das Geschäft wirft einen Reinertrag von 13.491 *K* 16 *h* ab. *a*) Nach wieviel Jahren sehen sich die Aktionäre im Besitze ihres Anlagekapitales; *b*) wann ist die Summe der Bezüge um 150.000 *K* größer als das Anlagekapital, wenn angenommen wird, daß die Aktionäre ihr Geld zu 4% hätten anlegen können, und daß der Reinertrag immer am Ende des Jahres fällig ist und daher mit Ende des Jahres fruchtbringend angelegt werden kann?

49) *M* und *N* fangen gleichzeitig zu sparen an; *M* hat ein Kapital von $A = 2433 \cdot 25$ *K* und schlägt die Zinsen am Ende eines jeden Jahres dazu; *N* besitzt kein Vermögen, legt jedoch von seinem Einkommen am Schlusse eines jeden Jahres $a = 300$ *K* auf Zinseszinsen an; nach welcher Zeit werden bei 4% Verzinsung *M* und *N* gleichviel besitzen?

Digitized by Google

50) Auf ein zu 5% Zinseszins ausstehendes Kapital von 30.000 K werden am Ende eines jeden Jahres 3500 K abgetragen, in wieviel Jahren wird dadurch das Kapital getilgt sein?

51) Nach wieviel Jahren erreicht ein Kapital C, zu welchem am Ende des ersten und der folgenden Jahre aK zugezahlt werden, bei p% Zinseszins den Betrag SK?
Beispiel: $C = 5760\,K$; $a = 575\,K$; $p = 4$%; $S = 24.825\,K$.

52) Eine Gemeinde beschloß, zu ihrem Schulfonde, welcher 25.000 K beträgt, und zu $5^1/_2$% auf Zinseszinsen angelegt wurde, so lange am Schlusse eines jeden Jahres einen Zinsfuß von 800 K zu leisten, bis der Fonds die Höhe von 50.000 K erreicht hat. Wie lange wird sie diesen Betrag leisten müssen?

53) Im Staate Ohio lebten im Jahre 1860 ungefähr eine Million Menschen; es wanderten jährlich 2500 ein. Wenn nun von 36 Menschen durchschnittlich einer starb und auf 28 jährlich eine Geburt kam, wann hatte dieser Staat $1^1/_2$ Million Einwohner? (Hier sei vorausgesetzt, daß die Zunahme durch Geburten und die Abnahme durch Sterbefälle bei den Einwandernden im Einwanderungsjahre außer Rechnung bleiben.)

54) Jemand versichert sein Leben auf 5000 K und hat halbjährig pränumerando 62 K zu zahlen; wenn nun die Gesellschaft jährlich 4% Zinseszinsen und für das halbe Jahr den aliquoten Teil rechnet, wie groß ist nach ihren Tabellen noch seine mutmaßliche Lebensdauer?

55) Jemand versichert sich für den Todesfall auf 5000 K und hat dafür jährlich pränumerando den Betrag von $389{\cdot}3\,K$ zu bezahlen. Wie hoch hat die Versicherungsanstalt die wahrscheinliche Lebensdauer des Betreffenden angenommen, wenn eine $4^1/_2$prozentige Verinteressierung zugrunde gelegt wird?

e) Die Prozente.

56) Eine Kreditanstalt verzinst Gelder, die sie selbst anleiht, mit $p = 5^1/_2$%. Wie viele Prozente (P) muß sie von ihren Schuldnern nehmen, damit diese ihre Schuld durch bloße Zinszahlung am Ende eines Jahres in $n = 35$ Jahren bei ihr tilgen können?

57) Ein 40jähriger Mann will, so lange er lebt, zu Anfang eines jeden Jahres eine gewisse Prämie, $r\,K$, zahlen, um nach seinem Tode den Erben ein Kapital von 1000 K zu sichern. Wie viel sollte die jährliche Prämie betragen, wenn man 5% rechnet, und wenn nach der Süßmilch-Baumannschen Sterblichkeitstafel die mittlere Lebensdauer eines 40jährigen Mannes 23 Jahre beträgt? Wenn

Digitized by Google

nun die Versicherungsanstalt 27 *K* 50 *h* als jährliche Prämie fordert, um obigen Betrag auf den Todesfall einer 40jährigen Person zu versichern, wie viele Prozente der Prämie werden auf Verwaltungskosten gerechnet und welchen Wert hätten diese nach 23 Jahren?

C. Rentenrechnung.

58) Für wie viel kann jemand die Verpflichtung, einem andern durch n Jahre am Ende eines jeden Jahres a *K* zu zahlen, abkaufen, wenn die Zinsen zu $p\%$ gerechnet werden?
1. Beispiel: $a = 350$; $n = 14$; $p = 6\%$.
2. „ : $a = 200$; $n = 20$; $p = 6\%$.

59) Jemand ist verpflichtet, durch zehn Jahre am Ende eines jeden Jahres 200 *K* zu bezahlen. Wie hoch beläuft sich die augenblickliche Ablösungssumme, wenn die Verzinsung ganzjährig zu 5% geschieht, und zwar Zins vom Zinse?

60) *A* hat eine Realität gegen die Verpflichtung gekauft, n Jahre hindurch, jedesmal zu Beginn des Jahres, einen Betrag von a *K* zu bezahlen. Durch welche Summe könnte *A* unmittelbar vor Erlag der ersten Rate diese Verpflichtung abkaufen, wenn der Berechnung $p\%$ zugrunde gelegt werden und die erste Rate gleich bei Abschluß des Kaufes zu erlegen ist?
Beispiel: $a = 1200$ *K*; $n = 18$, $p = 5\%$.

61) *A* hat einen Acker im Werte von 10.000 *K*; er möchte diesen verkaufen, da er Gelegenheit hat, sein Geld zu 7% anzulegen. Es findet sich ein Käufer, der diese 10.000 *K* bar erlegen will, und ein anderer, der in zwölf aufeinander folgenden Jahren, immer zu Anfang des Jahres, eine Rente von 1250 *K* zahlen will. Wenn die erste Rente gleich bei Abschluß des Geschäftes fällig wäre, welches Angebot ist für *A* besser?

62) Die Gemeinde *A* hat die Verpflichtung der jedesmaligen Herstellung einer Brücke auf dem Eigentume der Gemeinde *B*. Der Neubau erfolgt durchschnittlich nach je 38 Jahren und erfordert einen Kostenaufwand von 2000 *K*. Die Gemeinde *A* wünscht nun diese Last entweder *a*) zu gleichen Teilen am Ende eines jeden Jahres abzutragen oder *b*) dieselbe bar abzulösen; wieviel beträgt im ersten Falle die jährliche Zahlung oder im zweiten Falle die bare Ablösungssumme, wenn eben erst der letzte Neubau vollendet wurde und ein Zinsfuß von 4% zugrunde gelegt wird?

Digitized by Google

63) Jemand ist verpflichtet, durch acht Jahre immer zu Ende des Jahres 547 K ohne Interessen zu zahlen; er möchte die ganze Schuld in zwei gleichen Raten tilgen, die erste augenblicklich und die zweite zu Beginn des fünften Jahres; wie groß ist eine solche Rate, wenn 6% Zinseszinsen gerechnet werden?

64) Wie groß ist der Wert einer jährlichen, zu Anfang des Jahres beziehbaren Rente von 450 K am Ende des zwölften Jahres, wenn die Rente diese zwölf Jahre hindurch nicht behoben, sondern zu 4% kapitalisiert wird?

65) Jemand steht im Bezugsrechte einer zehnjährigen antizipativen Rente von jährlich 2000 K, behebt aber wegen momentanen Geldmangels die erste Rate in der Höhe von 6000 K; wie groß ist jede der folgenden Raten, wenn der empfangene Vorschuß gleichmäßig auf dieselben verteilt und eine 5prozentige Verinteressierung angenommen wird?

66) Jemand verkauft eine Realität um 100.000 K gegen eine am Anfange eines jeden Jahres zu zahlende Rente von 6437 K 50 h. Wie viele Jahre wird der Verkäufer die Rente beziehen, wenn der Zinsfuß mit $5^1/_2$% vereinbart wurde und die erste Rente gleich bei Abschluß des Geschäftes bezahlt wird?

67) Wie viele Jahre hindurch kann jemand eine Rente von $1001^1/_2$ K beziehen, wenn er bar 10.000 K zahlt, die Zinsen mit 4% berechnet werden und der erste Rentenbezug ein Jahr nach der Einzahlung beginnt?

68) Jemand will sich für 8000 K eine erst nach acht Jahren beginnende vorschußweise Rente von jährlich 600 K sichern, wie lange kann ihm diese bewilligt werden, wenn seine Einlage mit 4% kapitalisiert wird?

69) Wie lange muß das Kapital von 1250 K Zins auf Zins bei $2^1/_4$% halbjähriger Kapitalisation anliegen, um die jährliche vorschußweise Rente von 900 K bei jährlichen $4^1/_2$% auf 15 Jahre zu decken?

70) Jemand ist zum Bezuge einer Rente von 1000 K auf zehn Jahre berechtigt. Was könnte er für diese Rente ein Jahr vor dem Beginne des Rentenbezuges bekommen, und was, wenn er die Rente nicht bezieht, ein Jahr nach dem Ende, wenn der Berechnung $4^1/_2$% zugrunde gelegt werden?

71) Eine Rente von 600 K ist 30 Jahre lang nachschußweise zu beziehen. Zu welcher Zeit kann man dieselbe mit $600 \times 30 = 18.000$ K auf einmal beziehen, wenn die Zinseszinsen zu 5% gerechnet werden?

Digitized by Google

72) Jemand zahlt einer Rentenbank a K zu Anfang eines jeden Jahres durch n Jahre hindurch und will dann nach weiteren m Jahren, also $(m + 1)$ Jahre nach dem Momente der letzten Einzahlung, eine vorschußweise, r Jahre hindurch dauernde Rente von R K beziehen; welche Beziehung besteht zwischen den Größen a, n, m, r und R, wenn p% Zinseszinsen gerechnet werden?

73) Jemand will durch 15 Jahre am Anfange eines jeden Jahres eine bestimmte Summe zahlen, damit nach Verlauf dieser Zeit er selbst oder ein anderer zehnmal, und zwar das erstemal ein Jahr nach der letzten Einzahlung eine Jahresrente von 1000 K genießen könne; wie groß ist die jährlich zu zahlende Summe, wenn 5% Zinsen gerechnet werden?

74) Wie groß ist die zu zahlende Summe, wenn statt 15, 10, 1000, 5 — die Größen 21 Jahre, 8 Jahre, 600 K, $4^1/_2$% gesetzt werden?

75) Jemand zahlt von seinem 29. bis zu seinem 40. Lebensjahre (somit zwölfmal) jedesmal zu Anfang des Jahres eine gewisse Summe in eine Rentenanstalt, um sich eine durch 20 aufeinander folgende Jahre fällige Rente von 2000 K zu sichern. Wie groß ist die jährlich einzuzahlende Summe, wenn der erste Rentenbezug mit Ende des 40. Lebensjahres beginnt und $3^1/_2$% Zinseszinsen gerechnet werden?

76) Wieviel muß jemand durch 30 Jahre jährlich auf Zinsen legen, damit er nach dieser Zeit durch 20 Jahre eine Rente von 1500 K genießen kann? (5% gerechnet.)

77) A soll nach vollendetem 20. Jahre durch vier Jahre hintereinander eine jährliche vorschußweise Rente von 300 K aus einer Rentenkasse erhalten. Wie groß muß die 20mal zu leistende jährliche Einzahlung an die Rentenbank: von der Geburt des A bis zum Eintritte in das 20. Lebensjahr, sein, wenn die Rentenbank vereinnahmte Gelder mit 3% und verausgabte mit 5% verrechnet?

78) Jemand will durch 16 Jahre, immer am Anfang eines jeden Jahres, 180 K in eine Rentenkasse einzahlen, um sich oder seinen Erben eine 15 Jahre nach der letzten Einzahlung, also mit dem 31. Jahr beginnende und durch 16 Jahre dauernde, am Anfange eines jedes Jahres fällige Rente zu sichern. Wie groß wird diese sein können, wenn die Rentenanstalt die Beträge mit $4^1/_2$% jährlich kapitalisiert?

79) Jemand legt zu Beginn des 31. Lebensjahres 3000 K in einer Bank an und gibt zu Beginn des 32. und der weiter folgenden

Digitized by Google

neun Jahre 300 K auf Zinseszinsen dazu, um sich von seinem vollendeten 45. Jahre an eine durch 25 Jahre dauernde vorschußweise Rente zu sichern. Wie groß wird diese sein, wenn die Bank ihren Berechnungen $4^1/_2\%$ zugrunde legt?

80) Ein 30jähriger Mann ist im Besitze von 10.000 K, die zu $4^1/_2\%$ Zinseszinsen angelegt sind. Er möchte zu diesem Kapitale durch 20 aufeinander folgende Jahre, immer am Schlusse des Jahres, eine bestimmte Summe von $r\,K$ dazulegen, damit er durch weitere 20 Jahre eine Rente von jährlich 3000 K beheben kann. Wie groß ist r, wenn der erste Rentenbezug gerade ein Jahr nach dem Aufhören der Einzahlungen beginnen soll?

81) Jemand will bei einer Rentenanstalt, welche 4% Zinsen anrechnet, die jährliche Rente von 1600 K auf 20 Jahre versichern. Wenn nun die erste Rente nach 8 Jahren fällig werden soll, so fragt es sich: *a*) Welchen Betrag hätte er alsogleich ohne irgend welche Nachzahlung zu entrichten? *b*) Welchen Betrag hätte er alsogleich zu erlegen, wenn er jährlich 400 K Prämie nachzahlen wollte? (also die erste Prämie ein Jahr nach Zahlung des Betrages fällig ist, somit im ganzen siebenmal bezahlt wird.) *c*) Wenn er aber 9000 K sogleich erlegt, wieviel hat er am Anfange des zweiten und jedes folgenden Jahres zu erlegen (also im ganzen siebenmal), um mit Beginn des neunten Jahres zum Bezuge obiger Rente berechtigt zu sein?

82) Eine jährliche Rente von 500 K auf 25 Jahre soll in eine größere, die nur 15 Jahre hindurch auszubezahlen ist, verwandelt werden, unter Voraussetzung von 4% und gleichzeitigem Beginn der Auszahlung beider Renten.

83) Jemand besitzt eine Rente von 800 K, die noch durch 25 Jahre zu beziehen ist; welche Rente kann er dafür bekommen, wenn sie nur durch 18 Jahre bezogen werden soll unter Voraussetzung von $4^1/_2\%$ und gleichzeitigem Beginn der Auszahlung beider Renten?

84) Jemand ist berechtigt, eine durch 20 Jahre andauernde vorschußweise Rente von 600 K zu beziehen. Wenn er den Genuß derselben durch volle acht Jahre verschiebt, somit die Rente das erstemal zu Anfang des neunten Jahres bezieht, wie groß wird diese nur 12 Jahre andauernde Rente bei $4^1/_2\%$ Zinseszinsen sein?

85) Eine Rente von 1200 K, welche 12 Jahre lang am Ende eines jeden Jahres fällig ist, soll in eine andere umgewandelt werden, die 15 Jahre lang am Ende eines jeden Halbjahres zahlbar ist.

Digitized by Google

Wieviel beträgt diese Rente, wenn die Zinseszinsen für das ganze Jahr mit 4% und für das halbe Jahr mit 2% berechnet werden?

86) Jemand hat 15 Jahre eine Rente von 500 K zu genießen, wie lange muß er ihrem Genusse entsagen, um dann 12 Jahre hindurch eine Rente von 700 K haben zu können, wenn die Zinseszinsen mit $3^1/_2$% berechnet werden?

87) *a*) Eine durch 20 Jahre zu beziehende Rente von 800 K wird in eine andere von 1000 K umgewandelt; wie lange wird der Bezug letzterer dauern, wenn 4% Zinseszinsen gerechnet werden? *b*) wie lange wird der Bezug dauern, wenn statt 800 K : 1200 K gesetzt werden?

88) A will eine erst nach acht Jahren beginnende und durch 16 Jahre dauernde, jedesmal zu Beginn des Jahres fällige Rente von 1200 K mit einer anderen vertauschen, die erst nach 12 Jahren und jedesmal zu Beginn eines halben Jahres fällig ist, und zwar durch 32 aufeinander folgende halbe Jahre. Wie groß wird dieser halbjährige Rentenbezug sein, wenn die Bank für ein Jahr 4% und für ein halbes Jahr 2% rechnet?

89) A ist zum Bezuge einer Rente von 800 K, zahlbar durch 15 Jahre, jedesmal zu Beginn des Jahres, berechtigt. Ein Jahr bevor die Rente das erstemal fällig werden sollte, trifft er mit der Bank das Übereinkommen dahin, diese Rente in eine andere zu verwandeln, die erst in fünf Jahren fällig wird, dann aber jedes halbe Jahr durch 12 Jahre hindurch ausbezahlt werden soll. Wieviel wird diese Rente betragen, wenn die Bank ganzjährig 4% und halbjährig 2% rechnet?

90) M hat eine Rente von 800 K, zahlbar durch 20 Jahre, jedesmal zu Beginn eines Jahres. Als er die Rente das fünftemal bezogen hatte, kaufte er um die weitere Rente und um 8000 K ein Haus. Wie teuer war das Haus, wenn der Berechnung 5% zugrunde gelegt wurden?

91) B hat 8000 K ausgeliehen, wieviel hat er dafür nach 12 Jahren zurückzuzahlen, wenn das Kapital zu 6% ganzjährig verzinst wird und die entfallenden Interessen aber nur mit 4% jährlich fruktifiziert werden?

Die Aufgabe ist zuerst allgemein durchzuführen und dann auf den speziellen Fall anzuwenden.

92) Eine Rente, welche 20 Jahre läuft und zu Anfang eines jeden Jahres fällig ist, steigt in der arithmetischen Progression 100 K, 200 K, 300 K etc.; wie groß ist ihr Barwert, wenn 5% Zinseszinsen gerechnet werden?

Digitized by Google

93) Welches Kapital muß man bei $p\%$ Zinseszins einzahlen, wenn man n Jahre lang am Ende eines jeden Jahres eine Rente von r K beziehen will, welche sich jedes Jahr um $\alpha\%$ der am Ende des ersten Jahres bezogenen Rente vermehrt?

Beispiel: $r = 400\ K$, $\alpha = 4$, $p = 4^1/_2$, $n = 15$.

94) A legt mit vollendetem 30. Lebensjahre $a = 5000\ K$ in einer Bank an, um sich oder seinen Erben eine nach $m = 20$ Jahren beginnende, durch $n = 20$ Jahre dauernde, vorschußweise von Jahr zu Jahr um $b = 50\ K$ steigende Rente zu sichern. Wie groß wird der erste Rentenbezug sein, wenn die Bank ihren Berechnungen $p = 4\%$ zugrunde legt?
Allgemein und speziell durchzuführen.

95) Ein Kind ist gegenwärtig sechs Jahre alt, man will demselben bei erreichtem 24. Lebensjahre eine Summe von $a = 2500\ K$ sichern. Welche Einlage (Mise) hat man jetzt in eine Versicherungsanstalt zu zahlen, wenn $P = 3\%$ berechnet werden und wenn die Anzahl der von 1000 zu gleicher Zeit Geborenen, nach sechs Jahren noch Lebenden $L_6 = 567$, und derjenigen, welche das 24. Jahr erreichen, $L_{24} = 471$ ist?

96) Welche Einlage hat man für ein sechsjähriges Kind in eine Versicherungsanstalt sogleich zu machen, wenn demselben nach erreichtem 20. Lebensjahre ein Betrag von 3600 K ausbezahlt werden soll und die Versicherungsanstalt mit $3^1/_2\%$ arbeitet?

$$L_6 = 567,\ L_{20} = 491.$$

97) Welche Prämie ist jährlich pränumerando für ein vierjähriges Kind in eine Versicherungsanstalt zu entrichten, wenn demselben nach vollendetem 20. Lebensjahre die Summe von 5000 K ausbezahlt werden soll und die Anstalt mit 5% arbeitet?

98) Jemand hinterläßt sein ganzes Vermögen seinen Erben unter der Bedingung, am Ende eines jeden Jahres seinem treuen Diener eine Leibrente von 1750 K zu zahlen; für wieviel können die Erben die Verpflichtung abkaufen, wenn der Diener das 60. Lebensjahr bereits überschritten hat und 5% Zins vom Zinse gerechnet werden?

99) Eine 38jährige Person will sich eine Rente von 1000 K begründen, die ihr sogleich vom Tage der Erwerbung an am Anfange eines jeden Jahres bis an ihr Lebensende ausbezahlt werde; was beträgt dafür die Mise bei einer Versicherungsanstalt, welche 5% rechnet und die Süßmilch-Baumannsche Mortalitätstafel zugrunde legt?

Digitized by Google

Mortalitätstafel von Süßmilch-Baumann.

Alter	Zahl der Lebenden	S_n	Alter	Zahl der Lebenden	S_n	Alter	Zahl der Lebenden	S_n
0	1000	10782·28	32	427	1260·61	64	172	59·38
1	750	9782·28	33	421	1170·99	65	162	51·80
2	661	9067·99	34	415	1086·84	66	152	45·01
3	618	8468·45	35	409	1007·85	67	142	38·94
4	593	7934·59	36	402	933·70	68	132	33·54
5	579	7446·73	37	395	864·29	69	122	28·75
6	567	6993·07	38	388	799·34	70	112	24·54
7	556	6569·97	39	381	738·58	71	103	20·86
8	547	6174·83	40	374	681·75	72	94	17·64
9	539	5804·60	41	367	628·63	73	85	14·83
10	532	5457·15	42	360	578·98	74	77	12·42
11	527	5130·55	43	353	532·51	75	69	10·34
12	523	4822·42	44	346	489·28	76	62	8·56
13	519	4531·20	45	339	448·85	77	55	7·04
14	515	4255·96	46	332	411·12	78	49	5·76
15	511	3995·85	47	324	375·93	79	43	4·67
16	507	3750·05	48	316	343·22	80	37	3·76
17	503	3517·79	49	308	312·84	81	32	3·01
18	499	3298·33	50	300	284·64	82	28	2·39
19	495	3090·99	51	291	258·48	83	24	1·88
20	491	2895·10	52	282	234·31	84	20	1·46
21	486	2710·06	53	273	212·00	85	17	1·13
22	481	2535·60	54	264	191·44	86	14	0·86
23	476	2371·17	55	255	172·50	87	12	0·65
24	471	2216·20	56	246	155·07	88	10	0·48
25	466	2070·16	57	237	139·07	89	8	0·34
26	461	1932·54	58	228	124·38	90	6	0·24
27	456	1802·89	59	219	110·92	91	5	0·17
28	451	1680·75	60	210	98·61	92	4	0·11
29	445	1565·71	61	201	87·37	93	3	0·06
30	439	1457·60	62	192	77·12	94	2	0·03
31	433	1356·02	63	182	67·80	95	1	0·01

Digitized by Google

100) Jemand ist 50 Jahre alt und will sich durch ein Kapital von 3000 K eine lebenslängliche, immer am Ende des Jahres zahlbare Rente sichern. Wie hoch ist dieselbe, wenn die Anstalt nach der Mortalitätstafel von Süßmilch-Baumann vorgeht und 5% rechnet?

§ 12a[1]).

1) 1278 K 81 h (1278 K 82 h).

2) 4469 K 32 h (4469·3).

3) 3819 K 69 h (3819·68) bei Zinseszinsen;

3900 K nach der Formel $x = \frac{a}{1 + \frac{p\,T}{100}}$,

3656 K 25 h nach der Formel $y = a - \frac{a\,p\,T}{100}$

4) 15.771 K 43 h (15.771·7).

5) 3%.

6) 644.299 (644.300) Einwohner.

7) $p = 100 \sqrt[n]{\frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4}}{2}} - 100$; $p = 10{\cdot}1026\%$ (10·102).

Die negative Wurzel ist unbrauchbar, da mit ihr p negativ erhalten wird, p aber der Aufgabe gemäß positiv ist.

8) Nach der Formel: $E = A\left[1 + \frac{p}{100}\right]^n \ldots$ (α) ergibt sich $n = 22{\cdot}875$ (22·875) Jahre oder das Jahr zu 365 Tagen gerechnet: $n = 22$ Jahre und 319 Tage.

Nach der Formel:

$$E = A\left[1 + \frac{p}{100}\right]^n \left[1 + \frac{m\,p}{100\,q}\right] \ldots \ (\beta),$$

wo n die Anzahl der ganzen Verzinsungstermine und $\frac{m}{q}$ den Bruchteil eines solchen Termines bezeichnet, ergibt sich 22 Jahre 318 Tage. Da der Unterschied in den meisten Fällen so klein ist, daß er vernachlässigt werden kann, da ferner die Formel (α) die Zeit leichter als (β) und den Prozentsatz direkt bestimmen läßt, so wurde (α) den folgenden Lösungen allein zugrunde gelegt.

9) In 11·8956 Jahren bei 6% ganzjähriger und in 11·7249 Jahren bei 3% halbjähriger Kapitalisation (11·896, 11·725).

10) Nach 82·7476 (82·75) Jahren.

---

[1]) Die eingeklammerten Resultate beziehen sich auf fünfstellige Logarithmentafeln.

Digitized by Google

11) *a*) 21·083 (21·088) Jahre, *b*) nach 3 Jahren (genau 2·999).

12) Nach $\frac{\log c_1 - \log\{c\,(q^{n_1-m} + q^{n_2-m} + q^{n_3-m})\}}{\log q}$ Jahren, wo $q = 1 + \frac{p}{100}$. Nach 14·6105 Jahren von jetzt an, oder der jüngste Sohn ist dann gerade 27·61 Jahre alt.

13) 2489 *K* 96 *h* (2490). **14)** 1890 *K* 41 *h* (1890·4).

15) 15.969 *K* 25 *h* (15.968·7). **16)** 135.903 *K* 20 *h* (135.902).

17) Der relative Zinsfuß ist 1·025, der konforme 1·0246951; nach ersterem 5400 *K* 7½ *h*, nach letzterem 5372 *K* 27½ *h* (5400·04, 5372·5).

18) 2318 *K* 41 *h* (2318·40).

19) 5388 *K* 67 *h* (5388·6).

20) Die anfangs bezahlten 12.480 *K* wachsen mitsamt dem sechsmal geleisteten Zuschuß von 2400 *K* bis zu Ende des 7. Jahres auf 34.701 *K* 43 *h* an und davon sind 5%: 1735 *K* 7 *h*, somit ist das Unternehmen nicht vorteilhaft (34.701·7, 1735·08).

21) Der Verlust beträgt 1316 *K* 65 *h*.

22) Der Gewinn oder Verlust der Bank ist

$$\frac{100\,r}{p}\,[q^{m-n+1} - 1] - a;$$

Gewinn, wenn der Ausdruck positiv; Verlust, wenn der Ausdruck negativ ist.

1. Beispiel: 4982 *K* 65 *h* (4982·3) Gewinn der Bank.
2. „ 2332 *K* 31 *h* (2332) Gewinn der Bank.

23) 103 *K* 60 *h*. **24)** 380 *K* 1 *h* (380).

25) $x = \frac{A\,q^n\,(q-1)}{q^n - 1}$; 3331 *K* 61 *h* (3331·7).

26a) 60.674 *K* oder 6·0674 Prozente des ursprünglichen Kapitals.

26b) $x = 0{\cdot}0782267\ A\,K$ oder 7·82267 Prozente des Anleihekapitals (7·8227).

27) $x = \frac{b\,(q-1)}{q\,(q^n-1)}$;

1. Beispiel: 144 *K* 6 *h*; 2. Beispiel: 410⅓ *K* (410 *K* 33 *h*).

28) 2199 *K* 99 *h* (2200).

29) 15.375 *K* 23 *h* (15.375·5).

30) 273·82 *K*.

31) 1295 *K* 4½ *h* (1295·05).

32) Zu Beginn des Jahres 370 *K* 1 *h*; zu Ende des Jahres 388 *K* 51 *h*.

33) 2000 *K*.

34) Er muß 90.000 *K* verschreiben und jährlich 11.655 *K* 40 *h* (11.655) zahlen.

Digitized by Google

35) Die ersten 9 Jahre: 187 *K* 80 *h*, die andern 9 Jahre: 375 *K* 60 *h* (187·78, 375·56).

36) 38.009 *K* 44 *h* (38.009·4).

37) *a*) 6118 *K* 90 *h*. *b*) 7102 *K* 14 *h* (7102·1).

38) Beziehen die Kinder nur neunmal den Betrag, den letzten also am Ende des 9. Jahres, so entfällt auf eines 6367 *K* 87 *h*, beziehen sie ihn aber 10mal, so 6082 *K* 15 *h* (6367·8, 6082·1).

39) 36.738·4 (36.738) m^3.

40) $n = \frac{\log a - \log [a - A\,(q-1)]}{\log q}$, speziell: 5 Jahre.

41) Nach 30 Jahren.

42) Nach 20 Jahren.

43) 36 Jahre kann er vollständig 6000 *K* beziehen, das 37. Jahr aber nur den Betrag von 4371 *K* 85 *h*; denn mit Ende des 36. Jahres haben seine 100.000 *K* den Wert von 579.181 *K* 61 *h*, die 36mal bezogenen 6000 *K* aber 575.017 *K* 94 *h*, daher bleiben für das 37. Jahr 4163 *K* 67 *h* und diese wachsen bei 5% bis zum Ende des Jahres zu 4371 *K* 85 *h* an. (4166·5 *K*, 4374·8 *K*).
Die Rechnung ergibt für $n = \frac{\log 6}{\log 1{\cdot}05} = 36{\cdot}72379$ (36·723) Jahre.

44) $n = 20{\cdot}00255$ Jahre, d. h. durch 20 Annuitäten, doch beträgt die letzte um 1 *K* 93 *h* mehr als eine frühere, somit 770 *K* 63 *h*; bei fünfstelligen Logarithmen gerade 20 Jahre.

45) Nach 50 Terminen nahezu ist die ganze und nach $16^1/_2$ Terminen die halbe Schuld getilgt.

46) $n = 22{\cdot}517$ Jahre, d. h. 22 Jahre vollständig und zu Beginn des 23. Jahres ist noch eine Forderung von 747 *K* 39 *h* (748 *K*) ausständig, diese wächst bis Ende des 23. Jahres auf 784 *K* 76 *h* (785·4 *K*) an und so viel muß noch vom Reingewinne des 23. Jahres zur Tilgung der Schuld verwendet werden.

47) $n = 28{\cdot}89488$ (28·895) Jahre, d. h. 28 Jahre können jedes Jahr 1400 m^3 gefällt werden, für das 29. Jahr bleiben zu Beginn nur 1229·5437 (1230·5) m^3 und diese wachsen bis zum Ende des 29. Jahres auf 1254·135 (1255) m^3 an, somit entfällt dieser Betrag auf das 29. Jahr.
Nach 11 Jahren hat der Wald noch 20.886·7 m^3.

48) *a*) Nach 15; *b*) nach 24·3809 (24·382) Jahren.

49) $n = 10$.

50) $n = 11{\cdot}46985$ (11·47), somit sind 11 Raten vollständig zu bezahlen und die am Ende des zwölften Jahres fällige Rate beträgt 1665 *K* 74 *h* (1666 *K*).

Digitized by Google

51) $n = \frac{\log [a + S(q-1)] - \log [a + C(q-1)]}{\log q}$.

Beispiel: $n = 16 \cdot 9864$ (16·99). Bis zu Ende des 17. Jahres sind die 5760 *K* auf 11.219·907 *K* (11.219·8) angewachsen, und die bis zu Ende des 16. Jahres erfolgten 16maligen Einzahlungen von 575 *K* haben am Ende des 17. Jahres den Betrag von 13.051·09 *K* (13.050·6) erreicht, somit bleibt für die am Ende des 17. Jahres zu leistende Zahlung 554 *K* (554·6 *K*).

52) $n = 9 \cdot 15039$ (9·1506) Jahre. Die Gemeinde hat somit entweder zum Schulfonds achtmal 800 *K* und am Schlusse des 9. Jahres 1317 *K* 64 *h* (1317·7 *K*) zu zahlen, wo dann schon am Schlusse des 9. Jahres der Schulfonds die gewünschte Höhe von 50.000 *K* hat, oder sie legt zum Fonds neunmal, am Schlusse des ersten bis neunten Jahres, jedesmal 800 *K* dazu, wo dann der Schulfonds am Schlusse des zehnten Jahres, ohne daß noch ein Zuschuß geleistet wird, schon um 2203·89 (2203 *K*) mehr als 50.000 *K* beträgt.

53) $n = 40 \cdot 7642$ (40·8), somit im Jahre 1901.

54) $n = 23 \cdot 9433$ (23·945).

55) $n = 10$.

56) $P = \frac{100 q^n (q-1)}{q^n - 1}$, speziell 6·5%, genauer 6·49749% (6·4975).

57) Die jährliche Versicherungsprämie sollte 22 *K* 99 *h* betragen, somit betragen die Verwaltungskosten 16·4% der Prämie und diese haben nach 23 Jahren den Wert von 196 *K* 19 *h*.

58) $S = \frac{a(q^n - 1)}{q^n (q-1)}$.

1. Beispiel: 3253 *K* 21 *h* (3253·3).
2. „ 2293 *K* 98½ *h* (2294).

59) 1544 *K* 36 *h*.

60) $S = \frac{a(q^n - 1)}{q^{n-1}(q-1)}$, speziell 14.728 *K* 88 *h* (14.728·9).

61) Das Angebot, 1250 *K* durch zwölf Jahre zu zahlen, ist um 623 *K* 32 *h* besser als das andere Angebot.

62) Die Ablösungssumme beträgt: $\frac{a}{q^{38}} + \frac{a}{q^{2 \cdot 38}} + \frac{a}{q^{3 \cdot 38}} + \ldots$

$= \frac{a}{q^{38} - 1}$, speziell 581 *K* 60 *h* (581·63).

Die jährliche Ablösungssumme ist 23 *K* 26·4 *h*.

63) Eine Rate beträgt 1895 *K* 41 *h* (1895·3).

64) 7032 *K* 8 *h* (7031·9).

65) 1437·2 *K*.

Digitized by Google

66) $n = 31{\cdot}002$ (31·002) Jahre. Die letzte Rente ist zu Beginn des 31. Jahres fällig und ist um 7 *K* 50 *h* (13 *K*) größer als die andern Renten.

67) $n = 13$ Jahre ($n = 12{\cdot}99893$; 13·001).

68) $n = 30{\cdot}8534$ (30·853 Jahre), somit 31mal, aber das letztemal nur mit dem Teilbetrage von 513 *K* 51 *h* (514 *K*); denn bis zu Ende des 38. Jahres wachsen die 8000 *K* auf 35.510 *K* 51 *h* (35.509 *K*) an. Die bis zu Ende des 38. Jahres bezogenen Renten von 600 *K* stellen einen Wert von 34.997 *K* (34.995 *K*) dar, somit verbleibt für die zu Beginn des 39. Jahres auszuzahlende Rente der Betrag von 513 *K* 51 *h* (514 *K*).

69) $n = 46{\cdot}9525$ (46·96).

70) 7912·71 *K* (7912·7 *K*), 12.841·17 *K* (12.841 *K*).

71) 12·7049 (12·704) Jahre oder kurz 12·7 Jahre von dem Augenblicke an, wo die erste Rente fällig ist.

72) Leistung des *A* nach Ablauf der *n* Jahre: $aq^n + aq^{n-1} + \ldots + aq = aq\frac{q^n-1}{q-1}$, dieser Betrag wächst in weiteren *m* Jahren zu $aq^{m+1}\frac{q^n-1}{q-1}$ an. Die Leistung der Bank zu Beginn des $(n+m+1)$ten Jahres ist

$$R + \frac{R}{q} + \frac{R}{q^2} + \ldots + \frac{R}{q^{r-1}} = R\frac{q^r-1}{q^{r-1}(q-1)},$$

somit muß

$$aq^{m+1}\frac{q^n-1}{q-1} = R\frac{q^r-1}{q^{r-1}(q-1)} \text{ sein.}$$

$$a = \frac{R(q^r-1)}{q^{m+r}(q^n-1)}; \quad R = \frac{a.q^{m+r}(q^n-1)}{q^r-1}$$

$$m = \log\left\{\frac{R(q^r-1)}{aq^r(q^n-1)}\right\} : \log q$$

$$n = \log\left\{\frac{R(q^r-1)}{aq^{m+r}} + 1\right\} : \log q$$

$$r = \log\left\{\frac{R}{R - aq^m(q^n-1)}\right\} : \log q.$$

73) 357 *K* 84 *h* (357·86).

74) 117·145 *K* (117·15).

75) 1946 *K* 64 *h* (1946·6).

76) 281 *K* 36 *h*.

77) 42·76 *K*.

Da der größere Prozentsatz durch die Verwaltungskosten etc. bedingt ist, die Verwaltung und Garantie der Rente einen Teil der Gegenleistung des Institutes bilden und erst mit dem Beginne des 24. Jahres — also mit der Auszahlung der letzten 300 *K* —

Digitized by Google

ihren Abschluß finden, so dürfen auch die Beträge auf keinen andern als diesen Abschlußmoment bezogen werden.

78) 674 *K* 16 *h* (674·15).

79) Leistung des *A* zu Beginn des 46. Jahres:

$$3000q^{15} + 300.q^{14} + \ldots + 300.q^5 = 3000.q^{15} + 300q^5 \frac{q^{10}-1}{q-1},$$

Leistung der Bank zu dieser Zeit

$$a + \frac{a}{q} + \ldots + \frac{a}{q^{24}} = a \frac{q^{25}-1}{q^{24}(q-1)}$$

und beide Leistungen müssen gleich sein.

671·17 *K*.

80) 475 *K* 17 *h* (475 *K* 16 *h*).

81) *a*) 16.524 *K* 7 *h*; *b*) 14.123 *K* 25 *h*; *c*) 1253 *K* 58 *h* (16.524, 14.123·3, 1253·6).

82) Der Barwert beider Renten muß gleich sein, daher:

$a \frac{q^{25}-1}{q^{24}(q-1)} = b \frac{q^{15}-1}{q^{14}(q-1)}$, daraus $b = 702{\cdot}53$ *K* (702·52).

83) 975 *K* 54 *h* (975·55).

84) 1217·2047 *K* (1217·2).

85) 502 *K* 85 *h*.

86) 4·6787 (4·679) Jahre; ob die Rente vorschußweise oder nachschußweise ist.

87) *a*) 14·5519 Jahre. *b*) 26·9378 Jahre.

Das einemal kann die Rente von 1000 *K* 14mal voll und das 15.mal, und zwar bei einer vorschußweisen Rente zu Beginn des 15. Jahres, mit 556 *K* 74 *h* (557 *K*) behoben werden. Das anderemal kann die Rente von 1000 *K* 26mal voll und zu Beginn des 27. Jahres mit 938 *K* 90 *h* (939 *K*) behoben werden.

In dieser und der folgenden Aufgabe ist der Barwert der Renten für den Moment berechnet, wann die zweite Rente das erstemal fällig ist.

88) 710 *K* 67 *h*.

89) 560 *K* 94 *h*.

90) 16.303 *K* 74 *h* (16.303·7).

91) $K + \frac{Kp}{100}$, $K + \frac{Kp}{100} + \frac{Kp}{100}\left(1 + \frac{p_1}{100}\right)$,

$K + \frac{Kp}{100} + \frac{Kp}{100}\left(1 + \frac{p_1}{100}\right) + \frac{Kp}{100}\left(1 + \frac{p_1}{100}\right)^2$ etc.;

daher nach n Jahren:

$$S_n = K + \frac{Kp}{100} + \frac{Kp}{100}\left(1+\frac{p_1}{100}\right) + \frac{Kp}{100}\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^2 + \ldots + \frac{Kp}{100}\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^{n-1}$$

setzt man $1 + \frac{p_1}{100} = q_1$, so

$$S_n = K + \frac{Kp}{100}[1 + q_1 + q_1{}^2 + \ldots + q_1{}^{n-1}] = K + \frac{Kp}{100}\frac{q_1{}^n - 1}{q_1 - 1}$$

Digitized by Google

und da $100\,(q_1 - 1) = p_1$ ist, so

$$S_n = K\left[1 + \frac{p}{p_1}\,(q_1{}^n - 1)\right].$$

Speziell: 15.212 *K* 39 *h* (15.212·2).

92) Der Barwert ist $100 + \frac{200}{q} + \frac{300}{q^2} + \ldots + \frac{2000}{q^{19}} =$

$100 + \frac{100+100}{q} + \frac{100+2.100}{q^2} + \ldots + \frac{100+19.100}{q^{19}} =$

$100\left[1 + \frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q^{19}}\right] + \frac{100}{q}\left[1 + \frac{2}{q} + \frac{3}{q^2} + \ldots + \frac{19}{q^{18}}\right] =$

$100\,\frac{q^{20}-1}{q^{19}(q-1)} + \frac{100}{q^{19}(q-1)^2}\,[q^{20} - 20q + 19] =$

$\frac{100}{q^{19}(q-1)^2}\,[q^{21} - 21q + 20].$

Speziell: 11.649 *K* 82 *h* (11.649).

93) Die aufeinander folgenden Rentenbezüge sind:

$$r,\ r + \frac{\alpha r}{100},\quad r + \frac{2\alpha r}{100},\quad \ldots\ldots r + \frac{(n-1)\alpha r}{100},$$

daher ihr Wert zu Beginn des ersten Jahres:

$\left(\frac{r}{q} + \frac{r}{q^2} + \ldots + \frac{r}{q^n}\right) + \left[\frac{\alpha r}{100\,q^2} + \frac{2\alpha r}{100\,q^3} + \ldots + \frac{(n-1)\alpha r}{100\,q^n}\right] =$

$\frac{r\,[q^n - 1]}{q^n\,(q-1)} + \frac{\alpha r}{100\,q^n\,(q-1)^2}\,[q^n - nq + (n-1)]$

und so groß ist auch der zu Beginn des ersten Jahres einzuzahlende Betrag.

Speziell: 5358 *K* 48 *h* (5358·4).

94) Leistung des *A* nach *m* Jahren: aq^m.

Leistung der Bank in demselben Momente:

$x + \frac{x+b}{q} + \frac{x+2b}{q^2} + \ldots + \frac{x+(n-1)b}{q^{n-1}} =$

$\frac{x\,(q^n - 1)}{q^{n-1}\,(q-1)} + \frac{b\,[q^n - nq + (n-1)]}{q^{n-1}\,(q-1)^2}$

und diese muß gleich aq^m sein, daraus:

$$x = \frac{aq^{m+n-1}(q-1)^2 - b\,[q^n - n.q + (n-1)]}{q^{n+1} - q^n - q + 1}.$$

Speziell: $x = 364\ K\ 67\ h$ (364·68).

95) $x = \dfrac{L_{24}\quad a}{L_6\left(1 + \frac{P}{100}\right)^{18}} = 1219{\cdot}85\ K$ (1219·86).

96) $x = 1925{\cdot}91\ K$ (1925·9).

97) Denkt man sich, alle 593 vierjährigen Kinder treten bei, so ist ihre Leistung am Anfange des ersten Jahres $593.x$ und dieser Betrag liegt durch volle 16 Jahre an, wächst daher zu $593.xq^{16}$, zu Beginn des zweiten Jahres leben noch 579 Kinder, daher $579.xq^{15}$ u. s. f.

Digitized by Google

Am Ende des 16. Jahres ist der geleistete Betrag:

$$x\,[593.q^{16} + 579.q^{15} + \ldots + 495.q]$$

und dieser Betrag ist in soviele Teile zu zerteilen, als Personen 20 Jahre alt werden, d. i. 491; somit

$K = \frac{x}{491}\,[593.q^{16} + 579.q^{15} + \ldots + 495.q]$ oder allgemein:

$$K = \frac{x}{L_{20}}\,[L_4 q^{16} + L_5 q^{15} + \ldots + L_{19}.q] =$$

$$\frac{x.q^{20}}{L_{20}}\left[\frac{L_4}{q^4} + \frac{L_5}{q^5} + \ldots + \frac{L_{19}}{q^{19}}\right] =$$

$$\frac{x.q^{20}}{L_{20}}\left[\left(\frac{L_4}{q^4} + \frac{L_5}{q^5} + \ldots + \frac{L_{95}}{q^{95}}\right) - \left(\frac{L_{20}}{q^{20}} + \frac{L_{21}}{q^{21}} + \ldots + \frac{L_{95}}{L^{95}}\right)\right].$$

Die Summen dieser diskontierten Beträge sind in der Tabelle in der Rubrik S_n enthalten:

$$K = \frac{x q^{20}}{L_{20}}\,[S_4 - S_{20}] \ldots . \text{ I}$$

$$\text{daraus } x = \frac{K.L_{20}}{(S_4 - S_{20})\,q^{20}} \ldots \text{ II.}$$

Speziell: $x = \frac{5000 \cdot 491}{(7934 \cdot 59 - 2895 \cdot 10)\,(1 \cdot 05)^{20}} = 183 \cdot 6\,K$ (183·6).

98) Die Aufgabe ist mit folgender gleich:
Welcher Betrag müßte für den 60jährigen in eine Rentenanstalt eingezahlt werden, damit diese in der Lage ist, ihm jährlich 1750 K zahlen zu können?
Sei der Betrag y, so leisten alle 210 60jährigen Personen den Beitrag $210y$ und dafür ist die Leistung der Anstalt im Momente des Geschäftsabschlusses:

$$1750\left[\frac{201}{1 \cdot 05} + \frac{192}{(1 \cdot 05)^2} + \ldots + \frac{1}{(1 \cdot 05)^{35}}\right], \text{ daher}$$

$$y = \frac{1750\,(1 \cdot 05)^{60}}{210}\left[\frac{201}{(1 \cdot 05)^{61}} + \frac{192}{(1 \cdot 05)^{62}} + \ldots + \frac{1}{(1 \cdot 05)^{95}}\right]$$

$$y = \frac{1750\,(1 \cdot 05)^{60}}{210}\,S_{61} = 13.600\,K \text{ (13.599).}$$

99) $y = \frac{1000\,(1 \cdot 05)^{38}}{L_{38}}\,S_{38} = 13.155 \cdot 07\,K$ (13.154·6).

100) $x = \frac{3000.L_{50}}{(1 \cdot 05)^{50}.S_{51}} = 303 \cdot 63\,K$ (303·65).

§ 13. Kombinationslehre und binomischer Lehrsatz.

1) Von wieviel Elementen ist die Differenz der Anzahl der Kombinationen der vierten Ordnung mit Wiederholung und der Anzahl der Kombinationen der vierten Ordnung ohne Wiederholung $32^1/_2$mal so groß als die Anzahl der Elemente?

Digitized by Google

2) Von wieviel Elementen ist die Anzahl der Variationen der dritten Ordnung so groß als die Anzahl der Kombinationen der dritten Ordnung, vermehrt um die fünffache Anzahl der Elemente?

3) Die Zahl der Variationen der dritten Ordnung von x Elementen mit Wiederholung ist um 225 größer als die Anzahl der Variationen der dritten Ordnung von x Elementen ohne Wiederholung; wie groß ist x?

4) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit in der Zahlenlotterie, die aus 90 Nummern besteht, von denen bei jeder Ziehung fünf gehoben werden, mit fünf besetzten Nummern
   a) eine Ambe, d. h. zwei der gehobenen Nummern,
   b) eine Terne, d. h. drei der gehobenen Nummern zu treffen?

5) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln auf den ersten Wurf 9 Augen, oder wenn dies nicht geschieht, auf den zweiten Wurf 8 Augen zu werfen?

6) Eine Urne enthält n Kugeln; wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Griffe eine gerade Anzahl von Kugeln herauszuheben?

7) Wie groß ist x in $(x+6)^5 - (x-6)^5 = 19.932$?

8) Die Summe von der Entwicklung $(2 - \sqrt{-1})^6$ ist anzugeben.

9) Wie lauten das siebente und fünfzehnte Glied von $\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^{20}$?

10) Welchen Wert besitzt das sechste Glied einer geometrischen Progression, deren erstes Glied $\frac{1}{a\sqrt{b}}$ und deren Quotient $a\sqrt{b} - b\sqrt{a}$ ist?

11) Man entwickle die vier ersten Glieder und das allgemeine Glied der Reihe, in welche sich der Ausdruck $\frac{1}{\sqrt[3]{a^3+x}}$ nach dem binomischen Lehrsatze verwandeln läßt.

12) Für welchen Wert von x ist das siebente Glied von $(x-1)^{10}$ um 165 größer als das neunte Glied?

13) Es sind die fünf ersten Glieder und das r^{te} Glied von $\sqrt{\sqrt[3]{x^3} - \sqrt{x}}$ zu entwickeln.

14) $\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$ ist mit rationalem Nenner darzustellen und das sich ergebende Resultat nach dem binomischen Satze zu entwickeln.

15) $\sqrt{47}$ ist nach dem binomischen Lehrsatze auf fünf Dezimalstellen genau zu entwickeln.

Digitized by Google

16) $\sqrt{35}$ ist nach mehreren Arten auf fünf Dezimalstellen genau zu entwickeln.

17) Wie groß muß x in der Entwickelung von $\left(3x + \frac{1}{2x}\right)^8$ angenommen werden, daß die Summe des dritten, vierten und fünften Gliedes $\frac{7.81.101}{8}$ beträgt?

18) Wie groß muß x angenommen werden, damit in der Entwickelung von $2x\,(1-x)^{-5}$ das zweite und dritte Glied zusammen 10mal so groß ist als das erste Glied?

19) Wie groß muß x in der Entwickelung $\left(3x - \frac{1}{5x}\right)^8$ angenommen werden, wenn das vierte Glied den Wert -1 haben soll?

20) Das dritte und vierte Glied von $\left(x - \frac{1}{2x}\right)^n$ sollen zusammen den Wert $-\frac{7}{4}$ haben, wie groß muß x angenommen werden, wenn n das zweite Glied einer geometrischen Reihe von 4 Gliedern ist, bei der die Summe 30 und die Differenz zwischen den ungeraden und geraden Gliedern 10 beträgt?

21) Wie groß ist der Koeffizient von $x^{n-r}y^r$ in der Entwickelung $(x - \frac{1}{2}y)^n$, wenn n das dritte Glied einer geometrischen Progression von sechs Gliedern ist, in welcher die Summe der geraden Glieder 147 und die Summe der ungeraden Glieder $73\frac{1}{2}$ beträgt und r die Anzahl der Glieder einer arithmetischen Progression bedeutet, in welcher das erste Glied 5, die Differenz 3 und die Summe 98 ist?

22) Es soll $\sqrt[5]{1 + \frac{1}{5}\sin x}$ für $x = 30°$ mit und ohne Anwendung der Logarithmen auf vier Dezimalstellen genau berechnet werden.

23) Der Ausdruck $N = \sqrt[4]{1 + \frac{1}{4}\cos x}$ ist für $x = 60°$ auf fünf Dezimalstellen zu berechnen, und zwar
a) mit Anwendung der Logarithmen; *b*) durch Wurzelziehen; *c*) mit Hilfe des Binomialsatzes.

§ 13a.

1) $x = 8$.
2) $x = 4$.
3) $x = 9$.
4) *a*) $\binom{85}{3}\binom{5}{2} : \binom{90}{5} = 0{\cdot}022473..$
b) $\binom{85}{2}\binom{5}{3} : \binom{90}{5} = 0{\cdot}000812..$

Digitized by Google

5) $1-(1-\frac{4}{36})(1-\frac{5}{36})=\frac{19}{81}$.

6) $w=\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}$.

7) $x_{1,2}=\pm 1,\ x_{3,4}=\pm\sqrt{-73}$.

8) $-117-44i$.

9) $\frac{4845}{8}x^{12},\ \frac{4845}{2048}x^{28}$.

10) $a^2b^2[a^2+10ab+5b^2]-ab^2\sqrt{ab}\,[5a^2+10ab+b^2]$.

11) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^3+x}}=\frac{1}{a}\Big[1-\frac{1}{3}\frac{x}{a^3}+\frac{1.4}{2!\,3^2}\frac{x^2}{a^6}-\frac{1.4.7}{3!\,3^3}\frac{x^3}{a^9}+\frac{1.4.7.10}{4!\,3^4}\frac{x^4}{a^{12}}-\ldots\Big]$.

das allgemeine Glied ist $(-1)^n\frac{1.4.7.....(3n-2)}{n!\,3^n}\cdot\frac{x^n}{a^{3n+1}}$.

12) $x_{1,2}=\pm 1,\ x_{3,4}=\pm\sqrt{-\frac{11}{14}}$.

13) $\sqrt[3]{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{x}\Big[1-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[6]{x}}-\frac{1}{2!\,2^2}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1.3}{3!\,2^3}\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1.3.5}{4!\,2^4}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\ldots\Big]$.

Das r^{te} Glied ist:

$$-\frac{1.3.5\ldots(2r-5)}{(r-1)!\,2^{r-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{x^{r-1}}}.$$

14) $x\Big[2-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2!\,2^2}\cdot\frac{1}{x^4}-\frac{1.3}{3!\,2^3}\frac{1}{x^6}-\frac{1.3.5}{4!\,2^4}\cdot\frac{1}{x^8}-\frac{1.3.5.7}{5!\,2^5}\cdot\frac{1}{x^{10}}-\ldots\Big]$.

15) 6·85565.

16) 5·91608. Die drei Arten sind: 1) gewöhnliches, abgekürztes Wurzelziehen; 2) nach dem binomischen Lehrsatze; 3) mit Hilfe der Logarithmen.

17) $x_{1,2}=\pm 1,\ x_{3,4}=\pm\sqrt{-\frac{4}{3}}$.

18) $x_1=\frac{2}{3},\ x_2=-1$.

19) $x=\pm\frac{5}{756}\sqrt{210}=\pm\frac{5}{756}\,.\,14\cdot49138=\pm 0\cdot095842\ldots$

20) Die geometrische Reihe ist 16, 8, 4.. somit ist $n=8$ und $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

21) Die geometrische Reihe ist $\frac{7}{2}$, 7, 14, 28, ... somit $n=14$; die arithmetische Reihe hat 7 Glieder, daher $r=7$; es ist sonach

Digitized by Google

der Koeffizient des Gliedes $x^7 y^7$ zu suchen; dieses Glied ist $-\frac{429}{16} x^7 y^7$.

22) 1·0192. 23) 1·02988.

§ 14. Wurzeln und Logarithmen.

1) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ist mit rationalem Nenner darzustellen und dann ist der Ausdruck zu berechnen.

2) Man suche den Wert von

$$y = \frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}} \text{ für } x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right).$$

3) Aus dem Ausdrucke

$$x + 2\sqrt{x} + 3 + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}$$

ist die zweite Wurzel zu ziehen.

4) Aus dem Ausdrucke

$$\frac{1}{x}\left[x^2+1\right] + \frac{3}{x^{\frac{2}{3}}}\left[x^{\frac{4}{3}}+1\right] + \frac{6}{x^{\frac{1}{3}}}\left[x^{\frac{2}{3}}+1\right] + 7$$

ist die dritte Wurzel zu ziehen.

5) $\sqrt[3]{\frac{1\cdot4758^2 \cdot 3\cdot641 \times (11+\frac{3}{11})}{15\cdot306\sqrt{7\cdot458}}}$

ist abgekürzt ohne Logarithmen auf zwei Dezimalen zu berechnen.

6) $\left\{\frac{3472^5\sqrt[3]{0\cdot4}\,.\,\sqrt[5]{0\cdot01}}{2\cdot13^3\sqrt[4]{0\cdot05}}\right\}^{\frac{1}{4}}$ ist mittels Logarithmen zu berechnen.

7) In einem Fasse befinden sich 100 Liter Wein. Man zapft einen Liter Wein ab und ersetzt ihn durch einen Liter Wasser, dann zapft man wieder einen Liter ab und ersetzt ihn abermals durch einen Liter Wasser. Es ist die Frage, wie oft man den Vorgang wiederholen kann, bis im Fasse die Hälfte Wein und die Hälfte Wasser ist.

8) $\log\sqrt{x-1} + \log 2 = 1\cdot5 - \log\sqrt{x+\frac{2}{3}}$.

9) In einem logarithmischen System übertrifft der Logarithmus von 450 den Logarithmus von 40 um 1·16395. Wie heißt die Grundzahl dieses Systems und wie heißen die Logarithmen dieser zwei Zahlen?

10) $2x^{2\log x} + 3x^{\log x} + 3x^{-\log x} + 2x^{-2\log x} = 230\cdot32$.

Digitized by Google

§ 14a.

1) $0{\cdot}751097$.

2) $y_1 = a + b; \quad y_2 = \frac{a\,(a+b)}{b}$.

3) $\frac{1}{\sqrt{x}}\,[x + \sqrt{x} + 1] = \sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

4) $\sqrt[3]{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

5) $1{\cdot}29$.

6) $564{\cdot}584$ $(564{\cdot}58)$.

7) Nahezu 69 mal.

8) $x_1 = 16, \quad x_2 = -\frac{47}{3}$.

9) $8; \quad 2{\cdot}93792, \quad 1{\cdot}77397$.

10) $x_1 = 10, \quad x_2 = \frac{1}{10}, \quad x_{3,\,4} = 10^{\pm\sqrt{\log\,(-5{\cdot}8 \pm \sqrt{32{\cdot}64})}}$,

$x_{5,\,6,\,7,\,8} = 10^{\pm\sqrt{\log\,(-5{\cdot}8 \pm \sqrt{32{\cdot}64})}}$.

Digitized by Google

II. Abschnitt.
Geometrie.

A. Planimetrie.

§ 15. Konstruktions-Aufgaben[1]).

1) Ein rechtwinkeliges Dreieck ist aus der Differenz der Hypotenuse und einer Kathete und aus dem dieser Kathete anliegenden spitzen Winkel zu konstruieren.
2) Ein rechtwinkeliges Dreieck ist zu konstruieren, wenn die Differenz aus der Hypotenuse und der einen Kathete und die andere Kathete gegeben sind.
3) In einem rechtwinkeligen Dreiecke wird eine Kathete von der Halbierungslinie des Gegenwinkels in die Stücke a und b geteilt. Das Dreieck soll konstruiert werden.
4) Ein rechtwinkeliges Dreieck ist zu konstruieren aus der Differenz der Projektionen der Katheten auf die Hypotenuse und der Höhe auf die Hypotenuse.
5) Es sei die Summe aus einer Kathete und der Höhe auf die Hypotenuse, dann ein spitzer Winkel gegeben; das rechtwinkelige Dreieck ist zu konstruieren.
6) Ein rechtwinkeliges Dreieck ist zu konstruieren aus einer Kathete und dem Radius des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises.
7) Von einem schiefwinkeligen Dreiecke sind die Summe der drei Seiten und zwei Winkel bekannt, das Dreieck ist zu konstruieren.
8) Die Höhe auf die Basis, der Umfang und ein Winkel an der Basis sind gegeben, das Dreieck ist zu konstruieren.
9) Die Differenz zweier Seiten, die dritte Seite und der dieser dritten Seite gegenüberliegende Winkel ist gegeben, das Dreieck ist aus den gegebenen Stücken zu konstruieren.
10) In einem Dreiecke ist eine Seite a, der ihr gegenüberliegende Winkel α und die Summe s der beiden anderen Seiten gegeben; das Dreieck ist zu konstruieren.

[1]) Diese Aufgaben wurden zumeist in Verbindung mit trigonometrischen Berechnungen gebracht. Die Lösungen finden sich beinahe in jeder Aufgabensammlung aus der Geometrie, daher wurden sie hier nicht aufgenommen.

Digitized by Google

11) Die Summe s aus dem Schenkel und der Höhe h_b eines gleichschenkeligen Dreieckes und die Basis b sind gegeben. Man soll das Dreieck aus den gegebenen Stücken zeichnen.
12) Die Differenz d aus dem Schenkel und der Höhe h_b eines gleichschenkeligen Dreieckes und die Basis b sind gegeben. Man soll das Dreieck aus den gegebenen Stücken konstruieren.
13) Von einem gleichschenkeligen Dreiecke sei ein Schenkel und die dazu gehörige Höhe gegeben, man soll das Dreieck konstruieren.
14) Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem die Basishöhe h_c, die Seite a und die zur Seite a gehörige Schwerlinie T_a gegeben sind.
15) Ein Dreieck ist zu konstruieren, wenn zwei Seiten und die zur dritten Seite gehörige Schwerlinie gegeben sind.
16) Ein Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben sind eine Seite c, die zugehörige Höhe h_c und die Schwerlinie zur Seite a, das ist T_a.
17) Ein Dreieck zu konstruieren, wenn gegeben sind eine Seite c, die Höhe auf eine andere Seite h_a und die Schwerlinie zu der dritten Seite T_b.
18) Ein Dreieck ist zu konstruieren aus c, h_a und h_b.
19) Es ist der geometrische Ort der Spitzen aller Dreiecke, welche die Basis und den Winkel an der Spitze gemeinsam haben, zu konstruieren.
20) Ein Dreieck ist zu konstruieren aus β, h_b und T_b.
21) Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem ihr gegenüberliegenden Winkel und dem Winkel, welchen die gegebene Seite mit der sie halbierenden Transversalen bildet.
22) Es ist ein Dreieck zu konstruieren, von dem eine Seite, ein derselben anliegender Winkel und der Radius des Kreises gegeben ist, welcher dem Dreiecke eingeschrieben werden kann.
23) Innerhalb der Schenkel eines Winkels α ist ein Punkt gegeben; man soll durch diesen Punkt eine Gerade so ziehen, daß von den Schenkeln des Winkels gleiche Stücke abgeschnitten werden.
24) Es ist ein gleichschenkeliges Dreieck zu konstruieren aus dem Winkel an der Grundlinie und der Summe der beiden Höhen.
25) Ein gleichschenkeliges Dreieck ist in ein gleichseitiges Dreieck von gleichem Flächeninhalte zu verwandeln.

§ 16. Regelmäßige Polygone.

1) Der Radius eines Kreises sei $R = 14\,m$, wie groß ist die Fläche des dem Kreise umgeschriebenen Achteckes?

Digitized by Google

2) 1. Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Achteckes beträgt 80 m^2, wie groß ist der Radius des ein- und umgeschriebenen Kreises, und wie groß ist der Flächeninhalt des von beiden Kreisen begrenzten Ringes?
2. Wie groß sind die Radien und der Flächeninhalt, wenn die Fläche des Achteckes 120 m^2 beträgt?

3) Die Fläche eines regelmäßigen Zwölfeckes ist gleich 129·08 m^2. Wie groß ist der Umfang dieses Vieleckes und wie groß der Radius des ein- und umgeschriebenen Kreises?

4_a) Ein regelmäßiges Vieleck hat 35 verschiedene Diagonalen, wie groß ist der Inhalt des Vieleckes, wenn eine Seite s ist? Wie groß aber, wenn der Radius des umgeschriebenen Kreises r ist?

4_b) Ein regelmäßiges Polygon hat 54 verschiedene Diagonalen; wie groß ist der Flächeninhalt dieses Polygons, wenn der Radius des eingeschriebenen Kreises mit 1 bezeichnet wird?

5) Ein regelmäßiges Polygon hat 252 verschiedene Diagonalen; wieviel Seiten hat dasselbe? Wie groß ist eine Seite, und wie groß ist die Differenzfläche des umgeschriebenen Kreises und des Polygons, wenn der Kreishalbmesser 1 ist?

6) Der Halbmesser eines Kreises sei 7 m, man bestimme die Seite, den Umfang und den Flächeninhalt des ein- und umgeschriebenen regelmäßigen Vierundzwanzigeckes.

7) Einem Kreise sind zwei gleichseitige Dreiecke so eingeschrieben, daß ein regulärer sechseckiger Stern entsteht. Wie groß ist sein Flächeninhalt?

8) Die Seite eines regulären Fünfeckes sei a; zu berechnen sind die drei Teile, in welche jede Diagonale durch die beiden anderen Diagonalen zerteilt wird.

§ 16a.

1) $f = 8\,R^2\,(\sqrt{2} - 1) = 649{\cdot}48685\ m^2$.

2) 1) $R = 5{\cdot}3183\ m$, $r = 4{\cdot}9135\ m$, $f = 13{\cdot}0129\ m^2$.
2) $R = 6{\cdot}51356\ m$, $r = 6{\cdot}01774\ m$, $f = 19{\cdot}51956\ m^2$.

3) $R = 6{\cdot}55947\ m$, $r = 6{\cdot}33596\ m$, $U = 40{\cdot}7452\ m$.

4_a) $f = \frac{5s^2}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$, $f = \frac{5r^2}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

4_b) Das Polygon ist ein Zwölfeck.
$f = 3{\cdot}21539\ m^2$.

5) Das Polygon ist ein Vierundzwanzigeck.
$S = 0{\cdot}26105$, $\Delta = 0{\cdot}035764$.

Digitized by Google

6) $s = 1{\cdot}82737\ m$, $S = 1{\cdot}84314\ m$.
$u = 43{\cdot}85682\ m$, $U = 44{\cdot}23534\ m$.
$f = 152{\cdot}18566\ m^2$, $F = 154{\cdot}82334\ m^2$.

7) $f = R^2\sqrt{3}$.

8) $\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$, $\frac{a}{2}(3-\sqrt{5})$, $\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$.

§ 17. Rechnungs-Aufgaben.

1) Einem gleichseitigen Dreiecke mit der Seite a ist ein Rechteck, dessen Inhalt $\frac{4}{9}$ der Dreiecksfläche beträgt, eingeschrieben. Die Seiten des Rechteckes sind zu berechnen.

1_a) Die Strecke a ist die Kathete eines rechtwinkeligen Dreieckes und zugleich die mittlere geometrische Proportionale zu den anderen Dreiecksseiten; wie groß sind letztere?

1_b) Wie groß sind Höhe, Schenkel und Grundlinie eines gleichschenkeligen Dreieckes vom Inhalte a^2, wenn die Summe der Grundlinie und Höhe gleich ist der Summe der beiden Schenkel, und in welchem Verhältnisse stehen die drei Größen?

2) Über der Seite AC eines Dreieckes ist ein Quadrat, über BC ein ebenso großes gleichseitiges Dreieck und über AB ein ebenso großer Halbkreis konstruiert. Wie groß ist der Flächeninhalt des Dreieckes ABC, wenn die Diagonale des erwähnten Quadrates $15{\cdot}5\ cm$ beträgt?

3) In der Halbierungslinie eines gegebenen Winkels 2α liegt in gegebener Entfernung r von dem Scheitel O des Winkels ein Punkt M; es soll die Lage einer zur Halbierungslinie des Winkels 2α senkrechten Transversalen, welche die erstere Gerade zwischen O und M schneidet, so bestimmt werden, daß das durch M und die Schnittpunkte der Transversalen mit den Schenkeln des Winkels 2α bestimmte Dreieck einen gegebenen Flächeninhalt f erhält. Für diesen Flächeninhalt ist das Maximum anzugeben.

4) Wie groß ist der Zentriwinkel jenes Kreissektors, welcher bei gegebenem Umfang die größte Fläche hat?

5) Ein Kreis, dessen Radius $r = 32\ cm$ ist, soll durch zwei konzentrische Kreise so geteilt werden, daß das Verhältnis der Fläche des kleinsten Kreises zu den Flächen der beiden äußeren Ringe $4:5:7$ ist. Wie groß sind die Radien der zwei inneren Kreise?

6) Es sei ein Kreis vom Halbmesser $r = 3\ cm$ gegeben und ein Punkt A, der vom Kreismittelpunkte $6\ cm$ entfernt ist. Vom Punkte A ist zu dem Kreise eine Sekante dergestalt zu ziehen,

Digitized by Google

daß das vom Kreise abgeschnittene Stück der Sekante gleich 2 *cm* ist. Wie lang ist die Sekante?

7) Von einem Punkte A aus ist an einen Kreis eine Sekante AC gezogen; bekannt ist $BC = 1$, die Länge der im Kreise liegenden Sehne, sowie $AO = d$, die Entfernung des Punktes A vom Mittelpunkte des Kreises und r, der Radius des Kreises. Wie groß ist AB und AC?

8) An dem einen Ende B des Durchmessers eines gegebenen Kreises ist eine Tangente BC gezogen, von dem anderen Endpunkte A desselben ist eine Sekante AC so zu ziehen, daß das zwischen dem Kreise und der Tangente enthaltene Stück CD eine gegebene Länge a habe. Wie lang ist die Sekante?

9) In einem Sehnenvierecke, dessen eine Diagonale p ein Durchmesser ist, beträgt die Summe der beiden Seiten a und d, welche in dem einen Endpunkte von p zusammenstoßen, 21 *cm*, die Summe der beiden anderen Seiten b und c aber 7 *cm*, das Rechteck aus den beiden Diagonalen p und q ist 75 cm^2. Wie groß sind die Seiten?

10) Aus zwei Punkten A und B, welche auf einer Seite einer Geraden liegen, sind Normale a und b auf diese Gerade gefällt; die Entfernung ihrer Fußpunkte sei c. In welcher Entfernung muß der Punkt C in der Geraden zwischen den Fußpunkten von a und b genommen werden, wenn der Winkel ABC ein rechter sein soll?

11) Die Halbmesser zweier Rollen R und r und ihr Mittelpunktsabstand c sind gegeben. Man berechne die Länge des um dieselben zu legenden Riemens ohne Kreuzung.
$R = 85$ *cm*, $r = 25$ *cm*, $c = 120$ *cm*.

§ 17a.

1) $x_1 = \frac{2a}{3}$, $y_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $x_2 = \frac{a}{3}$, $y_2 = \frac{a}{3}\sqrt{3}$.

1a) $a = a$, $b = \frac{a}{2}\sqrt{2(\sqrt{5}-1)}$, $c = \frac{a}{2}\sqrt{2(\sqrt{5}+1)}$.

1b) Die Basis $B = a\sqrt{3}$; ein Schenkel $S = \frac{5}{6}a\sqrt{3}$, die Höhe $H = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ somit $B : S : H = 6 : 5 : 4$.

2) Die drei Seiten des Dreieckes sind: 10·960155, 16·655834, 17·489877 *cm* und der Flächeninhalt 88·3529 cm^2.

3) Das Dreieck hat die Höhe $\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{f}{tg.\alpha}}$.
f ist ein Maximum, u. zw. $f = \frac{r^2}{4} tg\alpha$, wenn $x = \frac{r}{2}$ ist.

Digitized by Google

4) $\alpha = \frac{360^0}{\pi}$.

5) $x = 16\ cm,\quad y = 24\ cm.$

6) $x = 1 + \sqrt{28} = 6{\cdot}2915026\ cm.$

7) $AC = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{1 + 4(d^2 - r^2)}]$,
$AB = \frac{1}{2}[-1 + \sqrt{1 + 4(d^2 - r^2)}]$.

8) $\frac{a + \sqrt{a^2 + 16r^2}}{2}$.

9) $a_1 = 10,\ b_1 = 5,\ c_1 = 2,\ d_1 = 11$
$a_2 = 11,\ b_2 = 2,\ c_2 = 5,\ d_2 = 10.$

10) $x = \frac{1}{2}(c \pm \sqrt{c^2 - 4ab})$.

11) $L = 2\left[R\pi - \frac{\pi}{180^0}(R - r)\ \text{arc cos}\ \frac{R - r}{c} + \sqrt{c^2 - (R - r)^2}\right]$.
$L = 2(65\pi + 60\sqrt{3}) = 616{\cdot}253\ cm.$

B. Trigonometrie.

§ 18. Goniometrie und goniometrische Gleichungen.

1) Die Gleichung $17{\cdot}5x^2 + 15x = 15{\cdot}3$ ist mittels goniometrischer Funktionen und auf gewöhnliche Art aufzulösen.

2) Die Gleichung $x^2 - \frac{33{\cdot}815}{7{\cdot}3527}x = \frac{148{\cdot}87}{7{\cdot}3527}$ ist mit Hilfe der goniometrischen Funktionen aufzulösen.

3) Ebenso: $x^2 + 9{\cdot}125571x + 9{\cdot}74192654 = 0.$

4) Ebenso: $x^2 - 3{\cdot}8259x + 3{\cdot}3512972 = 0.$

5) Es ist die Wurzel x zu suchen, welche der Gleichung: $\sin x + \cos x = \frac{5}{4}$ im ersten Quadranten entspricht.

6) Für welchen Winkel im ersten Quadranten gilt $\sin 3x \,.\, \sin x = \frac{1}{4}$?

7) $\frac{\sin x + 2\cos x}{4\sin x - \cos x} = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{4 - \sqrt{3}}$.

8) Welche reellen Werte von x entsprechen im ersten Quadranten der Gleichung:
$$\sin 2x \cos x + \sin x = 1?$$

9) Für welchen Winkel im ersten Quadranten gilt folgende Gleichung:
a) $6\sin^2 x + 8\cos^2 x = 7\sin 2x$? *b*) $\frac{2}{3}\sec x + 6\,\text{tg}\,x = 3\cos x$?

10) Welche Werte von x genügen der Gleichung
$$3\sec^4 x + 8 = 10\sec^2 x?$$

11) $\sin 4x - \sin 2x = \sin x.$

12) $\sin 4x + \sin x = \sin 3x + \sin 2x.$

Digitized by Google

13) $\cos nx + \cos(n-2)x = \cos x.$

14) $\cos 4x + \cos x = \cos 3x + \cos 2x.$

15) $\cos x = \frac{1}{2}\sin x \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}.$

16) $\sin 2x + \sin 3x = 3\sin x.$

17) $y^{\operatorname{tg} x} = 64,\ y^{\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}} = 16.$

18) $\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} x} - \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x} = 2.$

18$_a$) $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x = \frac{5}{2}\operatorname{cotg} x.$

19) $\sqrt[3]{\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}} + 12\sqrt[3]{\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}} = 7.$

20) $(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{2}} + 6(1-\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{2}} = 5(1-\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{2}}.$

21) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0.$

22) $\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 2x = 3\operatorname{tg} x.$

23) $\sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{2}$
$\cos^2 x - \sin^2 y = \frac{1}{2}.$

24) $5^{\sin x} + 3^{\sin y} = 4$
$3(5^{\sin x}) - 2(3^{\sin y}) = 5.$

25$_a$) $\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \cos\alpha,\ x + y = 72^0,\ \alpha = 37^0\,43'\,42''.$

25$_b$) $9\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 4.$
$2\operatorname{cotg} x + 4\operatorname{cotg} y = 1.$

26) Die Summe zweier positiver Winkel beträgt $87^0\,34'\,17''$, die Tangenten dieser Winkel verhalten sich wie $5:4$; wie groß sind die beiden Winkel?

27) Zwei Winkel betragen zusammen $129^0\,40'\,41{\cdot}3''$ und die Sinus derselben verhalten sich wie $3:2$; wie groß sind die beiden Winkel?

28) Welche reellen Werte von α entsprechen der Gleichung:
$0{\cdot}48 \times 0{\cdot}3^{\sin\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)} - 0{\cdot}2 \times 0{\cdot}3^{1+\sin\alpha} = 0{\cdot}16?$

29) $x^2 + y^2 - 2xy\cos\varphi = 144;\ xy\sin\varphi = 36;\ x + y = 28.$

§ 18a[1]).

1) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{p}\sqrt{q};\quad x_1 = \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{q};\quad x_2 = -\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{q}.$
$\alpha = 65^0\,22'\,32{\cdot}45'';\ x_1 = 0{\cdot}6,\ x_2 = -1{\cdot}45714;\ x_{1,2} = \frac{-15\pm 36}{35}$
$(\alpha = 65^0\,22'\,33'',\ x_1 = 0{\cdot}6,\ x_2 = -1{\cdot}4571).$

[1]) Die eingeklammerten Resultate beziehen sich auf fünfstellige Logarithmentafeln.

Digitized by Google

2) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{p}\sqrt{q}$; $x_1 = -\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{q}$; $x_2 = \left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{q}$.
$\alpha = 62^\circ\,55'\,52{\cdot}6''$; $x_1 = 7{\cdot}35268$; $x_2 = -2{\cdot}75369$
($\alpha = 62^\circ\,55'\,52''$, $x_1 = 7{\cdot}353$, $x_2 = -2{\cdot}7537$).

3) $\sin\alpha = \frac{2}{p}\sqrt{q}$; $x_1 = -\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{q}$; $x_2 = -\left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{q}$.
$\alpha = 43^\circ\,9'\,41{\cdot}4''$, $x_1 = -1{\cdot}23456$, $x_2 = -7{\cdot}89101$
($\alpha = 43^\circ\,9'\,40''$, $x_1 = -1{\cdot}2346$, $x_2 = -7{\cdot}891$).

4) $\sin\alpha = \frac{2}{p}\sqrt{q}$; $x_1 = \left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{q}$; $x_2 = \left(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{q}$.
$\alpha = 73^\circ\,7'\,58{\cdot}22''$; $x_1 = 1{\cdot}3579$; $x_2 = 2{\cdot}468$ ($\alpha = 73^\circ\,8'$).

5) $x_1 = 72^\circ\,53'\,7{\cdot}94''$, $x_2 = 90^\circ - x_1$ ($72^\circ\,53'\,10''$).

6) $x_1 = 54^\circ$, $x_2 = 18^\circ$. **7)** $x = 30^\circ$, $X = \frac{\pi}{6} + n\pi$.

8) $x_1 = 90^\circ$; $x_2 = 21^\circ\,28'\,14{\cdot}58''$ ($21^\circ\,28'\,14''$).

9a) $x_1 = 45^\circ$; $x_2 = 53^\circ\;7'\,48{\cdot}36''$ ($53^\circ\;7'\,50''$).

9b) $\sin x = \frac{1}{3}$.

10) $x = 45^\circ$, 135°; 30°, 150°.

11) Unter Beachtung der Formel $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ erhält man
$\sin x = 0$, $\cos 3x = \frac{1}{2}$.

12) $\sin\frac{5x}{2}\sin x\sin\frac{x}{2} = 0$.

13) Mit Hilfe der Formel für $\cos\alpha + \cos\beta$ erhält man
$\cos x = 0$, $\cos(n-1)\,x = \frac{1}{2}$.

14) $\cos\frac{5x}{2}\sin x\sin\frac{x}{2} = 0$.

15) $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{2}$, $x_1 = 54^\circ\,44'\,8{\cdot}2''$ ($54^\circ\,44'\,9''$)
$x_2 = 180^\circ - x_1$.

16) $\sin x = 0$; $2\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$.

17) $\operatorname{tg} x_1 = 3$, $y_1 = 4$; $\operatorname{tg} x_2 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = \frac{1}{4096}$.

18) $x_1 = 22^\circ\,30'\,0{\cdot}15''$, $x_2 = 67^\circ\,29'\,59{\cdot}85''$ ($22^\circ\,30'$, $67^\circ\,30'$).

18a) $\operatorname{tg} x_1 = \pm\sqrt{5}$, $\operatorname{tg} x_2 = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

19) $\operatorname{tg} x_1 = \frac{13}{14}$, $\operatorname{tg} x_2 = \frac{68}{65}$.

20) $x_1 = 42^\circ\,52'\,44''$, $x_2 = 37^\circ\,52'\,30''$ ($42^\circ\,52'\,43''$, $37^\circ\,52'\,30''$) und allgemein:
$X_1 = n\pi + x_1$, $X_2 = n\pi + x_2$.

21) $\operatorname{tg} x_1 = 0$, $\operatorname{tg} x_2 = \pm\sqrt{3}$, $\operatorname{tg} x_3 = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Digitized by Google

22) $\operatorname{tg} x_1 = 0$, $\operatorname{tg} x_2 = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{17}}{8}}$.

23) $X = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $Y = n\pi$.

24) $x = 36^\circ 25' 10{\cdot}25''$, $y = 17^\circ 50' 4{\cdot}52''$ ($36^\circ 25' 10''$, $17^\circ 50' 6''$).

25$_a$) $x_1 = 32^\circ 48' 45{\cdot}5''$, $x_2 = -50^\circ 48' 45{\cdot}5''$
$y_1 = 39^\circ 11' 14{\cdot}5''$, $y_2 = 122^\circ 48' 45{\cdot}5''$.

25$_b$) $x_1 = 53^\circ\ 7' 48{\cdot}36''$ ($53^\circ\ 7' 48''$); $X_1 = n\pi + x_1$.
$x_2 = 33^\circ 41' 24{\cdot}23''$ ($33^\circ 41' 24''$); $X_2 = n\pi + x_2$.
$y_1 = -82^\circ 52' 30''$ ($-82^\circ 52' 30''$); $Y_1 = n\pi + y_1$.
$y_2 = -63^\circ 26' 5{\cdot}82''$ ($-63^\circ 26' 6''$); $Y_2 = n\pi + y_2$.

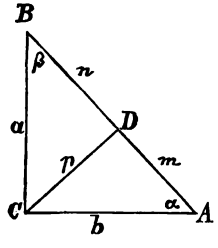
26) $\alpha = 46^\circ 58' 21''$; $\beta = 40^\circ 35' 56''$ ($46^\circ 58' 23''$, $40^\circ 35' 54''$).

27) Man entwickle zunächst $(\sin\alpha + \sin\beta) : (\sin\alpha - \sin\beta) = 5 : 1$
$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = 5 : 1$.
$\alpha = 87^\circ 54'\ 7{\cdot}8''$ ($87^\circ 54'\ 7{\cdot}6''$).
$\beta = 41^\circ 46' 33{\cdot}5''$ ($41^\circ 46' 33{\cdot}7''$).

28) Brauchbar ist nur $\sin\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{0{\cdot}761056}$
daher $\alpha = 31^\circ 28' 26{\cdot}46''$ ($31^\circ 28' 26''$).

29) $\varphi = 12^\circ 50' 15{\cdot}3''$ ($12^\circ 50' 15''$).
$x_1 = 19{\cdot}8288 = y_2$,
$x_2 = 8{\cdot}1712 = y_1$.

§ 19. Rechtwinkeliges Dreieck.



Die Kathete $AC = b$; die Kathete $BC = a$; die Hypotenuse $AB = c$; das vom Scheitel des rechten Winkels auf c gefällte Perpendikel $CD = p$. Die Abschnitte der Hypotenuse $AD = m$, $BD = n$; die Abschnitte der den Winkel α halbierenden Transversalen t_1 auf BC seien a_1 und a_2 und die Abschnitte der den Winkel β halbierenden Transversalen t_2 auf AC seien b_1, b_2; mit u sei der Umfang und mit f der Flächeninhalt bezeichnet.

1) [u, α.] Wenn der Umfang 12 m und ein spitzer Winkel $\alpha = 35^\circ$ beträgt, wie groß sind dann die Seiten und der Flächeninhalt dieses rechtwinkeligen Dreieckes?

2) [f, α.] I. Wie lang ist die kürzeste und die längste Seite eines rechtwinkeligen dreieckigen Grundstückes, dessen Flächeninhalt 138 m^2 beträgt, wenn ein Winkel $27^\circ 53'$ ist?
II. Wie groß dann, wenn $f = 28\ m^2$, $\alpha = 42^\circ 38' 20''$ ist?

Digitized by Google

3) [$a + b$, c.] Von einem rechtwinkeligen Dreiecke sei die Summe der beiden Katheten $a + b = s$ und die Hypotenuse c gegeben, das Dreieck ist auf zwei verschiedene Arten aufzulösen.

4) In einem rechtwinkeligen Dreiecke ist die Hypotenuse 5 m und die Summe der beiden Katheten 7 m; wie groß sind die Katheten und die ihnen gegenüberliegenden Winkel?

5) [$a - b$, c.] Von einem rechtwinkeligen Dreiecke sei die Differenz der beiden Katheten $a - b = d$ und die Hypotenuse c gegeben, das Dreieck ist auf zwei verschiedene Arten aufzulösen.

6) Von einem Dreiecke beträgt die Hypotenuse 8 m, und die eine Kathete ist um 2 m länger als die andere, wie groß sind die einzelnen Stücke des Dreieckes?

7) [a, $b + c$.] Von einem rechtwinkeligen Dreiecke beträgt die eine Kathete 15 m und die Summe der andern Kathete und der Hypotenuse beträgt 25 m; wie groß sind die verschiedenen Stücke des Dreieckes?

8) [a, $c - b$.] Ein rechtwinkeliges Dreieck, in welchem eine Kathete a und der Überschuß der Hypotenuse über die andere Kathete gegeben ist, soll aufgelöst und aus den gegebenen Stücken konstruiert werden.

Beispiel I: $a = 3702\ m$, $c - b = 1234\ m$,
„ II: $a = 8\ m$, $c - b = 2\ m$.

9) [$a + b - c$, β.] In einem rechtwinkeligen Dreiecke beträgt die Summe der beiden Katheten um 5 m mehr als die Hypotenuse und einer der spitzen Winkel ist 54° 37′ 16·5″. Das Dreieck ist aufzulösen.

10) [u, f.] Der Umfang eines rechtwinkeligen Dreieckes beträgt 24 m, der Flächeninhalt 24 m^2. Wie groß sind die übrigen Stücke des Dreieckes?

11) [u, $a + b - c$.] Der Umfang beträgt 40 m, die Summe der Katheten ist um 6 m größer als die Hypotenuse. Wie heißen die verschiedenen Stücke dieses rechtwinkeligen Dreieckes?

12) In einem rechtwinkeligen Dreiecke verhält sich die kleinere Kathete zur größeren, wie diese zur Hypotenuse; die zur Hypotenuse gehörige Höhe ist 1 m. Wie groß sind die Seiten, die Winkel und die Fläche des Dreieckes?

13) [m, n.] Durch die vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Senkrechte wird die Hypotenuse in zwei Teile m und n zerlegt, wie groß sind die einzelnen Stücke des Dreieckes?

Beispiel I: $m = 3\ cm$; $n = 12\ cm$,
„ II: $m = 2{\cdot}8\ m$; $n = 3{\cdot}5\ m$.

Digitized by Google

14) [a, m.] In einem rechtwinkeligen Dreiecke beträgt die senkrechte Projektion der einen Kathete auf die Hypotenuse 15 m und die andere Kathete ist 25 m lang. Das Dreieck soll aufgelöst werden.

15) [$m : n$, p.] Das vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Perpendikel zerlegt die Hypotenuse in zwei Teile, die sich wie 16 : 9 verhalten, das Perpendikel selbst ist $12 \cdot 6$ m lang. Die einzelnen Stücke des Dreieckes sollen berechnet werden.

16) In einem rechtwinkeligen Dreiecke ist die Hypotenuse $c = 12 \cdot 8$ m und die vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Senkrechte $p = 4 \cdot 56$ m; wie groß sind die Winkel, die Katheten und die Segmente der Hypotenuse?

17) [b_1, b_2.] In einem rechtwinkeligen Dreiecke wird eine Kathete von der Halbierungslinie des Gegenwinkels in die Stücke b_1 und b_2 geteilt; die Seiten, Winkel und der Flächeninhalt sollen berechnet und die Konstruktion des Dreieckes angegeben werden.

18) [c, t_1.] Wenn die Hypotenuse c und die den Winkel β halbierende Transversale t_1 gegeben sind, wie groß sind dann die anderen Stücke dieses Dreieckes?

19) [T_1, T_2.] Ein rechtwinkeliges Dreieck ist aus den an die Mittelpunkte der Katheten von den Scheiteln der Gegenwinkel gezogenen Transversalen T_1 und T_2 zu berechnen:

$$T_1 = \sqrt{193}; \quad T_2 = \sqrt{588 \cdot 25}.$$

20) In einem rechtwinkeligen Dreiecke werde vom Scheitel des spitzen Winkels β eine Transversale auf die Kathete b gezogen; es seien die Kathete a und die Winkel, welche dieselbe mit der Hypotenuse sowohl wie mit der Transversalen bildet, bekannt; es soll der Abstand des Fußpunktes der Transversalen vom Fußpunkte der Hypotenuse berechnet werden.
Beispiel: $a = 450$ m; $\beta = 67° 45' 16''$; $\beta_1 = 42° 30' 25''$.

21) Ein rechtwinkeliges Dreieck ist aus der Summe der Seiten $a + b + c = 132$ und der Summe der Quadrate derselben $a^2 + b^2 + c^2 = 6050$ zu berechnen.

22) In einem rechtwinkeligen Dreiecke beträgt die Summe der beiden Katheten 14 und die Mittellinie auf die größere Kathete $2\sqrt{13}$. Wie groß sind die einzelnen Stücke des Dreieckes?

23) Ein Schiffer sieht in einem fortbewegten Nachen die schneeige Spitze eines hohen Berges, der in der Mitte einer kreisförmigen Insel von $4371 \cdot 7$ m Umfang liegt, in dem Augenblicke, als die Spitze gerade aus dem Meere emportaucht. Von dieser Stelle der auf die Bergspitze zu gerichteten Fahrt bis zur Insel, wo

Digitized by Google

gelandet wird, braucht der Nachen 2 Tage und $14^1/_2$ Stunden Zeit. Der Schiffer kennt die Geschwindigkeit seines Fahrzeuges (1 *m* per Sekunde); wie hoch ist der Berg, wenn die Erde als Kugel vom Halbmesser 6360 *km* angesehen wird?

24) Wie weit sieht man bei ungehinderter Rundsicht von der Spitze eines a Meter hohen Berges und wie groß ist die Fläche, über welche der bezeichnete Standpunkt eine Übersicht gewährt, wenn die Erde als eine Kugel betrachtet und auf die astronomische Strahlenbrechung keine Rücksicht genommen wird?
Speziell $a = 3160$ *m*, Erdradius $= 6360$ *km*.

25) Ein rechtwinkeliges Dreieck zu berechnen aus einer Kathete a und dem Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises.
Speziell $a = 396 \cdot 5$, $\varrho = 117 \cdot 4$.

26) Der Halbmesser eines Kreises ist $12 \cdot 5$ *m*, ein Zentriwinkel $42^\circ\, 13'$, es ist die Fläche des Kreisabschnittes zu berechnen.

27) Man berechne den Inhalt eines Kreisabschnittes, dessen zugehöriger Zentriwinkel $66^\circ\, 30'$ ist und dessen Sehne vom Mittelpunkte eine Entfernung von 48 *m* hat.

28) Die Fläche des dem Zentriwinkel $42^\circ\, 13'$ entsprechenden Kreisabschnittes ist $5 \cdot 07$ m^2; wie groß ist der Radius des Kreises?

29) Man berechne die dem Winkel $\alpha = 33^\circ\, 15'$ anliegende Kathete eines rechtwinkeligen Dreieckes, dessen Inhalt gleich dem eines solchen Kreisausschnittes ist, worin der Zentriwinkel 2α und die Sehne $d = 48$ *m* vom Mittelpunkte entfernt ist.

30) In einem Kreissektor beträgt die zugehörige Sehne $3495 \cdot 66$ *m* und das von der Bogenmitte auf die Sehne gefällte Perpendikel $^1/_{30}$ der Sehne; es sollen der Radius, der Zentriwinkel und die Fläche des Sektors berechnet werden.

31) Von drei Kreisen mit den Halbmessern 1, 2, 3 *m* berühren sich je zwei von außen. Wie groß ist die zwischen ihnen liegende Fläche?

32) In welcher geographischen Breite beträgt ein Grad des Parallelkreises 100 *km*, wenn der Halbmesser der Erde mit 6360 *km* angenommen wird?

33) Wieviel Meter legt bei der Achsendrehung der Erde Kremsmünster, dessen geographische Breite $48^\circ\, 3'\, 24''$ beträgt, in jeder Sekunde zurück, wenn die geographische Meile zu 7420 *m* gerechnet wird?

34) An einem Globus beträgt der Umfang des Äquators 2π *dm*, die Differenz der Umfänge zweier um 4 Breitegrade voneinander

Digitized by Google

abstehenden Parallelkreise ist $0{\cdot}10374\,\pi\,dm$; welchen Breitegraden entsprechen die beiden Parallelkreise?

§ 19a.

1) $a = 2{\cdot}8766\ m$ (2·8766), $b = 4{\cdot}1082\ m$ (4·1081),
$c = 5{\cdot}0152\ m$ (5·0153), $f = 5{\cdot}9088\ m^2$ (5·9094).

2) 1. $a = 12{\cdot}08436\ m$, $b = 22{\cdot}83944\ m$, $c = 25{\cdot}83935\ m$
(12·084, 22·839, 25·839).
2. $a = 7{\cdot}1809\ m$, $b = 7{\cdot}7985\ m$, $c = 10{\cdot}6010\ m$
(7·181, 7·799, 10·601).

3) $a + b = s$ und $a^2 + b^2 = c^2$. Man kann nun zuerst die Seiten berechnen: $a = \frac{1}{2}\{s \pm \sqrt{2c^2 - s^2}\}$; $b = s - a$; oder aus $a + b = s = c\,[\sin\alpha + \sin(90 - \alpha)] = 2c \sin 45 \cos(\alpha - 45)$ erhält man $\cos(\alpha - 45) = \frac{s\sqrt{2}}{2c}$.

4) $a_1 = 3$, $b_1 = 4$; $a_2 = 4$, $b_2 = 3$;
$\alpha_1 = 36^\circ\,52'\,11{\cdot}64'' = \beta_2$;
$\beta_1 = 53^\circ\,7'\,48{\cdot}36'' = \alpha_2$ ($36^\circ\,52'\,10''$, $53^\circ\,7'\,50''$).

5) Ist $a - b = d$, so gibt $a - b = d$ und $a^2 + b^2 = c^2$
$$a = \tfrac{1}{2}\{\sqrt{2c^2 - d^2} + d\},\quad b = \tfrac{1}{2}\{\sqrt{2c^2 - d^2} - d\}$$
oder $d = c \sin\alpha - c\cos\alpha = c\,[\sin\alpha - \sin(90 - \alpha)]$
$$= 2c \cos 45 \sin(\alpha - 45),\ \text{daher}\ \sin(\alpha - 45) = \frac{d}{2c}\sqrt{2}.$$

6) $a = 6{\cdot}56776\ m$, $b = 4{\cdot}56776\ m$, $f = 15\ m^2$, $\alpha = 55^\circ\,10'\,55''$.

7) $a = 15\ m$, $b = 8\ m$, $c = 17\ m$, $f = 60\ m^2$.
$\alpha = 61^\circ\,55'\,39{\cdot}1''$, $\beta = 28^\circ\,4'\,20{\cdot}9''$ ($61^\circ\,55'\,40''$).

8) Ist $c - b = d$, so $c = \frac{a^2 + d^2}{2d}$, $b = \frac{a^2 - d^2}{2d}$.
$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a}{c}\right).$$
1. $b = 4936\ m$, $c = 6170\ m$, $f = 9136536\ m^2$.
$\alpha = 36^\circ\,52'\,11{\cdot}64''$, $\beta = 53^\circ\,7'\,48{\cdot}36''$ ($36^\circ\,52'\,10''$).
2. $b = 15\ m$, $c = 17\ m$, $f = 60\ m^2$.
$\alpha = 28^\circ\,4'\,20{\cdot}9''$, $\beta = 61^\circ\,55'\,39{\cdot}1''$ ($28^\circ\,4'\,20''$).

9) $a = 7{\cdot}3414\ m$, $b = 10{\cdot}3386\ m$, $c = 12{\cdot}6800\ m$
(7·3414, 10·339, 12·680).
$f = 37{\cdot}9499\ m^2$ (37·95).

10) $a_1 = 6 = b_2$, $a_2 = 8 = b_1$, $c = 10$, $f = 24\ m^2$.
$\alpha_1 = 36^\circ\,52'\,11{\cdot}64'' = \beta_2$, $\alpha_2 = 53^\circ\,7'\,48{\cdot}36'' = \beta_1$ ($36^\circ\,52'\,10''$).

11) $a_1 = 15 = b_2$, $a_2 = 8 = b$, $c = 17$, $f = 60\ m^2$.
$\alpha_1 = 61^\circ\,55'\,39{\cdot}1'' = \beta_2$, $\alpha_2 = 28^\circ\,4'\,20{\cdot}9'' = \beta_1$ ($61^\circ\,55'\,40''$).

Digitized by Google

12) $\alpha = 38^0\,10'\,21{\cdot}75''$ $(38^0\,10'\,23'')$.
$a = 1{\cdot}27202$, $b = 1{\cdot}618034$, $c = 2{\cdot}058171$, $f = 1{\cdot}029086$
$(1{\cdot}272,\ 1{\cdot}618,\ 2{\cdot}058,\ 1{\cdot}02905)$.

13) 1. $a = 13{\cdot}416408\ cm$, $b = 6{\cdot}708203\ cm$, $f = 45\ cm^2$.
$\alpha = 63^0\,26'\,5{\cdot}8''$, $\beta = 26^0\,33'\,54{\cdot}2''$ $(63^0\,26'\,10'')$.
2. $a = 4{\cdot}695742\ m$, $b = 4{\cdot}2\ m$, $f = 9{\cdot}86106\ m^2$.
$\alpha = 48^0\,11'\,22{\cdot}9''$, $\beta = 41^0\,48'\,37{\cdot}1''$ $(48^0\,11'\,23'')$.

14) $b = 22{\cdot}45021\ m$, $c = 33{\cdot}60077\ m$, $f = 280{\cdot}62763\ m^2$.
$\beta = 41^0\,55'\,26{\cdot}78''$ $(22{\cdot}45,\ 33{\cdot}6,\ 280{\cdot}625,\ 41^0\,55'\,26'')$.

15) $a = 15{\cdot}75\ m$, $b = 21\ m$, $c = 26{\cdot}25\ m$, $f = 165{\cdot}375\ m^2$.
$\alpha = 36^0\,52'\,12''$ $(36^0\,52'\,10'')$.

16) $m = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4p^2}}{2}$, $a_1 = 4{\cdot}94358 = b_2$, $b_1 = 11{\cdot}80682 = a_2$,
$m_1 = 10{\cdot}8907 = n_2$, $n_1 = 1{\cdot}9093 = m_2$, $f = 29{\cdot}184\ m^2$
$\alpha_1 = 22^0\,43'\,9{\cdot}63'' = \beta_2$, $\beta_1 = 67^0\,16'\,50{\cdot}37'' = \alpha_2$
$(4{\cdot}9435,\ 11{\cdot}807;\ 10{\cdot}891,\ 1{\cdot}909;\ 22^0\,43'\,9'')$.

17) $a = b_1\sqrt{\frac{b_2+b_1}{b_2-b_1}}$; $c = b_2\sqrt{\frac{b_2+b_1}{b_2-b_1}}$; $f = \frac{b_1(b_2+b_1)}{2}\sqrt{\frac{b_2+b_1}{b_2-b_1}}$.
$\beta = 2 \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{b_2-b_1}{b_2+b_1}}$. Oder $\cos 2\beta = \frac{b_1}{b_2}$.

18) Ist $\frac{\beta}{2} = \beta_1$, so $\cos\beta_1 = \frac{t_1 \pm \sqrt{t_1^2 + 8c^2}}{4c}$. Da aber $\beta_1 < 90^0$, so $\cos\beta_1$ positiv und $\beta_1 = \operatorname{arc\,cos}\left\{\frac{t_1 + \sqrt{t_1^2+8c^2}}{4c}\right\}$ und
$\beta = 2 \operatorname{arc\,cos}\left\{\frac{t_1 + \sqrt{t_1^2+8c^2}}{4c}\right\}$.

19) $a = 7\ m$, $b = 24\ m$, $c = 25\ m$, $f = 84\ m^2$.
$\alpha = 16^0\,15'\,36{\cdot}73''$, $\beta = 73^0\,44'\,23{\cdot}27''$ $(16^0\,15'\,37'')$.

20) $687{\cdot}741\ m$ $(687{\cdot}74)$.

21) $a_1 = 44 = b_2$, $a_2 = 33 = b_1$, $c = 55$, $f = 726\ m^2$.
$\alpha_1 = 53^0\,7'\,48{\cdot}36'' = \beta_2$, $\alpha_2 = 36^0\,52'\,11{\cdot}64'' = \beta_1$ $(53^0\,7'\,50'')$.

22) $a + b = 14$, $a^2 + \frac{b^2}{4} = 52$, $b = \frac{56 \pm 16}{5}$, es kann nur das negative Zeichen gelten, da sonst a negativ wäre: $b = 8\,m$, $a = 6\,m$, $c = 10\,m$.
$f = 24\ m^2$, $\beta = 53^0\,7'\,48{\cdot}36''$ $(53^0\,7'\,50'')$.

23) $4006{\cdot}7\ m$ $(4006{\cdot}5)$.

24) $200{\cdot}49\ km$; $126184\ km^2$.

25) $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{a-\varrho}$, $\beta = 45^0\,37'\,37''$, $f = 80345$ $(80345)\ m^2$
$b = 405{\cdot}274$ $(405{\cdot}27)$, $c = 566{\cdot}974$ $(566{\cdot}97)$.

26) $5{\cdot}06906$ $(5{\cdot}07)\ m^2$.

27) $401{\cdot}227$ $(401{\cdot}29)\ m^2$.

Digitized by Google

28) $12 \cdot 5\ m$.

29) $b = d\sqrt{\frac{\pi\alpha}{45 \sin 2\alpha}} = 76 \cdot 3672$ (76·367).

30) $R = 13166 \cdot 986\ m$, $F = 23081780\ m^2$ (23082000).
$\alpha = 15^0\ 15'\ 22 \cdot 7''$ ($15^0\ 15'\ 23''$).

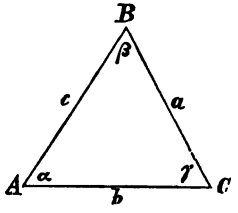
31) Verbindet man die Mittelpunkte der drei Kreise, so erhält man ein rechtwinkeliges Dreieck.
$F = 0 \cdot 46427$ (0·4643) m^2.

32) $25^0\ 43'\ 40''$.

33) 309·968 (309·97) m.

34) $49^0\ 59'\ 56 \cdot 5''$, $45^0\ 59'\ 56 \cdot 5''$ (50^0, 46^0).

§ 20. Schiefwinkeliges Dreieck.



Die drei Seiten seien bezeichnet mit a, b, c, die Winkel mit α, β, γ; die von A, B, C auf die gegenüberliegenden Seiten (oder deren Verlängerungen) gefällten Senkrechten seien h_a, h_b, h_c; die Transversalen, welche die Winkel α, β, γ halbieren, seien t_α, t_β, t_γ, die Transversalen, welche die Seiten a, b, c halbieren, T_a, T_b, T_c, f sei der Flächeninhalt, r der Radius des eingeschriebenen und R der Radius des umgeschriebenen Kreises.

Seiten und Winkel.

1) Zwei Seiten eines Dreieckes verhalten sich wie $a : b = 5 : 12$, ihre gegenüberliegenden Winkel wie $\alpha : \beta = 1 : 3$; wie groß sind die drei Winkel des Dreieckes?

2) Zwei Seiten eines Dreieckes sind $a = 8$, $b = 5$ und der der Seite a gegenüberliegende Winkel ist doppelt so groß wie der Winkel, welcher der Seite b gegenüberliegt. Wie groß ist c?

3) Wenn die Sonnenstrahlen den horizontalen Erdboden unter $\alpha = 55^0\ 5'\ 58''$ treffen, so wirft ein Haus, welches dicht am Fuße eines Bergabhanges steht, auf die Böschung desselben einen $l = 7\ m$ langen Schatten; wie hoch ist das Haus, wenn die Böschung des Berges in der Richtung des Schattens unter $\beta = 25^0$ ansteigt?

4) [b, $\alpha = \gamma$.] Die Grundlinie b eines gleichschenkeligen Dreieckes mit dem Basiswinkel α ist nach beiden Seiten um den Schenkel verlängert, und die Endpunkte sind dann mit der Spitze ver-

Digitized by Google

bunden; wie groß sind die Seiten und wie groß ist die Fläche des neu entstandenen Dreieckes?

1. $b = 15{\cdot}368\ cm$, $\alpha = 11^\circ\ 25'\ 36''$,
2. $b = 88\ cm$, $\alpha = 84^\circ\ 48'$.

5) Ein Beobachter, dessen Standpunkt in der Höhe $h = 12{\cdot}192\ m$ über dem Niveau eines Teiches sich befindet, sieht eine Wolke zweimal, einmal direkt und einmal als Spiegelbild durch Reflexion am Wasserniveau. Der direkte Strahl von der Wolke bildet mit dem Horizonte des Beobachters den Winkel $\alpha = 42^\circ\ 56'\ 37''$, der reflektierte Strahl bildet mit demselben Horizonte den Winkel $\beta = 51^\circ\ 19'\ 13''$. Wie hoch ist die Wolke über dem Niveau des Teiches?

6) Am Ufer eines Flusses steht ein Turm mit zwei senkrecht übereinander liegenden Öffnungen, deren Mitten $a = 10\ m$ voneinander entfernt sind. Die Visierlinien von den bezeichneten Punkten nach dem jenseitigen Ufer bilden mit der Vertikalen die Winkel $\varphi = 80^\circ\ 21'$, $\psi = 76^\circ\ 53'$. Wie breit ist der Fluß?

7) Über einer Horizontalebene steht eine nahezu kugelförmige Wolke. Ihr Mittelpunkt wird an zwei südlicher gelegenen Orten A und B gleichzeitig beobachtet. Der bei A aufgestellte Beobachter sieht denselben in einer Vertikalebene, die von seinem Meridian um 50° abweicht, ostwärts in einer Elevation von 30°. Der andere Beobachter, der seinen Standpunkt $4000\ m$ südwärts von A genommen, findet den Mittelpunkt genau in einer Vertikalebene, die vom gemeinschaftlichen Meridiane ostwärts nur 40° abweicht. Wie hoch steht die Wolke über der Horizontalebene, wie weit ist sie von jedem der Standpunkte entfernt und in welcher Elevation mußte der zweite Beobachter im Augenblicke der gemeinsamen Beobachtung den Mittelpunkt der Wolke gesehen haben?

8) Auf einem Abhange steht ein Obelisk. Um die Höhe desselben zu finden, mißt jemand von seinem Fußpunkte aus den Abhang herab eine Strecke $= 7{\cdot}6\ m$ und beobachtet an deren Ende den Winkel, welchen sie mit der zur Spitze des Obelisken gehenden Linie bildet: $49^\circ\ 37'\ 20{\cdot}76''$. Hierauf mißt er von seinem Standpunkte an in der vorher angenommenen Richtung eine Strecke $= 6\ m$ und beobachtet an ihrem Ende ebenso den Winkel $= 34^\circ\ 32'\ 34{\cdot}03''$. Wie groß ist die Höhe des Obelisken?

9) Von einem Dreiecke ist die Seite $a = 10$, die Summe der beiden anliegenden Winkel $\beta + \gamma = 105^\circ$ und das Verhältnis

Digitized by Google

der Tangenten $\operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma = \sqrt{3} : 1$; die Seiten und Winkel sind zu bestimmen.

10) I. Es ist die Höhe eines Turmes aus einer gegebenen horizontalen Standlinie, deren Verlängerung durch den Fuß des Turmes geht, zu bestimmen. Die Standlinie mißt 25 *m*, die Visierlinien von den Endpunkten dieser Standlinie zur Spitze des Turmes bilden mit der Horizontalebene die Winkel $\alpha = 37^\circ\,48'\,12''$, $\gamma = 52^\circ\,27'\,39''$; dabei ist zu berücksichtigen, daß das Winkelmeßinstrument selbst eine Höhe von 1 *m* hat.
II. Wie hoch ist ein Berg, wenn für diesen statt der angeführten Größen folgende gelten: 732·05 *m*, $\alpha = 30^\circ$, $\gamma = 45^\circ$ und auch jetzt das Winkelmeßinstrument eine Höhe von 1 *m* hat?

11) I. Wie hoch ist ein Berg, von dessen Spitze die Endpunkte einer 100 *m* langen horizontalen Strecke, welche mit der durch die Spitze gehenden Vertikalen in einer Ebene liegt, unter den Depressionswinkeln $63^\circ\,26'\,6''$ und $71^\circ\,33'\,54''$ erscheinen?
II. Wie hoch ist eine Statue, wenn für diese statt der angeführten Größen folgende gelten: 36 *m*, $23^\circ\,27'$, $69^\circ\,42'\,30''$?

12) Um die Höhe eines Turmes MN, nach dessen Fußpunkt man keine horizontale Standlinie abstecken kann, zu bestimmen, hat man die sich gegen den Horizont unter einem Winkel POM neigende und nach dem Fußpunkte des Turmes gerichtete Standlinie MO, sowie den Winkel PON gemessen; wie groß ist die Höhe des Turmes?
$MO = 67\ m$; $< POM = 19^\circ\,18'\,40''$; $< PON = 46^\circ\,22'\,52''$.

13) I. Der Sehwinkel, unter dem ein mit der Gondel $h = 15\ m$ hoher Luftballon erscheint, wird auf $^1/_2{}^\circ$ und der Elevationswinkel der Gondel auf 15° geschätzt. Wie hoch schwebt nach dieser Annahme die Gondel über der Erde und in welcher Entfernung vom Beobachter?
II. Wenn aber der Ballon mit der Gondel eine Höhe von 23 *m* hat, ihr Sehwinkel $^1/_2{}^\circ$ und der Elevationswinkel der Gondel 50° beträgt, wie hoch schwebt dann die Gondel über der Erde?

14) [*a*, *b*, γ.] Von einem Dreiecke seien zwei Seiten *a* und *b* und der von ihnen eingeschlossene Winkel γ bekannt, wie groß sind die übrigen Stücke und wie groß ist der Flächeninhalt des Dreieckes?
1. $a = 150\ mm$; $b = 175\ mm$; $\gamma = 54^\circ\,20'\,15''$.
2. $a = 456{\cdot}437\ m$; $b = 733{\cdot}852\ m$; $\gamma = 75^\circ\,38'\,19''$.

15) Die Entfernung der Stadt *A* von *C* beträgt in der Luftlinie 289 *km*, die der Stadt *B* von *C* 601 *km*; der Winkel, den die

Digitized by Google

zwei Linien bei C einschließen, ist $100^0\ 19'\ 6{\cdot}4''$, wie weit ist A von B entfernt?

16) Zwei Seiten eines Dreieckes sind $a = 3\sqrt{3}$, $b = 6$; der der Seite a gegenüberliegende Winkel ist doppelt so groß wie der Winkel γ, welcher der Seite c gegenüberliegt; wie groß ist γ und wie groß c?

17) [$a = 36$, $b = 29$, $\gamma = 43^0\ 36'\ 10''$.] In welche Teile wird der Winkel γ durch die Schwerlinie T_c geteilt und wie groß ist T_c?

18) [$a = c$, β.] Von einem gleichschenkeligen Dreiecke kennt man den Schenkel $a = 1{\cdot}2345\ m$ und den Winkel $\beta = 95^0\ 27'\ 14{\cdot}8''$; es ist die Seite b, der Flächeninhalt f, der Radius r des eingeschriebenen und der Radius R des umgeschriebenen Kreises zu berechnen. (Allgemein und speziell durchzuführen.)

19) [$a = c$, β.] In einem gleichschenkeligen Dreiecke sei ein Schenkel a und der Winkel β gegeben. Zu der Grundlinie sei eine parallele Transversale gezogen, welche gleich der Summe der unteren Abschnitte der Schenkel ist. Wie lang ist diese Parallele?

$$a = 40{\cdot}281, \quad \beta = 27^0\ 20'.$$

20) [a, b, γ.] Von einer Straße führen rechts und links zwei gerade Seitenwege fort, der erste unter einem Winkel von 30^0, der zweite unter einem Winkel von 64^0. Auf dem ersten kommt man nach einem Wege von $3^1/_2\ km$ nach dem Orte A und auf dem zweiten nach einem Wege von $5^1/_8\ km$ nach jenem B. Wie weit sind die Orte A und B voneinander entfernt?

21) [a, b, γ.] Von einer geraden Straße gehen zwei gerade Wege ab, der erste vom Punkte A unter einem Winkel von 30^0 links, der andere vom Punkte B unter einem Winkel von 60^0 rechts, aber erst $1^1/_2\ km$ später. Auf dem ersten trifft man nach einem Wege von $4\ km$ den Ort D, auf dem zweiten nach $2^1/_2\ km$ den Ort C. Beide Orte C und D sind durch einen geraden Weg verbunden, wie lang ist dieser?

22) Die Seite eines gleichseitigen Dreieckes ist in drei gleiche Teile geteilt und der eine Teilungspunkt mit der gegenüberliegenden Ecke verbunden. In welche Teile zerlegt diese Transversale den Winkel und wie verhält sie sich zur Seite? (Das Seitenverhältnis ist auch planimetrisch zu ermitteln.)

23) Der Umfang eines Dreieckes ist 70 und $a : b = 63 : 52$, der von a und b eingeschlossene Winkel γ beträgt $22^0\ 37'\ 10''$. Das Dreieck ist zu berechnen.

Digitized by Google

24) [a, b, α, $a < b$.] Von einem Dreiecke sind die beiden Seiten a und b und der der Seite a gegenüberliegende Winkel gegeben. Es ist die dritte Seite, die beiden andern Winkel und der Flächeninhalt dieses Dreieckes zu bestimmen.

$$a = 17{\cdot}77\ m,\ b = 18{\cdot}6\ m;\quad \alpha = 72^0\ 18'\ 6{\cdot}3''.$$

25) [a, b, c.] 1. $a = 332{\cdot}6$, $b = 418{\cdot}2$, $c = 374{\cdot}5$.
Wie groß sind die Winkel und der Flächeninhalt dieses Dreieckes?
2. $a = 4{\cdot}5683$, $b = 5{\cdot}3275$, $c = 6{\cdot}3274$.

26$_a$) Auf zwei sich unter einem Winkel von 60° schneidenden Geraden liegen die Punkte A und B, deren gegenseitige Entfernung 31 m beträgt. Schiebt man den Punkt A 20 m weiter gegen den Schnittpunkt der Geraden hin, so beträgt die Entfernung zwischen A und B noch 21 m. Wie weit sind A und B vom Schnittpunkte entfernt?

26$_b$) Von einem Dreiecke sind die drei Seiten a, b, c gegeben; wie groß ist der Inhalt des Dreieckes, dessen Ecken die Berührungspunkte des dem Dreiecke abc eingeschriebenen Kreises sind? Speziell $a = 195$, $b = 169$, $c = 182$.

27) In einem Dreiecke sind die Summe zweier Seiten $a + b = s$ und die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel α und β gegeben; das Dreieck ist aufzulösen.
1. $a + b = 650\ dm$, $\alpha = 65^0\ 28'\ 13{\cdot}6''$, $\beta = 42^0\ 30'\ 3{\cdot}6''$.
2. $a + b = 134{\cdot}78\ m$, $\alpha = 39^0\ 14'\ 37''$, $\beta = 54^0\ 18'\ 49''$.

28$_a$) [a, $b + c$, α.] 1. In einem Dreiecke ist eine Seite a, der ihr gegenüberliegende Winkel α und die Summe s der beiden anderen Seiten gegeben. Das Dreieck ist zu berechnen und zu konstruieren.
2. $a = 6\ m$, $s = 18\ m$, $\alpha = 36^0\ 52'\ 10''$.
3. $a = 26\ m$; $s = 30\ m$; $\alpha = 100^0\ 12'$.

28$_b$) Ein Dreieck ist aufzulösen, wenn $a = 2{\cdot}4$, $b + c = 7{\cdot}2$, $h_a = 1{\cdot}2$ gegeben sind.

29) [a, $b - c$, α.] In einem Dreiecke ist eine Seite a, der ihr gegenüberliegende Winkel α und die Differenz der beiden anderen Seiten $b - c = d$ gegeben; das Dreieck ist aufzulösen und aus den gegebenen Stücken zu konstruieren.
1. $a = 671{\cdot}28\ dm$, $b - c = 373\ dm$; $\alpha = 63^0\ 35'\ 30''$.
2. $a = 75{\cdot}924\ dm$, $b - c = 37{\cdot}962\ dm$; $\alpha = 40^0$.

30) [a, $b + c$, β.] In einem Dreiecke ist eine Seite a, ein ihr anliegender Winkel β und die Summe der beiden anderen Seiten $b + c$ gegeben. Es sind die Seiten und Winkel dieses Dreieckes zu berechnen für den Fall, daß:
1. $a = 18$, $b + c = 30$; $\beta = 60^0\ 40'$.
2. $a = 671$, $b + c = 1123$; $\beta = 86^0\ 23'\ 10''$.

Digitized by Google

31) $[a + b + c;\ \alpha, \beta.]$ 1. In einem Dreiecke ist die Summe der drei Seiten $a + b + c = 1112 \cdot 2$ Längeneinheiten und zwei Winkel $\alpha = 49^0\ 13'\ 27''$; $\beta = 71^0\ 53'\ 15''$ gegeben. Das Dreieck ist aufzulösen und aus den gegebenen Stücken zu konstruieren.
2. $a + b + c = 84$; $\alpha = 53^0\ 7'\ 48''$, $\beta = 67^0\ 22'\ 48''$.
3. $a + b + c = 489 \cdot 75$; $\alpha = 34^0\ 19'$, $\beta = 75^0\ 57'\ 20''$.

32) $a + b + c = 4734\ m$, $\alpha = 74^0\ 42'\ 20''$, $\beta = 34^0\ 24'\ 40''$; wie groß ist der Radius des eingeschriebenen Kreises?

33) Der Umfang eines Dreieckes beträgt $u = 12\ m$, die Winkel an der Basis sind $\alpha = 47^0\ 17'$, $\beta = 61^0\ 40'$. Wie groß sind die Seiten, die Fläche, der Radius des ein- und umgeschriebenen Kreises?

34) Von einem Dreiecke ist die Seite a, das Verhältnis der beiden anderen Seiten $b : c = m : n$ und die Differenz der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel $\beta - \gamma = \delta$ gegeben. Es ist das Dreieck zu berechnen:
1. $a = 87 \cdot 0014\ m$; $m : n = 9 : 8$; $\delta = 42^0\ 28'$.
2. $a = 27\ m$; $m : n = 17 : 10$; $\delta = 98^0\ 47'\ 41''$.

In Verbindung mit Gleichungen.

35) Die Seiten eines ebenen Dreieckes genügen folgenden Bedingungsgleichungen: $b : c = 1 : 2$; $a^2 + b^2 = 4$; $a^2 - b^2 = 2$, es sind die Seiten und Winkel zu berechnen.

36) In einem Dreiecke beträgt der Umfang 21 m, die Basis ist um 5 m kleiner als die beiden anderen Seiten zusammengenommen und die Summe der Quadrate der Maßzahlen der drei Seiten beträgt 149. Wie groß sind die drei Seiten und Winkel dieses Dreieckes? Wie groß ist der Flächeninhalt desselben?

37) In einem Dreiecke beträgt der Umfang 27 m, die Summe der drei möglichen Produkte aus den Maßzahlen der Seiten 242 und das Quadrat der Maßzahl der Basis ist um 45 kleiner als die Summe der Quadrate der Maßzahlen der beiden anderen Seiten. Wie groß sind Seiten, Winkel und Flächeninhalt des Dreieckes? Wie groß ist der Radius des dem Dreiecke umgeschriebenen Kreises?

38) Von einem Dreiecke sind gegeben: die Summe der Quadrate der Maßzahlen zweier Seiten $a^2 + b^2 = 2650$, die Differenz der Quadrate der Maßzahlen derselben zwei Seiten $a^2 - b^2 = 1400$ und der der Seite a gegenüberliegende Winkel $\alpha = 68^0\ 29'\ 53''$, die übrigen Stücke des Dreieckes sind zu berechnen.

Digitized by Google

39) Die Summe der Maßzahlen zweier Seiten beträgt 19 m, die Summe der Quadrate derselben 185, der von diesen zwei Seiten eingeschlossene Winkel beträgt $67^0\,34'\,17{\cdot}5''$. Wie groß sind die verschiedenen Stücke dieses Dreieckes?

40) Ein Dreieck ist zu berechnen aus der Summe der Basis und eines Schenkels $a + b$, dem Winkel, den der Schenkel mit der Höhe auf die Basis bildet e und der dritten Seite c,
Beispiel: $a + b = 12{\cdot}918\ m$, $c = 6{\cdot}31\ m$, $e = 34^0\,19'\,56''$.

41) Die drei Seiten eines Dreieckes verhalten sich wie 5 : 8 : 9 und der Flächeninhalt der drei Quadrate, welche über den Dreiecksseiten errichtet werden können, beträgt 680 m^2. Wie groß sind die Seiten und Winkel dieses Dreieckes? Wie groß ist der Radius des diesem Dreiecke eingeschriebenen Kreises?

Fläche, Seiten und Winkel.

42) [f, a, α.] Von einem schiefwinkeligen Dreiecke kennt man die Seite a, ihren gegenüberliegenden Winkel α und den Flächeninhalt f. Wie groß sind die beiden anderen Seiten?
1. $a = 13\ m$, $\alpha = 31^0\,39'\,40''$; $f = 122{\cdot}3\ m^2$.
2. $a = 527\ m$, $\alpha = 95^0\,17'\,6''$; $f = 63240\ m^2$.

43) [f, a, γ.] 1. Der Flächeninhalt eines Dreieckes ist 721 cm^2, eine Seite 121 cm und ein dieser Seite anliegender Winkel $69^0\,28'$. Wie groß sind die beiden anderen Seiten und Winkel?
2. $f = 1929350$, $a = 1065{\cdot}513$; $\gamma = 72^0\,41'\,20''$.

44) [f, $b + c$, α.] Von einem Dreiecke sei der Flächeninhalt $f = 84\ m^2$, die Summe der zwei Seiten $b + c = 28\ m$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel $\alpha = 59^0\,29'\,23''$ gegeben, es sollen die Seiten und Winkel dieses Dreieckes berechnet werden.

45$_a$) [f, a, b.] Der Flächeninhalt eines Dreieckes sei $413{\cdot}57\ m^2$, eine Seite $a = 68$ und eine andere Seite $b = 28{\cdot}5\ m$; wie groß sind die drei Winkel und die dritte Seite dieses Dreieckes?

45$_b$) Das Dreieck ist aufzulösen, von welchem $a = 1$, $b + c = 2$ und $f = {}^1/_4$ gegeben ist.

46) [f, α, β.] Der Flächeninhalt f, sowie zwei Winkel des Dreieckes α und β seien gegeben; es sollen daraus die drei Seiten berechnet werden. Speziell für $f = 9351{\cdot}75\ m^2$.
$$\alpha = 100^0\,43'\,14''; \quad \beta = 55^0\,8'\,10''.$$

47) In einem Dreiecke, in welchem jeder der drei Winkel ein spitzer ist, beträgt die Summe der zwei Seiten $a + b = 13\ m$, die Summe

Digitized by Google

der Quadrate der Maßzahlen dieser zwei Seiten $a^2 + b^2 = 89$ und der Flächeninhalt des Dreieckes 19 m^2. Wie groß sind die Seiten und Winkel dieses Dreieckes?

48) In einem Dreiecke beträgt die Summe der Quadrate zweier Seiten 976, der von den zwei Seiten eingeschlossene Winkel ist 63° 35′ 30″; wie groß sind die Seiten und Winkel des Dreieckes, wenn der Flächeninhalt desselben 214·955 m^2 beträgt?

Höhen des Dreieckes.

49) [h_a, h_b, h_c.] Ein Dreieck ist aus seinen drei Höhen zu berechnen und zu konstruieren.
1. $h_a = 10\ m$, $h_b = 12\ m$, $h_c = 14\ m$.
2. $h_a = {}^1/_3\ m$, $h_b = {}^1/_4\ m$, $h_c = {}^1/_5\ m$.

50) [h_a, h_b, γ.] Von einem Dreiecke sind die Höhen auf zwei Seiten $h_a = 4{\cdot}8\ m$, $h_b = 3\ m$, sowie der der dritten Seite gegenüberliegende Winkel $\gamma = 36° 52′ 11{\cdot}6″$ gegeben, es sind die Seiten, die Winkel und der Flächeninhalt dieses Dreieckes zu berechnen und das Dreieck zu konstruieren.

51) [h_b, α, γ.] 1. In einem Dreiecke beträgt die Höhe auf die Basis $h_b = 432\ m$, die beiden Winkel an der Basis $\alpha = 32° 14′ 30″$, $\gamma = 44° 22′ 40″$. Die einzelnen Stücke des Dreieckes sollen berechnet und das Dreieck aus den angegebenen Stücken konstruiert werden.
2. $h_b = 740{\cdot}15\ m$; $\alpha = 80° 56′ 9″$, $\gamma = 55° 30{\cdot}3′$.
3. $h_b = 43{\cdot}8\ m$; $\alpha = 47° 28′ 25″$, $\gamma = 95° 39′ 20″$.

52) [u, h_b, $a = c$.] Es ist der Umfang u und die Höhe h_b auf die Basis eines gleichschenkeligen Dreieckes gegeben; man soll das Dreieck berechnen und konstruieren. $u = 980\ m$, $h_b = 350\ m$.

53) [$h_a + h_b$, α, $a = c$.] Ein gleichschenkeliges Dreieck aus dem Winkel an der Grundlinie und der Summe der beiden Höhen zu berechnen und zu konstruieren.
Beispiel $h_a + h_b = 2$; $< \alpha = 67° 30′$.

54) [c, $h_a + h_c$, β.] In einem Dreiecke ist eine Seite $c = 15\ m$, die Summe der Höhen auf die Seiten a und c beträgt 60 m und der von den Seiten a und c eingeschlossene Winkel β ist 30°; das Dreieck ist aufzulösen.

55) [b, $h_b + a$, $a = c$.] Die Summe $s = a + h_b$ aus dem Schenkel und der Höhe eines gleichschenkeligen Dreieckes und die Basis b sind gegeben. Man soll den Schenkel, die Höhe und die Winkel

Digitized by Google

des Dreieckes berechnen und das Dreieck aus den gegebenen Stücken konstruieren.

Beispiel: $a + h_b = 18\ m$; $b = 12\ m$.

56) [h_b, f, $b - h_b$.] Über einer gemeinschaftlichen Basis seien auf einer und derselben Seite zwei gleichschenkelige Dreiecke errichtet; der Abstand der beiden Scheitelpunkte betrage 3 m und die Höhe des größeren Dreieckes sei um 2 m kleiner als die Basis. Dreht man ein Dreieck um die Basis derart, daß dann die Dreiecke zu entgegengesetzten Seiten der Basis zu liegen kommen, so beträgt die Fläche der eingeschlossenen Figur 36 m^2. Wie groß ist der Flächeninhalt eines jeden Dreieckes? Wie groß sind die Schenkel, und welche Winkel schließen sie mit der Basis ein?

57) [h_b, f; u.] Von einem Dreiecke kennt man den Umfang u, den Inhalt f und die Höhe auf die Basis h_b, das Dreieck ist allgemein aufzulösen.

Beispiel: $h_b = 2{\cdot}1\ m$, $u = 9{\cdot}8\ m$, $f = 4{\cdot}2\ m^2$.

58) [h_b, $a + c$, γ.] Die Summe der zwei Schenkel betrage 170 m, der dem größeren Schenkel c gegenüberliegende Winkel γ sei 75° 24′ 36″ und die Höhe auf die dritte Seite h_b sei 68 m. Wie groß sind die einzelnen Stücke dieses Dreieckes?

59) [h_c, $a : c = m : n$, β.] Von einem Dreiecke verhalten sich die beiden Schenkel wie $a : c = m : n$, der von diesen beiden Schenkeln eingeschlossene Winkel β und die Höhe auf die Seite c seien gegeben. Es soll das Dreieck aufgelöst werden.

Beispiel: $a : c = 4 : 5$; $h_c = 14{\cdot}4\ dm$; $\beta = 36°\ 52'\ 10''$.

Radius des eingeschriebenen Kreises.

60) [ϱ, α, β.] Es ist ein Dreieck zu berechnen und zu konstruieren, wenn zwei Winkel α und β und der Halbmesser ϱ des eingeschriebenen Kreises gegeben sind.

1. $\alpha = 50°\ 12'\ 25''$, $\beta = 74°\ 4'\ 40''$, $\varrho = 250\ m$.
2. $\alpha = 58°\ 34'\ 52''$, $\beta = 48°\ 36'\ 54''$, $\varrho = 15{\cdot}327\ m$.

61) [ϱ, $a + b$, f.] Es ist ein Dreieck zu berechnen, wenn die Summe zweier Seiten $a + b$, der Flächeninhalt f und der Radius des eingeschriebenen Kreises bekannt sind.

$a + b = 7\ m$; $\varrho = 1\ m$; $f = 6\ m^2$.

Radius des umgeschriebenen Kreises.

62) Das Dreieck ist zu berechnen, von dem der Radius des umgeschriebenen Kreises $R = 1$ und das Verhältnis der Tangenten der drei Winkel $\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma = 4 : 2 : 1$ gegeben sind.

Digitized by Google

63) Das Dreieck ist zu berechnen, von dem man weiß, daß die Tangenten der Winkel drei aufeinander folgende ganze Zahlen sind und von dem noch der Radius R des umgeschriebenen Kreises gegeben ist.

64) [R, $a + b$, γ.] Wenn die Summe zweier Seiten $a + b = 384{\cdot}0071$, einer ihrer Gegenwinkel $\beta = 52^\circ\,38'\,10''$ und der Radius des umgeschriebenen Kreises $R = 126{\cdot}0114$ gegeben sind, wie groß sind dann die Seiten, Winkel und der Flächeninhalt des Dreieckes?

65) In einem Kreise schneiden sich zwei Durchmesser unter einem Winkel $\gamma = 36^\circ\,21'\,40''$. Verbindet man ihre Endpunkte, so ist die eine Verbindungssehne um $d = 409\ m$ größer als die andere. Wie groß ist der Durchmesser, und wie groß sind die Sehnen?

Seiten, Winkel und Abschnitte der Seiten.

66$_a$) Von einem Dreiecke ist der Winkel am Scheitel $\beta = 72^\circ\,24'\,38''$ und die von der Höhe auf der Basis gebildeten Abschnitte m und n bekannt, und zwar $m = 2{\cdot}5$ Meter; $n = 2{\cdot}2$ Meter. Das Dreieck ist allgemein und speziell für die angegebenen Werte aufzulösen.

66$_b$) Die Höhe eines Dreieckes teilt den Winkel an der Spitze in zwei Teile, die sich wie 1 : 2 und die Grundlinie in zwei Teile, die sich wie 2 : 5 verhalten. Wie groß ist der Winkel an der Spitze und wie verhalten sich die beiden anderen Seiten?

67) Von einem Dreiecke kennt man zwei Seiten a und c, sowie die Differenz der Abschnitte, welche durch die Höhe auf der dritten Seite gebildet werden. Wie groß sind die Seiten und Winkel, und wie groß ist der Radius des eingeschriebenen Kreises?
Beispiel: $a = 3{\cdot}57\ m$; $c = 2{\cdot}28\ m$, $m - n = d = 1{\cdot}72\ m$.

68) Von einem Dreiecke sind die Winkel $\alpha = 62^\circ\,57'\,40''$, $\beta = 60^\circ\,15'\,20''$ und der Unterschied $d = 18{\cdot}36$ der Segmente, in welche die Höhe die dem Winkel γ gegenüberliegende Seite teilt, gegeben; das Dreieck soll aufgelöst werden.

69) Von einem Dreiecke kennt man die Differenz zweier Seiten $D = a - b$, die Differenz ihrer Gegenwinkel $\delta = \alpha - \beta$ und endlich die Differenz der von der Höhe auf der dritten Seite gebildeten Abschnitte $d = m - n$; das Dreieck ist aufzulösen.
Beispiel: $a - b = 1{\cdot}5\ m$, $m - n = 1{\cdot}8\ m$; $\alpha - \beta = 8^\circ\,5'\,37{\cdot}5''$.

70) In einem Dreiecke teilt die Symmetrale des Winkels $\gamma = 67^\circ\,22'\,50''$ die gegenüberliegende Seite c in die Stücke $p = 20\ mm$ und $q = 52\ mm$; das Dreieck ist aufzulösen.

Digitized by Google

71) Von einem Dreiecke kennt man die vom Scheitel auf die Basis gefällte Höhe $h_b = 5\ m$, den Überschuß des Schenkels a über das diesem Schenkel anliegende Stück der Basis $a - n = 3\ m$, und den Flächeninhalt des Dreieckes $f = 15\ m^2$. Wie groß sind die Seiten und Winkel dieses Dreieckes? Wie groß ist der Radius des ein- und umgeschriebenen Kreises?

72) In einem Dreiecke ist die senkrechte Projektion des Schenkels a auf den Schenkel c : 12 m und die senkrechte Projektion des Schenkels c auf den Schenkel a : 9 m; die Basis selbst beträgt 45 m. Das Dreieck ist aufzulösen.

73) Die vom Scheitel auf die Basis gefällte Senkrechte beträgt 5 m und die senkrechten Abstände ihres Fußpunktes von den beiden Schenkeln sind 2 und 3 m lang. Das Dreieck ist zu berechnen.

74) Von einem Dreiecke ist die Basis b, die senkrechte Projektion des einen Schenkels c auf die Basis p, sowie die Summe der beiden Schenkel $s = a + c$ bekannt. Das Dreieck ist aufzulösen. Beispiel: $b = 5\ m$, $p = 2\ m$; $a + c = 6{\cdot}6896\ m$.

Winkelhalbierende Transversalen.

75) [t_α, α, β.] Von einem Dreiecke kennt man die Länge der den Winkel α halbierenden Transversalen $t_\alpha = 72{\cdot}5\ dm$, die Winkel $\alpha = 36^0\ 41'$ und $\beta = 105^0\ 9'\ 30''$. Das Dreieck ist aufzulösen.

76) Von einem Dreiecke sind die drei Seiten $a = 14$, $b = 12$, $c = 10\ m$; wie lang ist die den Winkel β halbierende Transversale?

77) [t_β, a, β.] Die Länge der den Winkel am Scheitel halbierenden Transversalen t_β sei $10{\cdot}245\ m$, der eine Schenkel a betrage 14 m und der der Basis gegenüberliegende Winkel sei $57^0\ 7'\ 18''$. Wie groß sind die drei Seiten und Winkel des Dreieckes?

78$_a$) [t_α, b, c.] Von einem Dreiecke sind zwei Seiten b und c bekannt, sowie die Linie, welche den von den zwei Seiten eingeschlossenen Winkel α halbiert, t_α. Das Dreieck soll aufgelöst werden.

$$t_\alpha = 3\ cm;\quad b = 4\ cm;\quad c = 6\ cm.$$

78$_b$) [t_γ, p, q.] Die Symmetrale des Winkels γ sei $t = 157{\cdot}214$ und teile die gegenüberliegende Seite c in die Stücke $p = 84{\cdot}5$ und $q = 97{\cdot}5$; das Dreieck ist aufzulösen.

Seitenhalbierende Transversalen.

79) [T_a, b, c.] Ein Dreieck ist aufzulösen und zu konstruieren, von dem die zwei Seiten $b = 26$ und $c = 22\ m$ und die Seitenhalbierende $T_a = 13{\cdot}416\ m$ gegeben sind.

Digitized by Google

80) Von einem Dreiecke kennt man die Basis $b = 5\ m$, die Seitenhalbierende $T_b = 3\ m$ und den spitzen Winkel, welchen diese Transversale mit der Basis einschließt: $\gamma_1 = 75^0\ 36'\ 40''$. Es sollen die anderen Stücke des Dreieckes bestimmt werden.

81) Von einem Dreiecke kennt man zwei Schwerlinien $T_b = 12\ m$ $T_a = 15\ m$ und den von diesen Schwerlinien eingeschlossenen Winkel: $118^0\ 20'\ 17{\cdot}8''$. Das Dreieck ist aufzulösen und zu konstruieren.

82) Zieht man vom Scheitel des Dreieckes die Höhe und die Schwerlinie auf die Basis, so schließen beide einen Winkel von $\delta = 16^0\ 15'\ 36{\cdot}73''$ ein und letztere ist um $1\ dm$ länger als erstere. Die verschiedenen Stücke des Dreieckes sollen berechnet werden, wenn man außerdem noch weiß, daß der größere Schenkel den Winkel $\gamma = 45^0 - \frac{\delta}{2}$ mit der Basis einschließt.

83) Zwischen den Schenkeln eines Winkels α einen Punkt von solcher Lage zu finden, daß seine Entfernung vom Scheitel gleich der Strecke a und die Summe seiner Entfernungen von den Schenkeln gleich der Strecke b ist; allgemein trigonometrisch und speziell für den Fall, daß $\alpha = 90^0$, $a = 7\ dm$, $b = 9\ dm$ ist.

84) Wenn man den Radius eines Kreises von $r = 4\ m$ um $1\ m$ verlängert und von dem erhaltenen Punkte eine Sekante zeichnet, deren innerhalb des Kreises liegender Abschnitt doppelt so groß ist als der äußere, so entsteht die Frage, welchen Winkel die Richtung der Sekante mit dem gezogenen Radius bildet?

85) Die geradlinige Bahn eines Blitzes werde unter dem Gesichtswinkel $\alpha = 43^0\ 36'\ 10''$ gesehen. Die Zeit zwischen Blitz und Donner sei $a = 17$ Sekunden und die Dauer des Donners sei $b = 2^1/_3$ Sekunden. Wie lang ist der vom Blitze durcheilte Weg, wenn die Geschwindigkeit des Schalles $333\ m$ pro Sekunde ist?

86) Ein Meteor wird an einem Orte, der unter dem 9^0 nördlicher Breite liegt, genau in nördlicher Richtung $9^0\ 37'$ über dem Horizonte beobachtet. Gleichzeitig wird dasselbe von einem Orte, der unter demselben Meridian liegt, aber eine nördliche Breite von $37^0\ 14'$ hat, genau in südlicher Richtung $13^0\ 12'$ über dem Horizonte beobachtet. Wie weit von der Erdoberfläche ist dasselbe entfernt?

87) Ein Meteor wird zugleich an zwei Orten A und B gesehen, welche in demselben Meridian liegen und $30^0\ 40'$ voneinander entfernt sind. In A ergibt sich für das Meteor die Zenitdistanz (gebildet von der Richtung nach dem Zenit und dem Meteor)

Digitized by Google

$\alpha = 82^0\ 24'\ 10''$, in B dagegen $\beta = 36^0\ 18'$. Wie groß ist die Entfernung des Meteors vom Mittelpunkte der Erde? (Erdradius = 859·5 Meilen.)

§ 20a.

1) $\alpha = 22^0\ 47'\ 11''$, $\beta = 68^0\ 21'\ 33''$, $\gamma = 88^0\ 51'\ 16''$.
2) $c = 7{\cdot}8$.
3) 12·0523 (12·052) *m*.
4) α) 31·0468 *cm*, 15·6009 *cm*, 15·6009 *cm* (31·047, 15·601, 15·601), $f = 24{\cdot}1092$ (24·109) cm^2.
   β) 1058·9534, 717·0057, 717·0057 (1058·9, 717, 717) *cm*, $f = 255990{\cdot}65$ (255980) cm^2.
5) 83·4586 (83·458) *m*. 6) 158·7835 (158·79) *m*.
7) Die Entfernung des Fußpunktes der Wolke beträgt 14806·7 *m* und 17645·9 *m*, die Höhe 8548·63 *m*. $\beta = 25^0\ 50'\ 53''$. Die Entfernung des Mittelpunktes beträgt: 17097·3 *m*, 19607·6 *m* (14807, 17646, 8549, 17097, 19607; $25^0\ 50'\ 54''$).
8) α) 10 *m*; β) 20·7186 (20·719) *m*.
9) $a = 10$, $b = 8{\cdot}9658$, $c = 7{\cdot}3207$
   $\alpha = 75^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 45^0$.
10) α) 49·0193 (49·02) *m*; β) 1001 *m*.
11) α) 600·0076 (600·01) *m*; β) 18·5989 (18·599) *m*.
12) 88·5113 (88·511) *m*.
13) α) 428·7026 *m* über der Erde und 1656·38 *m* vom Beobachter entfernt (428·71, 1656·4);
   β) 1284·252 *m* (1284·24).

Eine Unrichtigkeit ist insofern vorhanden, als der eine von den Strahlen, welche mit dem Auge den Winkel $^1/_2{}^0$ bilden, Tangente an einen Kreis ist, also denselben nicht im höchsten Punkte berührt, wie hier der Daten wegen angenommen wurde.

14) 1. $c = 150{\cdot}057\ mm$; $\alpha = 54^0\ 18'\ 26{\cdot}53''$ (150·06, $54^0\ 18'\ 26''$); $f = 10663{\cdot}6$ (10664) mm^2.
   2. $c = 762{\cdot}043\ m$; $\alpha = 35^0\ 28'\ 4{\cdot}6''$ (762·05, $35^0\ 28'\ 4{\cdot}5''$); $f = 162245$ (162240) m^2.
15) 712 *km*.
16) $\gamma = 30^0$, $c = 3$.
17) $x = 24^0\ 16'\ 5''$, $y = 19^0\ 20'\ 5''$; $T = 30{\cdot}203$.
18) $\alpha = \gamma = 42^0\ 16'\ 22{\cdot}6''$; $b = 1{\cdot}8269\ m$; $f = 0{\cdot}758545\ m^2$; $r = 0{\cdot}353145\ m$; $R = 0{\cdot}91762\ m$ (1·827, 0·7586, 0·3532, 0·9176).

Digitized by Google

19) Die Parallele ist $\frac{a \sin \frac{\beta}{2}}{\sin^2\left(45 + \frac{\beta}{4}\right)} = 15{\cdot}3968\ (15{\cdot}397)\ m.$

20) $6{\cdot}5802\ km.$

21) $4{\cdot}2258\ km.$

22) $19^0\ 6'\ 23{\cdot}8''$, $21^0\ 47'\ 12{\cdot}4''$, $19^0\ 6'\ 23{\cdot}8''$.
$(19^0\ 6'\ 23'',\ 21^0\ 47'\ 14'',\ 19^0\ 6'\ 23'')$.

Ist die Seite s, so ist die Transversale $t = \frac{s}{3}\sqrt{7}$.

23) $\alpha = 104^0\ 15'\ 1''$, $\beta = 53^0\ 7'\ 49''$, $a = 31{\cdot}5$, $b = 26$; $c = 12{\cdot}5$;
$f = 157{\cdot}496$, $R = 16{\cdot}25$, $r = 4{\cdot}5$.

24) Es sind zwei Dreiecke möglich:
$\beta = 85^0\ 41'\ 12{\cdot}63''$, $\gamma = 22^0\ 0'\ 41{\cdot}07''$; $c = 6{\cdot}9909\ m$,
$f = 61{\cdot}9384\ m^2$ $(85^0\ 41',\ 6{\cdot}992,\ 61{\cdot}94)$.
$\beta = 94^0\ 18'\ 47{\cdot}37''$, $\gamma = 13^0\ 23'\ 6{\cdot}33''$; $c = 4{\cdot}3180\ m$,
$f = 38{\cdot}2571\ m^2$ $(94^0\ 19',\ 4{\cdot}318,\ 38{\cdot}256)$.

25) 1. $\alpha = 49^0\ 14'\ 13{\cdot}4''$, $\beta = 72^0\ 14'\ 29{\cdot}8''$; $f = 59311{\cdot}8\ m^2$
$(49^0\ 14'\ 13{\cdot}4'',\ 72^0\ 14'\ 30'',\ 59312)$.
2. $\alpha = 45^0\ 8'\ 52{\cdot}2''$, $\beta = 55^0\ 45'\ 56{\cdot}8''$; $f = 11{\cdot}9487\ m^2$.
$(45^0\ 8'\ 52'',\ 55^0\ 45'\ 55'',\ 11{\cdot}949)$.

26a) Der Punkt A ist $35\ m$, der Punkt B $24\ m$ vom Schnittpunkte entfernt $(34{\cdot}999,\ 24{\cdot}001)$.

26b) $f = \frac{2F^2}{abcs}$, wo F die Fläche des Dreieckes mit den Seiten a, b, c bedeutet. Speziell $f = 3494{\cdot}4$.

27) Mit Hilfe des Tangentensatzes, oder

$$a = \frac{(a+b)\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}; \quad c = \frac{(a+b)\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}; \quad f = \frac{ab\sin\gamma}{2};$$

1. $373,\ 277,\ 390,\ f = 49.140\ (49.139)\ dm^2$.
2. $59{\cdot}013,\ 75{\cdot}767,\ 93{\cdot}1039,\ f = 2231{\cdot}312\ m^2$
$(59{\cdot}012,\ 75{\cdot}768,\ 93{\cdot}1,\ 2231{\cdot}3)$.

28a) 1. $\beta + \gamma = 180 - \alpha$, $\beta - \gamma = 2\ \text{Arc. cos}\left[\frac{b+c}{a}\sin\frac{\alpha}{2}\right]$.
2. $\beta = 90^0$, $\gamma = 53^0\ 7'\ 50''$, $b = 10$, $c = 8$, $f = 24$.
3. $\beta = 67^0\ 37'\ 30''$, $\gamma = 12^0\ 10'\ 30''$; $b = 24{\cdot}4286$,
$c = 5{\cdot}5714$, $f = 66{\cdot}97534\ m^2$
$(67^0\ 37'\ 30'',\ 12^0\ 10'\ 30'',\ 24{\cdot}429,\ 5{\cdot}571,\ 66{\cdot}974)$.

28b) $b = 4{\cdot}7225$, $c = 2{\cdot}4775$,
$\alpha = 14^0\ 15'$, $\beta = 151^0\ 1'\ 48''$, $\gamma = 14^0\ 43'\ 12''$.

Digitized by Google

29) 1. $\beta = 86^\circ 23' 8{\cdot}88''$, $\gamma = 30^\circ 1' 21{\cdot}12''$ ($86^\circ 23' 10''$, $30^\circ 1' 20''$); $b = 748{\cdot}001\ dm$, $c = 375{\cdot}001\ dm$, $f = 125615\ dm^2$ (748, 375, 125614).

2. $\beta = 98^\circ 1' 27{\cdot}57''$, $\gamma = 41^\circ 58' 32{\cdot}43''$ ($98^\circ 1' 27{\cdot}5''$, $41^\circ 58' 32{\cdot}5''$); $b = 116{\cdot}96027\ m$, $c = 78{\cdot}99827\ m$, $f = 2969{\cdot}5693\ m^2$ ($116{\cdot}96$, 79, $2969{\cdot}6$).

30) $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{b+c-a}{b+c+a}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}$.

1. $\alpha = 73^\circ 3' 49{\cdot}9''$, $\gamma = 46^\circ 16' 10{\cdot}1''$ ($73^\circ 3' 48''$, $46^\circ 16' 12''$); $b = 16{\cdot}4035\ m$, $c = 13{\cdot}5965\ m$ ($16{\cdot}404$, $13{\cdot}596$).

2. $\alpha = 63^\circ 34' 9{\cdot}72''$, $\gamma = 30^\circ 2' 40{\cdot}28''$ ($63^\circ 34' 10''$, $30^\circ 2' 40''$); $b = 747{\cdot}834\ m$, $c = 375{\cdot}166\ m$ ($747{\cdot}84$, $375{\cdot}16$).

31) Da $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\beta}{2}.\cos\frac{\gamma}{2}$, so ist, wenn $\frac{a+b+c}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$ mit D bezeichnet wird:

$a = D.\sin\alpha$; $b = D.\sin\beta$; $c = D.\sin\gamma$ und $f = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ oder auch mit Hilfe der beiden Mollweideschen Formeln

1. $a = 328{\cdot}5006\ m$, $b = 412{\cdot}3001\ m$, $c = 371{\cdot}3992\ m$, $f = 57979{\cdot}63\ m^2$ ($328{\cdot}5$, $412{\cdot}3$, $371{\cdot}4$, 57980).

2. $a = 26\ m$, $b = 30\ m$, $c = 28\ m$, $f = 336\ m^2$.

3. $a = 111{\cdot}6959\ m$, $b = 192{\cdot}2021\ m$, $c = 185{\cdot}8520\ m$, $f = 10069{\cdot}19\ m^2$ ($111{\cdot}7$, $192{\cdot}2$, $185{\cdot}85$, $10069{\cdot}1$).

32) $r = 398{\cdot}1817$ ($398{\cdot}18$) m.

33) $a = 3{\cdot}44302$, $b = 4{\cdot}12478$, $c = 4{\cdot}43220$, $f = 6{\cdot}716$, $r = 1{\cdot}119334$, $R = 2{\cdot}34309$ ($3{\cdot}443$, $4{\cdot}1248$, $4{\cdot}4322$, $6{\cdot}716$, $1{\cdot}1193$, $2{\cdot}3431$).

34) 1. $\beta = 102^\circ 37' 27{\cdot}93''$, $\gamma = 60^\circ 9' 27{\cdot}93''$ ($102^\circ 37' 28''$, $60^\circ 9' 28''$); $b = 286{\cdot}8127\ m$, $c = 254{\cdot}9446\ m$, $f = 10822{\cdot}15\ m^2$ ($286{\cdot}81$, $254{\cdot}94$, $10822{\cdot}2$).

2. $\beta = 126^\circ 52' 11''$, $\gamma = 28^\circ 4' 21''$, $\alpha = 25^\circ 3' 28''$; $b = 51\ m$, $c = 30\ m$, $f = 324\ m^2$.

35) $a = \sqrt{3}$, $b = 1$, $c = 2$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $f = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

36) $a_1 = 8\ m$, $b_1 = 6\ m$, $c_1 = 7\ m$, oder $a_2 = 8\ m$, $b_2 = 7\ m$, $c_2 = 6\ m$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{5}\sqrt{15}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1}{9}\sqrt{15}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{7}\sqrt{15}$, $f = \frac{21}{4}\sqrt{15}$.

37) $a_1 = 10$, $b_1 = 9$, $c_1 = 8$; $a_2 = 10$, $b_2 = 8$, $c_2 = 9$.
$\alpha_1 = 71^\circ 47' 24{\cdot}2''$, $\beta_1 = 58^\circ 45' 5{\cdot}6''$, $\gamma_1 = 49^\circ 27' 30{\cdot}2''$;
$\alpha_2 = \alpha_1$, $\beta_2 = \gamma_1$, $\gamma_2 = \beta_1$ ($71^\circ 47' 22''$, $58^\circ 45' 6''$, $49^\circ 27' 32''$)
$f = 34{\cdot}19704$ ($34{\cdot}197$) m^2, $R = 5{\cdot}263614$ ($5{\cdot}2636$).

Digitized by Google

38) $a = 45\ m$, $b = 25\ m$, $c = 47{\cdot}6856\ m$ (47·686);
$\beta = 31^\circ\,7'\,26{\cdot}35''$, $\gamma = 80^\circ\,22'\,40{\cdot}65''$ (31° 7′ 27″, 80° 22′ 40″);
$f = 554{\cdot}5865$ (554·59) m^2.

39) $a_1 = 11\,m$, $b_1 = 8\,m$, $c_1 = 10{\cdot}8559\,m$, $a_2 = b_1$, $b_2 = a_1$, $c_2 = c_1$.
$\alpha_1 = 69^\circ\,29'\,32{\cdot}55'' = \beta_2$; $\beta_1 = 42^\circ\,56'\,9{\cdot}95'' = \alpha_2$ (69° 29′ 33″, 42° 56′ 9·5″).
$f = 40{\cdot}6717$ (40·671) m^2 ($c = 10{\cdot}856$).

40) $a_1 = 7{\cdot}50718 = b_2$; $b_1 = 5{\cdot}41082 = a_2$ (7·507, 5·411).
$\alpha_1 = 79^\circ\,15'\,4'' = \beta_2$, $\beta_1 = 45^\circ\,4'\,52'' = \alpha_2$ (79° 14′ 50″).
$f = 16{\cdot}77154$ (16·772) m^2.

41) $a = 10\ m$, $b = 16\ m$, $c = 18\ m$;
$\alpha = 33^\circ\,33'\,26{\cdot}3''$, $\beta = 62^\circ\,10'\,54{\cdot}7''$, $\gamma = 84^\circ\,15'\,39''$;
$r = 3{\cdot}61814$ (3·6181) m; (33° 33′ 26″, 62° 10′ 54″, 84° 15′ 40″).

42) 1. 24·5135 m, 19·0099 m (24·515, 19·009).
2. 365·0103 m, 347·9897 m (365, 348).

43) 1. $\alpha = 104^\circ\,41'\,39{\cdot}8''$, $\beta = 5^\circ\,50'\,20{\cdot}2''$ (104° 41′ 40″, 5° 50′ 20″);
$b = 12{\cdot}7259\ cm$, $c = 117{\cdot}1442\ cm$ (12·726, 117·14).
2. $\alpha = 16^\circ\,18'\,40''$, $\beta = 91^\circ$ (16° 18′ 42″, 90° 59′ 58″);
$b = 3793{\cdot}272\ m$, $c = 3622{\cdot}005\ m$ (3793·3, 3622).

44) $a = 14\ m$, die beiden anderen Seiten sind 13 und 15 m lang und die ihnen gegenüber liegenden Winkel betragen:
53° 7′ 48·42″ und 67° 22′ 48·58″ (53° 7′ 48·5″, 67° 22′ 48·5″).

45a) $\alpha = 138^\circ\,39'\,55{\cdot}9''$, $\beta = 16^\circ\,4'\,11{\cdot}2''$, $\gamma = 25^\circ\,15'\,52{\cdot}9''$;
$c = 43{\cdot}9432\ m$ (138° 39′ 55″, 16° 4′ 11″, 25° 15′ 54″, 43·943),
da auch ($180^\circ - 25^\circ\,15'\,52{\cdot}9''$) der Gleichung $\sin\gamma = \frac{2f}{ab}$ entspricht, so gibt es zwei Lösungen.

45b) $b = 1{\cdot}40825$, $c = 0{\cdot}59175$; $\alpha = 36^\circ\,52'\,12''$, $\beta = 122^\circ\,20'$, $\gamma = 20^\circ\,47'\,48''$.

46) $a = 234{\cdot}0037\ m$, $b = 195{\cdot}4136\ m$, $c = 97{\cdot}4126\ m$ (234, 195·41, 97·413).

47) $a = 8$, $b = 5$, $c_1 = 8{\cdot}00125$ (8·0013); $c_2 = 10{\cdot}6761$ (10·676).
$\alpha_1 = 71^\circ\,46'\,40{\cdot}5''$, $\beta_1 = 36^\circ\,25'\,1{\cdot}1''$, $\gamma_1 = 71^\circ\,48'\,18{\cdot}4''$
(71° 46′ 40″, 36° 25′, 71° 48′ 20″); $\alpha_2 = 45^\circ\,23'\,12{\cdot}4''$, $\beta_2 = 26^\circ\,25'\,6''$, $\gamma_2 = 108^\circ\,11'\,41{\cdot}6''$ (45° 23′ 15″, 26° 25′ 5″, 108° 11′ 40″).

48) $a_1 = 24$, $b_1 = 20$, $a_2 = 20$, $b_2 = 24$, $c = 23{\cdot}4313$.
$\alpha_1 = 66^\circ\,32'\,49'' = \beta_2$, $\alpha_2 = 49^\circ\,51'\,41'' = \beta_1$.

49) Wegen $a h_a = b h_b = c h_c$ ist $\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = \frac{c}{\frac{h_a h_b}{h_c}}$,

d. h. das Dreieck mit den Seiten a, b, c, ist dem Dreiecke mit den Seiten h_b, h_a, $\frac{h_a h_b}{h_c}$ ähnlich.

Digitized by Google

1) $\alpha = 80^\circ\,6'\,5{\cdot}1''$, $\beta = 55^\circ\,10'\,40{\cdot}1''$, $\gamma = 44^\circ\,43'\,14{\cdot}8''$ ($80^\circ\,6'\,5''$, $55^\circ\,10'\,40''$, $44^\circ\,43'\,15''$);
$a = 17{\cdot}0539\ m$, $b = 14{\cdot}2116\ m$, $c = 12{\cdot}1813\ m$ (17·054, 14·212, 12·181).

2) Das Dreieck ist rechtwinkelig, die beiden spitzen Winkel sind $36^\circ\,52'\,11{\cdot}64''$ und $53^\circ\,7'\,48{\cdot}36''$; die drei Seiten sind: $^1/_4$, $^1/_3$ und $^5/_{12}$ ($36^\circ\,52'\,10''$, $53^\circ\,7'\,50''$).

50) $\alpha = 36^\circ\,52'\,11{\cdot}6''$, $\beta = 106^\circ\,15'\,36{\cdot}8''$;
$a = 5\ m$, $b = 8\ m$, $f = 12\ m^2$.

51) 1. $a = 617{\cdot}6845\ m$, $b = 1126{\cdot}3857\ m$, $c = 809{\cdot}76\ m$, $f = 243299{\cdot}27\ m^2$ (617·67, 1126·4, 809·75, 243296).

2. $a = 898{\cdot}0488\ m$, $b = 626{\cdot}6739\ m$, $c = 749{\cdot}5095\ m$, $f = 231916{\cdot}31\ m^2$ (898·05, 626·67, 749·52, 231916).

3. $a = 44{\cdot}0143\ m$, $b = 35{\cdot}8349\ m$, $c = 59{\cdot}4328\ m$, $f = 784{\cdot}7847\ m^2$ (44·014, 35·834, 59·432, 784·77).

52) $a = c = \frac{u^2 + 4h_b^2}{4u}$, $b = \frac{u^2 - 4h_b^2}{2u}$, $\alpha = \text{Arc sin}\left(\frac{4uh_b}{u^2 + 4h_b^2}\right)$.
$a = c = 370\ m$, $b = 240\ m$; $\alpha = 71^\circ\,4'\,31{\cdot}25''$ ($71^\circ\,4'\,32''$).

53) $h_b = c \sin\alpha$; $h_a = a \sin\beta$, nun ist $\beta = 180^\circ - 2\alpha$ und $\sin\beta = \sin 2\alpha$, daher $h_a + h_b = s = a(\sin\alpha + \sin 2\alpha)$
$= a\left[2 \sin\frac{3\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\right]$

somit $a = \frac{s}{2 \sin\frac{3\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2}}$; $b = 2a \cos\alpha$.

$h_b = \frac{s \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{2}}$; $h_a = a \sin 2\alpha$.

$a = 1{\cdot}22625\ m$, $b = 0{\cdot}93853\ m$ (1·2263, 0·9385);
$h_a = 0{\cdot}86709\ m$, $h_b = 1{\cdot}13291\ m$, $f = 0{\cdot}531636\ m^2$.

54) $a = 105\ m$, $b = 92{\cdot}3148\ m$, $f = 393{\cdot}75\ m^2$;
$\alpha = 145^\circ\,20'\,23{\cdot}78''$ ($145^\circ\,20'\,24''$).

55) $a = \frac{4s^2 + b^2}{8s}$; $h_b = \frac{4s^2 - b^2}{8s}$; $\alpha = \text{Arc sin}\left(\frac{4s^2 - b^2}{4s^2 + b^2}\right)$.
$a = 10\ m$, $h_b = 8\ m$; $\alpha = 53^\circ\,7'\,48{\cdot}36''$ ($53^\circ\,7'\,50''$).

56) Für die Basis ergibt sich $\frac{7 \pm 25}{4}$ und da nur das obere Zeichen gelten kann, so $b = 8\ m$, $H = 6\ m$, $h = 3\ m$, $F = 24\ m^2$, $f = 12\ m^2$. Die Schenkel des großen Dreieckes sind $7{\cdot}2111\ m$, des kleinen $5\ m$ lang, im großen ist der Winkel $56^\circ\,18'\,35{\cdot}8''$, im kleinen $36^\circ\,52'\,11{\cdot}6''$ ($56^\circ\,18'\,36''$, $36^\circ\,52'\,12''$).

Digitized by Google

57) $b = \frac{2f}{hb}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{f}{s(s-b)}$, wo $u = 2s$;
$\cos\frac{1}{2}(\alpha-\gamma) = \frac{a+c}{b}\sin\frac{\beta}{2}$. $a - c = (a+c)\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}{\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}}$.

$b = 4\,m$, $a = c = 2{\cdot}9\,m$; $\beta = 87^0\,12'\,20{\cdot}28''$ $(87^0\,12'\,20'')$.
$\alpha = \gamma = 46^0\,23'\,49{\cdot}86''$ $(46^0\,23'\,50'')$.

58) $a = 70{\cdot}2659\,m$, $b = 90{\cdot}6582\,m$, $c = 99{\cdot}7342\,m$;
$\alpha = 42^0\,59'\,7{\cdot}6''$, $\beta = 61^0\,36'\,16{\cdot}4''$; $f = 3082{\cdot}3795\,m^2$
$(70{\cdot}266,\ 90{\cdot}657,\ 99{\cdot}734,\ 42^0\,59'\,7'',\ 61^0\,36'\,17'',\ 3082{\cdot}4)$.

59) $a = 24$, $b = 18$, $c = 30\,dm$.
$\alpha = 53^0\,7'\,50''$, $\beta = 36^0\,52'\,10''$, $f = 216\,dm^2$.

60) Da $c = \varrho\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \varrho\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} = \varrho\,\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}} =$

$\frac{\varrho\sin\gamma}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} = D\sin\gamma$ ist, so ist auch
$a = D\sin\alpha$, $b = D\sin\beta$ und
$f = \varrho^2.\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}.\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$.

1. $a = 804{\cdot}306\,m$, $b = 1006{\cdot}622\,m$, $c = 864{\cdot}902\,m$,
$f = 334478{\cdot}77\,m^2$ $(804{\cdot}3,\ 1006{\cdot}63,\ 864{\cdot}9,\ 334478)$.
2. $a = 54{\cdot}7213\,m$, $b = 48{\cdot}1105\,m$, $c = 61{\cdot}2567\,m$,
$f = 1257{\cdot}492\,m^2$ $(54{\cdot}721,\ 48{\cdot}111,\ 61{\cdot}257,\ 1257{\cdot}5)$.

61) $a_1 = 4$, $b_1 = 3$, $c_1 = 5$, $a_2 = 3$, $b_2 = 4$, $c_2 = 5$;
$\alpha_1 = 53^0\,7'\,48{\cdot}36'' = \beta_2$, $\beta_1 = 36^0\,52'\,11{\cdot}64'' = \alpha_2$, $\gamma = 90^0$
$(53^0\,7'\,50'',\ 36^0\,52'\,10'')$.

62) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{14}$; $\alpha = 75^0\,2'\,13''$, $\beta = 61^0\,52'\,29''$, $\gamma = 43^0\,5'\,18''$
$a = 2R\sin\alpha$; $f = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

63) $\operatorname{tg}\alpha = 1$; $\alpha = 45^0$, $\beta = 63^0\,26'\,6''$, $\gamma = 71^0\,33'\,54''$.
$a = 2R\sin\alpha$; $f = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

64) $a = 183{\cdot}7\,m$, $b = 200{\cdot}3071\,m$, $c = 248{\cdot}617\,m$
$(183{\cdot}7,\ 200{\cdot}31,\ 248{\cdot}62)$.
$\alpha = 46^0\,47'\,40''$, $\beta = 52^0\,38'\,10''$, $\gamma = 80^0\,34'\,10''$;
$f = 18149{\cdot}55\,m^2$ $(18150\,m^2)$.

65) Der Durchmesser ist 641 m, die Sehnen sind 200 und 609 m.

66a) Da $m = c\cos\alpha$ und $n = a\cos\gamma$, so ist $\frac{m}{n} = \frac{c\cos\alpha}{a\cos\gamma} = \frac{\sin\gamma\cos\alpha}{\cos\gamma\sin\alpha}$.
$\sin(\gamma-\alpha) = \frac{m-n}{m+n}\sin\beta$.

Digitized by Google

$a = 3{\cdot}88803\ m$, $b = 4{\cdot}7\ m$, $c = 4{\cdot}06532\ m$;
$\alpha = 52^\circ\ 3'\ 1{\cdot}8''$, $\beta = 72^\circ\ 24'\ 38''$, $\gamma = 55^\circ\ 32'\ 20{\cdot}2''$;
$f = 7{\cdot}53344\ m^2$ (7·5334)
(3·8880, 4·7, 4·0653, 52° 3′ 2″, 72° 24′ 38″, 55° 32′ 20″).

66b) $a : b = \sqrt{30} : 4$; $\gamma = 72^\circ\ 17'\ 3''$.

67) $b = 4{\cdot}3875$, $f = 4{\cdot}05667$ (4·0567) m^2.
$\alpha = 54^\circ\ 11'\ 54{\cdot}8''$, $\beta = 94^\circ\ 36'\ 16{\cdot}2''$, $\gamma = 31^\circ\ 11'\ 49''$.
$r = 0{\cdot}79251\ m$ (54° 11′ 54″, 94° 36′ 16″, 31° 11′ 49″, 0·7925).

68) $a = 346{\cdot}4423$, $b = 337{\cdot}7098$, $c = 325{\cdot}4024$, $f = 48940{\cdot}1$
(346·44, 337·71, 325·4, 48940).

69) $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{D}{d}\cos\frac{\delta}{2}$.
$\alpha = 37^\circ\ 49'\ 8{\cdot}2''$, $\beta = 29^\circ\ 43'\ 30{\cdot}7''$, $\gamma = 112^\circ\ 27'\ 21{\cdot}1''$.
$a = 7{\cdot}83918$, $b = 6{\cdot}33918$, $c = 11{\cdot}81529$, $f = 22{\cdot}96294\ m^2$
(37° 49′ 3·8″, 29° 43′ 26·3″, 112° 27′ 29·9″,
7·8385, 6·3385, 11·815, 22·958).

70) $a = 78\ mm$, $b = 30\ mm$; $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 22^\circ\ 37'\ 10''$.

71) $a = 5^3/_8\ m$, $b = 6\ m$, $c = 6{\cdot}00925\ m$;
$\alpha = 56^\circ\ 18'\ 35{\cdot}77''$, $\beta = 61^\circ\ 45'\ 45{\cdot}18''$, $\gamma = 61^\circ\ 55'\ 39{\cdot}05''$;
$r = 1{\cdot}69722\ m$, $R = 3{\cdot}40525\ m$
(56° 18′ 35″, 61° 45′ 45″, 61° 55′ 40″).

72) $a = 42{\cdot}2179\ m$, $b = 45\ m$, $c = 31{\cdot}6634\ m$;
$\alpha = 64^\circ\ 5'\ 22{\cdot}7''$, $\beta = 73^\circ\ 29'\ 11{\cdot}6''$, $\gamma = 42^\circ\ 25'\ 25{\cdot}7''$;
$f = 640{\cdot}8125\ m^2$ (64° 5′ 23″, 73° 29′ 11″, 42° 25′ 26″, 640·81).

73) $a = 6{\cdot}25\ m$, $b = 5{\cdot}9322\ m$, $c = 5{\cdot}4554\ m$;
$\alpha = 66^\circ\ 25'\ 18{\cdot}55''$, $\beta = 60^\circ\ 26'\ 53{\cdot}09''$, $\gamma = 53^\circ\ 7'\ 48{\cdot}36''$;
$f = 14{\cdot}83045\ m^2$ (66° 25′ 20″, 60° 26′ 52″, 53° 7′ 47″).

74) $a = \frac{s^2+b^2-2bp}{2s}$, $c = \frac{s^2-b^2+2bp}{2s}$;
$a = 3{\cdot}71852$, $c = 2{\cdot}97108$;
$\alpha = 47^\circ\ 41'\ 20{\cdot}7''$, $\beta = 96^\circ\ 5'\ 34{\cdot}4''$, $\gamma = 36^\circ\ 13'\ 4{\cdot}9''$;
$f = 5{\cdot}49281\ m^2$ (47° 41′ 20″, 96° 5′ 35″, 36° 13′ 5″, 5·4928).

75) $a = 60{\cdot}5633$, $b = 97{\cdot}8523$, $c = 62{\cdot}6360$, $f = 1830{\cdot}73\ dm^2$
(60·564, 97·854, 62·637, 1830·8).

76) $10{\cdot}24695\ m$ (10·247).

77) $b = 11{\cdot}9993\ m$, $c = 9{\cdot}99675\ m$, $f = 58{\cdot}7687\ m^2$
(11·999, 9·997, 58·769);
$\gamma = 44^\circ\ 24'\ 0{\cdot}5''$ (44° 24′).

78a) $a = 7{\cdot}9057\ cm$, $f = 11{\cdot}70945\ cm^2$ (11·709);
$\alpha = 102^\circ\ 38'\ 8{\cdot}3''$, $\beta = 29^\circ\ 35'\ 5{\cdot}1''$, $\gamma = 47^\circ\ 46'\ 46{\cdot}6''$
(102° 38′ 7″, 29° 35′ 6″, 47° 46′ 47″).

Digitized by Google

78_b) $a = \sqrt{\frac{q}{p}(pq + t^2)}$, $b = \frac{ap}{q}$.
$a = 195$, $b = 169$, $c = 182$,
$\alpha = 67^0\,22'\,48{\cdot}5''$, $\beta = 53^0\,7'\,48{\cdot}3''$, $\gamma = 59^0\,29'\,23{\cdot}2''$.

79) $a = \sqrt{2\,(b^2 + c^2 - 2T^2)} = 40$;
$\alpha = 112^0\,37'\,11{\cdot}5''$, $\beta = 36^0\,52'\,11{\cdot}6''$, $\gamma = 30^0\,30'\,36{\cdot}8''$
$(112^0\,37'\,12'', 36^0\,52'\,11'', 30^0\,30'\,37'')$;
$f = 264\ m^2$.

80) $a = 4{\cdot}3563\ m$, $b = 5\ m$, $c = 3{\cdot}3945\ m$;
$\alpha = 58^0\,52'\,39{\cdot}2''$, $\beta = 79^0\,16'\,56{\cdot}9''$, $\gamma = 41^0\,50'\,23{\cdot}9''$;
$f = 7{\cdot}264735\ m^2$
$(58^0\,52'\,39{\cdot}5'', 79^0\,16'\,56{\cdot}5'', 41^0\,50'\,24'', 7{\cdot}2647)$.

81) $a = 14{\cdot}2865\ m$, $b = 17{\cdot}6665\ m$, $c = 15{\cdot}4903\ m$;
$\alpha = 50^0\,31'\,31{\cdot}6''$, $\beta = 72^0\,39'\,19{\cdot}3''$, $\gamma = 56^0\,49'\,9{\cdot}1''$;
$f = 105{\cdot}6197\ m^2$
$(50^0\,31'\,32'', 72^0\,39'\,19'', 56^0\,49'\,9'', 105{\cdot}62)$.

82) $a = 40\ m$, $b = 50\ m$, $c = 30\ m$;
$\alpha = 53^0\,7'\,48{\cdot}36''$, $\beta = 90^0$, $\gamma = 36^0\,52'\,11{\cdot}64''$;
$f = 600\ m^2$.

83) Die Gerade a schließt mit den Schenkeln die Winkel:
$m = \frac{\alpha}{2} + \arccos\frac{b}{2a\sin\alpha/2}$ und $n = \frac{\alpha}{2} - \arccos\frac{b}{2a\sin\alpha/2}$ ein,
speziell $m = 69^0\,36'\,48{\cdot}96''$, $n = 90^0 - m$ $(69^0\,36'\,50'')$.

84) $\alpha = 46^0\,8'\,46{\cdot}37''$ $(46^0\,8'\,45'')$.

85) Vom Anfangspunkte des Blitzes braucht der Schall a Sekunden, vom Endpunkte $(a + b)$ Sekunden bis zum Beobachter, daher sind zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben.
$x = 333\sqrt{a^2 + (a+b)^2 - 2a(a+b)\cos\alpha} = 4551\ m$.

86) $H = 0{\cdot}08583$ Erdradien.

87) $H = 1007{\cdot}74$ $(1007{\cdot}8)$ Meilen.

§ 21. Viereck.

1) Ein Deltoid $ABCD$ ist zu berechnen, wenn die Winkel 2α und 2γ an den Scheiteln der zwei gleichschenkeligen Dreiecke und der Radius ϱ des eingeschriebenen Kreises gegeben sind.

2) Von einem Parallelogramm ist die Differenz zweier anstoßenden Seiten $= 4\ dm$, eine Diagonale $= 14\ dm$ und der dieser Diagonale gegenüber liegende spitze Winkel $= 64^0\,30'$ gegeben. Wie groß ist der Flächeninhalt?

Digitized by Google

3) Von einem gleichschenkeligen Trapeze kennt man die größere parallele Seite 12 *m*, den Abstand der beiden Parallelen 6 *m* und eine nicht parallele Seite 7 *m*. Wie groß sind die andere parallele Seite, die Diagonale, der Flächeninhalt und die Winkel?

4) In einem gleichschenkeligen Trapeze ist der von den Diagonalen eingeschlossene Winkel 135° 36′ 45″ und die Abschnitte der Diagonale betragen 12 *m* und 8 *m*. Es sind die Seiten, Winkel und der Flächeninhalt des Trapezes zu bestimmen.

5) Die Differenz der parallelen Seiten beträgt 3·45 *m*, die Summe ihrer Quadrate aber 96·4025, die nicht parallele Seite ist die mittlere geometrische Proportionale der beiden parallelen Seiten. Wie groß ist der Flächeninhalt und ein spitzer Winkel und wie lang ist die Diagonale dieses gleichschenkeligen Trapezes?

6) Der Flächeninhalt eines gleichschenkeligen Trapezes beträgt 13·5 m^2, die Summe der Quadrate der beiden parallelen Seiten ist 41 und der Flächeninhalt des Dreieckes, welches den Unterschied der beiden parallelen Seiten zur Basis und die Höhe des Trapezes zur Höhe hat, beträgt 1·5 m^2. Wie groß sind die Seiten und Winkel dieses Trapezes?

7) Von einem gleichschenkeligen Trapeze sind die parallelen Seiten a und b und der spitze Winkel γ gegeben; wie groß ist die Diagonale?

$$a = 107 \cdot 143\ m, \quad b = 98 \cdot 514\ m; \quad \gamma = 75^\circ\ 16'\ 42''.$$

8) Wie groß ist der Flächeninhalt eines gleichschenkeligen Trapezes, wenn die größere Grundlinie $a = 236 \cdot 25\ dm$, die anstoßende schräge Seite $c = 92 \cdot 23\ dm$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel $\gamma = 67^\circ\ 23'$ ist?

9) Die Differenz der parallelen Seiten eines Trapezes beträgt 27 *cm*, die Differenz der nicht parallelen Seiten 9 *cm*, die Differenz der der größeren parallelen Seite anliegenden Winkel 36° 52′ 10″ und die Fläche des Trapezes ist 2646 cm^2. Die Seiten und Winkel des Trapezes sind zu bestimmen.

10) Von einem Trapeze kennt man eine parallele Seite 350 *m*, die derselben anliegenden Winkel 37° 18′ und 52° 42′ und die Höhe 34 *m*. Wie groß ist der Flächeninhalt des Trapezes?

11) Die größere der beiden parallelen Seiten eines Trapezes mißt 100 *m*, eine der anliegenden ist 60 *m* und die ihre beiden Endpunkte verbindende Diagonale 80 *m* lang. Wenn nun die Summe der zwei noch übrigen Seiten 120 *m* beträgt, wie groß ist dann der Flächeninhalt des Trapezes?

Digitized by Google

12) Ein Trapez von 6 *dm* Höhe wird durch eine zu den beiden Parallelseiten parallele Gerade halbiert, wie groß ist diese, wenn die Parallelseiten 10 *dm* und 4 *dm* betragen? Wie groß sind die beiden nicht parallelen Seiten, wenn ein der größeren Parallelseite anliegender Winkel 68° 25′ 40″ beträgt?

13) Von einem gleichschenkeligen Trapeze sind der Schenkel c und der Radius des umgeschriebenen Kreises gegeben, ferner soll der Inhalt des Trapezes den $n$ten Teil der Kreisfläche betragen. Man bestimme die Seiten und Winkel des Trapezes.
Welche Relation muß zwischen c, r und n bestehen, wenn die Aufgabe möglich sein soll?
Speziell $c = 8\ m$, $r = 10\ m$, $n = 5$.

14) Vom Vierecke $ABCD$ kann man die Strecke AB messen und von den Punkten A und B nach C und D visieren und findet $AB = 400\ m$, $< DAC = 60° 18′ 30″$, $< CAB = 34° 12′$, $< DBA = 42° 17′$, $< DBC = 63° 8′ 30″$. Wie groß ist die Strecke CD? (Allgemein und speziell durchzuführen.)

15) Vom Vierecke $ABCD$ kennt man $AB = 3{\cdot}468\ m$, $BC = 3{\cdot}572\ m$, $CD = 3{\cdot}632\ m$, $DA = 3{\cdot}751\ m$ und den Winkel $ABC = 89° 15′ 40″$. Wie groß sind die anderen Winkel und der Flächeninhalt?

16) Um die Fläche eines Platzes, der ein unregelmäßiges Viereck bildet und in dessen Mitte sich ein Sumpf befindet, zu bestimmen, hat man der Reihe nach die Seiten desselben gemessen und gefunden 120, 200, 250 und 300 *m*. Der Winkel zwischen der ersten und zweiten beträgt 80°; wie groß ist die Fläche?

17) In einem Vierecke $ABCD$ ist $AB : BC : CD : DA = 9 : 8 : 7 : 6$, $< A = 72° 36′ 18″$ und $f = 225\ cm^2$; wie groß sind die Seiten?

18) In einem Vierecke verhalten sich die Seiten wie $2 : 3 : 5 : 4$. Die Summe ihrer Quadrate beträgt 486; die erste Seite schließt mit der zweiten einen Winkel von 105° ein; wie groß sind die Seiten, die Winkel und der Flächeninhalt?

19) Die Peripherie eines Kreises, dessen Radius 1 *m* ist, ist in vier Teile, welche sich wie $1 : 2 : 3 : 4$ verhalten, geteilt; wie groß ist der Inhalt des dadurch bestimmten Sehnenviereckes?

20) Die Peripherie eines Kreises mit dem Radius r ist so in vier Teile a, b, c und d geteilt, daß sich $a : b = 1 : 5$, $a : c = 2 : 3$, $d : c = 5 : 2$ verhalten. Der Flächeninhalt des durch diese Teilungspunkte bestimmten Sehnenviereckes soll berechnet werden. Beispiel $r = 5{\cdot}134\ m$.

Digitized by Google

21) Von einem Vierecke $ABCD$, das einem Kreise eingeschrieben ist, sind die Seiten $AB = 0{\cdot}8\ m$, $AD = 0{\cdot}9\ m$, der von beiden eingeschlossene Winkel $A = 129^\circ\,40'\,41{\cdot}3''$ und das Verhältnis der beiden anderen Seiten $BC : CD = 3 : 2$ bekannt. Es sollen daraus der Radius des umgeschriebenen Kreises und die Seiten BC und CD berechnet werden.

22) Vom Kreisviereck $ABCD$ mißt die Seite AB 93 m, die Seite BC 75 m und die Diagonale AC 104 m, während der Winkel, den die andere Diagonale BD mit der Seite BC einschließt, also $< DBC$ $47^\circ\,18'\,32''$ beträgt. Wie lang ist die Diagonale DB?

23) In einem Halbkreise seien drei aneinander stehende Sehnen eingeschrieben. Man soll aus deren Maßzahlen 1, 2, 3 den Durchmesser bestimmen.

24) Ein reguläres Polygon hat 497502 verschiedene Diagonalen; wie viele Seiten hat dasselbe? Wie groß ist eine Seite und wie groß ist die Differenzfläche des umgeschriebenen Kreises und des Polygons? (Kreishalbmesser = 1.)

25) Der Inhalt eines regelmäßigen Zweiundzwanzigeckes ist $A = 48{\cdot}6793\ m^2$, wie groß ist der Inhalt des regelmäßigen Siebeneckes in demselben Kreise?

§ 21a.

1) $$a = \frac{\varrho \cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin\alpha \,.\, \cos\frac{\alpha+\gamma}{2}},\quad b = \frac{\varrho \cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin\gamma \,.\, \cos\frac{\alpha+\gamma}{2}},$$

$$f = \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}\left(\frac{\varrho\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}\right)^2.$$

2) $f = 142{\cdot}6435\ (142{\cdot}64)\ m^2$.

3) Die parallele Seite ist $4{\cdot}7889\ m$, die Diagonale $10{\cdot}3183\ m$; $f = 50{\cdot}3667\ m^2$; $\alpha = 58^\circ\,59'\,50{\cdot}3''$ $(58^\circ\,59'\,50'')$.

4) Die parallelen Seiten sind: $22{\cdot}2219\ m$, $14{\cdot}8146\ m$ $(22{\cdot}222,\ 14{\cdot}815)$;
jede der nicht parallelen $8{\cdot}4138\ (8{\cdot}4137)\ m$;
$f = 139{\cdot}901\ m^2$ $(139{\cdot}91)$; $\alpha = 63^\circ\,53'\,3''$),
$\gamma = 116^\circ\,6'\,57''$ $(63^\circ\,53'\,10'',\ 116^\circ\,6'\,50'')$.

5) $d = 9{\cdot}1924\ m$, $f = 42{\cdot}1451\ m^2$; $74^\circ\,36'\,36{\cdot}7''$ $(74^\circ\,36'\,36'')$.

6) Die parallelen Seiten sind $5\ m$, $4\ m$, die nicht parallele Seite ist: $3{\cdot}04138\ m$; die spitzen Winkel sind: $80^\circ\,32'\,15{\cdot}6''$ $(80^\circ\,32'\,15{\cdot}4'')$.

7) $d = 104{\cdot}1313\ (104{\cdot}13)\ m$.

Digitized by Google

8) 17094·02 (17094) dm^2.

9) $a = 87$, $b = 45$, $c = 60$, $d = 36$; $\alpha = 90^0$, $\beta = 53^0\,7'\,50''$.

10) 10700·95 (10701) m^2.

11) 4114·286 m^2.

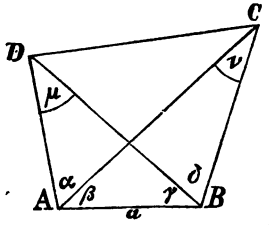
12) 7·6157731 dm; die dem gegebenen spitzen Winkel anliegende Seite ist 6·4519 dm, die andere 7·0115 dm lang.

13) Ist μ der der Sehne c entsprechende Zentriwinkel, so ist $\frac{d^2 \sin\mu}{2} = \frac{r^2\pi}{n}$ und, da $\sin\mu = \frac{c}{2r^2}\sqrt{4r^2 - c^2}$, so

$d = \sqrt{\frac{4r^4\pi}{nc\sqrt{4r^2 - c^2}}}$. Soll die Aufgabe möglich sein, so muß $nc\sqrt{4r^2 - c^2} > r^2\pi$ sein.

$40^0\,53'\,15{\cdot}1''$ ($40^0\,53'\,15''$); 18·04655, 5·95061 (18·0466, 5·9506) sind die beiden parallelen Seiten.

14)



$AD = \frac{a \sin\gamma}{\sin\mu}$, $AC = \frac{a \sin(\gamma + \delta)}{\sin\nu}$, wo

$\mu = 180^0 - (\alpha + \beta + \gamma)$,

$\nu = 180^0 - (\beta + \gamma + \delta)$.

$CD = \frac{AC - AD}{\cos\varphi}$, wo $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{AC.AD}\sin\frac{\alpha}{2}}{AC - AD}$.

Die Strecke CD ist 526·338 (526·35) m lang.

15) $< A = 93^0\,8'\,47''$; $< C = 93^0\,28'\,44''$;
$< D = 84^0\,6'\,49''$ ($93^0\,8'\,46''$, $93^0\,28'\,44''$, $84^0\,6'\,50''$);
$f = 12{\cdot}96918$ ($12{\cdot}969$) m^2.

16) 38241·92 (38242) m^2.

17) $AB = 9.2{\cdot}06318 = 18{\cdot}56862$ ($18{\cdot}569$) cm.

18) $a = 6\ m$, $b = 9\ m$, $c = 15\ m$, $d = 12\ m$;
$< (b, c) = 80^0\,3'\,1{\cdot}3''$, $< (c, d) = 51^0\,30'\,42{\cdot}3''$;
$< (d, a) = 123^0\,26'\,16{\cdot}4''$ ($80^0\,3'\,1''$, $51^0\,30'\,43''$, $123^0\,26'\,16''$);
$f = 96{\cdot}5264$ ($96{\cdot}527$) m^2.

19) $f = 2r^2 \cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5} = 153{\cdot}8842$ ($153{\cdot}885$) dm^2.

20) $f = \frac{r^2}{2}[\sin 160^0 + \sin 48^0 + \sin 120^0 + \sin 32^0]$

$= 2r^2 \sin 40^0 \cos 14^0 \cos 6^0$.

$f = 32{\cdot}69849$ ($32{\cdot}699$) m^2.

21) $R = 1\ m$, $BC = 1{\cdot}9983\ m$, $CD = 1{\cdot}3322\ m$.

22) $BD = 107{\cdot}3073$ ($107{\cdot}31$) m.

Digitized by Google

23) Die Aufgabe führt auf die Auflösung der reduzierten kubischen Gleichung: $x^3 - 14x - 12 = 0$. ($x^3 - px - q = 0$.) Setzt man $\sin 3\varphi = \frac{3q}{p\sqrt{\frac{4p}{3}}}$, so ist $\varphi = 12^\circ\,10'\,29{\cdot}7''$ ($12^\circ\,10'\,31''$) und $x_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\sin\varphi$; $x_{2,3} = \pm 2\sqrt{\frac{p}{3}}\sin(60 \pm \varphi)$. Hier ist nur $x_2 = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\sin(60 + \varphi) = 4{\cdot}11309$ ($4{\cdot}1131$) zu brauchen ($x_1 = -0{\cdot}9112$; $x_3 = -3{\cdot}202$).

24) Das Polygon hat 999 Seiten; $S = 0{\cdot}0062895$, $\triangle = 0{\cdot}000022$, mit fünfstelligen Logarithmen ergibt sich $\triangle = 0$.

25) $f = 42{\cdot}982915\ m^2$ ($42{\cdot}984$).

§ 22. Sphärische Trigonometrie.

1) Ein sphärisches Dreieck ist aus einem Winkel α und den Höhenabschnitten der Gegenseite zu bestimmen.

2) Ein Schiff segelt von New-York ($40^\circ\,42'\,40''$ nördlicher Breite und $76^\circ\,20'\,30''$ westlicher Länge) nach Kapstadt bis zum Äquator auf einem größten Kreise und schneidet denselben südlich der Insel St. Paul in einem Punkte, dessen westliche Länge $31^\circ\,39'\,20''$ beträgt; wie groß ist die Fahrstrecke bis zum Äquator, und wie groß ist das Azimut des Schiffskurses?

3) Wann geht in Wien die Sonne am längsten und wann am kürzesten Tage auf, wenn die Breite von Wien $48^\circ\,12'\,35{\cdot}5''$ ist?

4) Die Breite des nördlichsten und südlichsten Punktes der österreichisch-ungarischen Monarchie sei gegeben ($51^\circ\,18'$ und $42^\circ\,14'$); man bestimme den Unterschied ihrer größten Tageslänge.

5) Ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck aufzulösen, wenn die Hypotenuse $c = 56^\circ\,10'\,17''$ und die Differenz der beiden Katheten $a - b = 20^\circ$ gegeben ist.

6) Ein rechtwinkeliges sphärisches Dreieck aufzulösen, wenn die Hypotenuse $c = 104^\circ\,33'\,35''$ gegeben ist und die Fläche des Dreieckes den achten Teil der Kugeloberfläche beträgt?

Schiefwinkeliges Dreieck.

7) (a, b, C.) Von einem sphärischen Dreiecke sind zwei Seiten $a = 27^\circ\,41'$, $b = 43^\circ\,27'$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel $C = 73^\circ\,46'$ bekannt, es soll das Dreieck aufgelöst werden.

Digitized by Google

8) Wie ist die Lösung, wenn $a = 50^\circ\,12'\,3''$, $b = 116^\circ\,44'\,49''$; $C = 120^\circ\,4'\,5''$ gegeben sind?

9) (a, b, C.) Es ist das sphärische Dreieck aufzulösen, wenn die Seite $a = 56^\circ\,19'\,40''$, die Seite $b = 20^\circ\,16'\,38''$, der eingeschlossene Winkel $C = 114^\circ\,40'\,16''$ und der Radius der Kugel $r = 0{\cdot}8595\ m$ beträgt.

10) Die Entfernung zwischen Wien und Paris ist zu bestimmen, wenn die geographischen Längen und Breiten dieser Orte gegeben sind:

Wien $\begin{cases} L = 34^\circ\,2'\,36'' \\ B = 48^\circ\,12'\,35{\cdot}5'' \end{cases}$ Paris $\begin{cases} L = 20^\circ \\ B = 48^\circ\,50'\,11{\cdot}2''. \end{cases}$

11) Wieviel beträgt die Entfernung zwischen Wien und Petersburg, wenn für letzteren Ort die Länge $47^\circ\,58'\,12''$, die Breite $59^\circ\,56'\,29{\cdot}7''$ beträgt?

12) Ein sphärisches Dreieck ist aufzulösen, wenn die Fläche den zwölften Teil der Kugeloberfläche beträgt und wenn die Seite $c = 75^\circ$ und der gegenüber liegende Winkel $\gamma = 60^\circ$ ist?

13) Ein Schiff segelt von Bremerhaven $53^\circ\,33'$ nördlicher Breite und $6^\circ\,15'$ östlicher Länge in einem größten Kreise unter einem Azimute von $130^\circ\,39'\,45''$ eine Strecke von $115{\cdot}5$ geographischen Meilen. Unter welcher geographischen Länge und Breite befindet es sich am Endpunkte dieses Weges?

14) (A, B, C.) Die Winkel eines sphärischen Dreieckes sind:
$A = 95^\circ\,0'\,27''$, $B = 59^\circ\,23'\,40''$, $C = 119^\circ\,56'\,33''$,
wie groß sind die Seiten desselben?

15) Es ist ein gleichwinkeliges sphärisches Dreieck aufzulösen, wenn der Winkel $A = 80^\circ\,45'\,44{\cdot}3''$ und der Radius der Kugel $3{\cdot}56\ m$ beträgt?

16) Wie groß sind die Seiten und der Flächeninhalt eines sphärischen Dreieckes, dessen Winkel $A = 128^\circ\,30'$, $B = 95^\circ\,56'$, $C = 84^\circ\,58'$ sind und der Radius der Kugel, auf welcher dieses Dreieck verzeichnet ist, 35 cm beträgt?

17) Von einem sphärischen Dreiecke ist $a + b + c = 2s$ und A und B gegeben, das Dreieck ist aufzulösen.
Speziell $a + b + c = 303^\circ\,17'\,50''$; $A = 97^\circ\,42'\,56''$, $B = 120^\circ\,47'\,44''$.

18) Ein sphärisches Dreieck ist aus f, a, b aufzulösen.
Speziell sei

1. $f = \frac{7\pi}{9}$ (für $r = 1$); $a = 139^\circ\,21'\,22''$, $b = 126^\circ\,57'\,52''$.

2. $f = \frac{4\pi}{9}$ (für $r = 1$); $a = 118^\circ\,7'\,30''$, $b = 61^\circ\,52'\,30''$.

Digitized by Google

19) In einem sphärischen Dreiecke sei $a - b = 31^\circ\,40'$,
$A + B = 116^\circ\,7'\,36''$ und $C = 82^\circ\,24'\,48''$.
Wie groß sind a, b, c, ferner A und B?

20) Von einem sphärischen Dreiecke sind die Seiten a und c und der Winkel A bekannt; es soll die Seite b berechnet werden.
$a = 55^\circ\,51'\,6''$, $c = 41^\circ\,47'\,24''$, $A = 45^\circ$.

21) (a, b, c.) Von einem sphärischen Dreiecke sind die drei Seiten $a = 119^\circ\,18'\,14''$, $b = 125^\circ\,40'\,16''$ und $c = 70^\circ\,49'\,38''$ gegeben; es sind die Winkel A, B, C zu bestimmen.

22) Die Entfernung zwischen Teschen und Philadelphia, d. h. der betreffende größte Kreisbogen, beträgt 941·67 geographische Meilen; die geographische Breite von Teschen ist $49^\circ\,45'\,30''$, jene von Philadelphia $39^\circ\,57'\,7{\cdot}5''$. Wieviel beträgt die Differenz der Uhren an beiden Orten?

23) In einer gegen den Horizont geneigten Ebene wurde gemessen der ebene Winkel $a = 57^\circ\,40'$, ferner die Abweichung seiner Schenkel von der im Scheitelpunkte des Winkels auf der Horizontalebene errichteten Lotrechten, nämlich die Winkel
$b = 55^\circ\,25'$, $c = 70^\circ\,45'$.
Wie groß ist der Winkel auf den Horizont reduziert?

24) Um welche Zeit hat am 20. Juni in Wien die Sonne eine Höhe von $44^\circ\,15'\,40''$ ($49^\circ\,12''$), wenn die Deklination der Sonne $23^\circ\,27'\,10''$ beträgt und die Polhöhe von Wien $48^\circ\,12'\,36''$ ist?

25) Welche Höhe hat die Sonne in Wien am 9. April um 9 Uhr vormittags, wenn die Polhöhe von Wien $48^\circ\,12'\,36''$ und die Deklination der Sonne $7^\circ\,13'\,55''$ beträgt?

26) Wie groß ist die astronomische Länge und Breite eines Gestirnes, wenn seine Rektaszension $38^\circ\,45'$, seine Deklination $52^\circ\,18$, und die Schiefe der Ekliptik $23^\circ\,27'\,30''$ beträgt?

27) Ein Stern hat die Deklination $\delta = 7^\circ\,54'$, die Höhe $h = 22^\circ\,45'\,12''$ und das Azimut $\alpha = 50^\circ\,14'\,23''$; wie groß ist sein Stundenwinkel und die Polhöhe des Beobachtungsortes?

§ 22a.

1) Sind die Abschnitte m und n und die ihnen gegenüber liegenden Winkel μ und ν, so ist $a = m + n$. Ist h die Höhe, so ist $\sin h = \operatorname{tg} m \,.\, \operatorname{cotg} \mu = \operatorname{tg} n \,.\, \operatorname{cotg} \nu$, daher
$\frac{\operatorname{tg} m}{\operatorname{tg} n} = \frac{\operatorname{tg} \mu}{\operatorname{tg} \nu} = \frac{\operatorname{tg} \mu}{\operatorname{tg} (A - \mu)}$, woraus μ bestimmt werden kann.

Digitized by Google

2) 6387·5 *km*, wobei ein Grad zu 111·3 *km* angenommen wurde, Azimut = 56° 35′ 52·4″ (56° 35′ 53″).

3) Die Deklination der Sonne ist am längsten Tage 23° 27′ 28·2″, die Sonne geht um $4^h\ 3^m\ 50''$, $7^h\ 56^m\ 10''$ auf.

4) Die Sonne geht um $4^h\ 27^m\ 12''$, $3^h\ 48^m\ 49''$ auf, somit beträgt der Unterschied der Tageslänge $1^h\ 16^m\ 46''$.

5) $\alpha = 67° 14' 25''$, $\beta = 37° 0' 12''$; $a = 50°$, $b = 30°$.

6) Aus $f = \frac{4r^2\pi}{8} = \frac{r^2\pi}{180}(A + B + C - 180)$ folgt $A + B = 180$.
$a = 120° 5' 30''$, $b = 59° 54' 30''$.
$A = 116° 37' 43''$, $B = 63° 22' 17''$.

7) $A = 40° 54' 46·9''$, $B = 75° 48' 14·9''$.
$c = 42° 55' 47·2''$ (40° 54′ 47″, 75° 48′ 17″, 42° 55′ 50″).

8) $A = 59° 4' 21·33''$, $B = 94° 23' 36·57''$,
$c = 129° 11' 5·5''$ (59° 4′ 21″, 94° 23′ 37″, 129° 11′ 4″).

9) $A = 55° 35' 26·95''$, $B = 20° 5' 39·1''$ (55° 35′ 28″, 20° 5′ 38″).
$c = 66° 26' 27·5''$; $f = 0·133526\ m^2$ (66° 26′ 27″, 0·13353).

10) $c = 9° 18' 32·04'' = 9·3089°$. Ein Grad beträgt 111·3 *km*, daher die Entfernung 1036·1 *km* (9° 18′ 30″, 1036).

11) 1584 *km*.

12) $a = 113° 38' 20''$, $b = 66° 21' 40''$.
$\alpha = 124° 46' 50''$, $\beta = 55° 13' 10''$.

13) 115·5 Meilen entsprechen 7° 42′, somit sind zwei Seiten: $c = 7° 42'$, $b = 36° 27'$ und der eingeschlossene Winkel: $180° - 130° 39' 45'' = 49° 20' 15''$ bekannt, und es ist die dritte Seite a und der Winkel C zu bestimmen.
$a = 31° 53' 51''$ (31° 53′ 50″), $C = 11° 5' 23''$ (11° 5′ 23″), somit Breite 58° 6′ 9″ (58° 6′ 10″), Länge 4° 50′ 23″ (4° 50′ 23″) westlich.

14) $a = 117° 14' 34·36''$, $b = 50° 11' 17·44''$, $c = 129° 20' 36·91''$ (117° 14′ 34″, 50° 11′ 20″, 129° 20′ 40″).

15) $a = 78° 58' 31·84''$; $f = 13·77762\ m^2$ (78° 58′ 32″, 13·778).

16) $a = 129° 36' 5''$, $b = 101° 41' 32''$, $c = 78° 43' 59·5''$;
$f = 2766·6083\ cm^2$ (129° 36′ 2″, 101° 41′ 25″, 78° 44′, 2766·6).

17) Man beachte, daß $\operatorname{tg}\frac{A}{2}.\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{\sin(s-c)}{\sin s}$ ist
$c_1 = 44° 44' 3''$, $c_2 = 78° 33' 47''$
für c_1 erhält man $a = 124° 17' 53''$, $b = 134° 15' 54''$,
$C = 57° 35' 29''$;
für c_2 erhält man $a = 87° 55' 51''$, $b = 136° 48' 12''$,
$C = 84° 15' 34''$.

Digitized by Google

18) Man beachte, daß $\operatorname{tg}\frac{a}{2}.\operatorname{tg}\frac{b}{2} = -\frac{\cos S}{\cos(S-C)}$ ist.
1. $c = 56^\circ\,51'\,40''$, $A = 130^\circ$, $B = 110^\circ$, $C = 80^\circ$.
2. $c = 95^\circ$, $A = 119^\circ\,19'\,30''$, $B = 60^\circ\,40'\,30''$, $C = 80^\circ$.

19) $a = 62^\circ\,36'\,33{\cdot}6''$, $b = 30^\circ\,56'\,33{\cdot}6''$, $c = 62^\circ\,56'\,39{\cdot}6''$,
$A = 81^\circ\,12'\,54{\cdot}8''$, $B = 34^\circ\,54'\,41{\cdot}2''$
($62^\circ\,36'\,35''$, $30^\circ\,56'\,35''$, $62^\circ\,56'\,40''$, $81^\circ\,12'\,54{\cdot}6''$, $34^\circ\,54'\,41{\cdot}4''$).

20) $b = 82^\circ\,46'\,2{\cdot}5''$ ($82^\circ\,46'$).

21) $A = 112^\circ\,50'\,50''$, $B = 120^\circ\,51'\,6''$, $C = 86^\circ\,31'\,10''$
($112^\circ\,50'\,50''$, $120^\circ\,51'\,6''$, $86^\circ\,31'\,10''$).

22) 941·67 geographischen Meilen entsprechen $62^\circ\,46'\,40{\cdot}8''$, daher sind von dem Dreiecke die drei Seiten bekannt.
$A = 93^\circ\,47'\,17{\cdot}6''$, da die Uhren per Grad um 4 Minuten differieren, so zeigt die Uhr in Teschen um 6 Stunden 15 Minuten 9 Sekunden mehr als die in Philadelphia ($93^\circ\,47'\,14''$, $6^h\,15^m\,8''$).

23) Die drei Seiten des sphärischen Dreieckes sind somit gegeben, und es ist der der Seite a gegenüber liegende Winkel zu suchen.
$A = 63^\circ\,25'\,34{\cdot}6''$ ($63^\circ\,25'\,30''$).

24) $8^h\,44^m\,3''$ vormittags und $3^h\,15^m\,57''$ nachmittags. $9^h\,14^m\,4''$ vormittags und $2^h\,45^m\,56''$ nachmittags.

25) $34^\circ\,8'\,52''$ ($34^\circ\,8'\,54''$).

26) Die Breite $= 34^\circ\,59'\,29{\cdot}4''$ und die Länge $= 54^\circ\,23'\,52{\cdot}6''$
($34^\circ\,59'\,27''$, $54^\circ\,23'\,51''$).

27) Stundenwinkel $= 45^\circ\,42'$ oder $134^\circ\,18'$,
Polhöhe $= 67^\circ\,58'\,56''$.

C. Stereometrie.

§ 23. Prisma.

1) In einem regelmäßigen Prisma ist die Oberfläche a m^2 und jede Grundkante der Höhe des Prismas gleich. Wie groß ist die Höhe, wenn die Grundfläche:
1. ein gleichseitiges Dreieck,
2. ein regelmäßiges Sechseck bildet?

2) Die Kanten eines rechtwinkeligen Parallelepipeds seien a, b, c, die Winkel derselben mit einer Diagonale des Parallelepipeds α, β, γ. Welche Relation besteht zwischen diesen drei Winkeln? Für $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ sollen die Winkel α, β, γ berechnet werden.

3) Die Seitenkante eines dreiseitigen Prismas ist $s = 7$ dm und unter $< \delta = 60^\circ$ zur Basis geneigt. Die Basis hat die Winkel $\alpha = 50^\circ\,7'$ und $\beta = 70^\circ\,13'$ und ist einem Kreise eingeschrieben,

Digitized by Google

dessen Halbmesser $r = 5\,dm$ beträgt. Wie groß ist das Volumen des Prismas?

4) $V\ cm^3$ Kupfer sollen in die Form eines rechtwinkeligen Parallelepipeds von der Höhe h gegossen und hierauf soll dasselbe vergoldet werden; wie muß man die Dimensionen der Grundfläche wählen, damit die Vergoldung möglichst billig komme und wie teuer ist diese, wenn $1\ cm^2$ mit 30 Heller berechnet wird? $V = 54\ cm^3$, $h = 6\ cm$.

5) Von der Grundfläche eines geraden dreiseitigen Prismas sind zwei Seiten $18\ cm$ und $15\ cm$, sowie der von ihnen eingeschlossene Winkel $75^0\ 36'\ 30''$ bekannt; die drei Seitenkanten des Prismas sind gleich lang, und zwar beträgt jede so viel wie die auf die dritte unbekannte Seite der Grundfläche vom gegenüber liegenden Scheitel gefällte Höhe. Es ist die Oberfläche und der Inhalt des Prismas zu bestimmen.

6) In einem geraden Prisma mit quadratischer Basis und der Länge einer Grundkante $a = 80\,cm$ soll durch eine Grundkante so eine Ebene gelegt werden, daß die Schnittfläche ein Rechteck vom Flächeninhalte $f = 8350\ cm^2$ ist. Welchen Winkel schließt die Grundfläche mit der Schnittebene ein? Wie groß ist der Kubikinhalt des abgeschnittenen Sphenisken?

7) Ein Parallelepipedon ist von lauter kongruenten Rhomben begrenzt, deren Seite $a = 8\,cm$ und deren spitzer Winkel $\alpha = 64^0\ 12'$ beträgt; wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt dieses Parallelepipedons?

8) Das Volumen eines Parallelepipedons zu berechnen aus den drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten a, b, c und aus den drei Kantenwinkeln α, β, γ.

§ 23a.

1) $s_8 = \sqrt{\frac{2a\,(6-\sqrt{3})}{33}} = 0{\cdot}5085898\,\sqrt{a}$

$s_6 = \sqrt{\frac{a\,(2-\sqrt{3})}{3}} = 0{\cdot}2988585\,\sqrt{a}.$

2) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$
$\alpha = 74^0\ 29'\ 55{\cdot}1'',\quad \beta = 57^0\ 41'\ 18{\cdot}47'',\quad \gamma = 36^0\ 41'\ 57{\cdot}2''$
$(74^0\ 29'\ 55'',\ 57^0\ 41'\ 20'',\ 36^0\ 41'\ 58'').$

3) $C = 2r^3 s \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \sin\delta = 188{\cdot}90144\ (188{\cdot}9)\ dm^3.$

4) Die Grundfläche muß ein Quadrat sein.
$O = \frac{2V}{h} + 4\sqrt{Vh},$ 27 Kronen.

Digitized by Google

5) $O = 946 \cdot 814$ $(946 \cdot 8)$ cm^2, $C = 1679 \cdot 164$ $(1679 \cdot 16)$ cm^2.

6) $\gamma = \arccos \frac{a^2}{f}$; $C = \frac{a^3}{2} \operatorname{tg} \gamma = \frac{a}{2} \sqrt{f^2 - a^4}$.

$\gamma = 39^0\ 57'\ 44 \cdot 3''$ $(39^0\ 57'\ 45'')$; $C = 214 \cdot 52273$ dm^3 $(214 \cdot 52)$.

7) Eine Fläche ist $a^2 \sin \alpha$, daher die Oberfläche $6a^2 \sin \alpha$ und

$$C = 2a^3 \sin \tfrac{\alpha}{2} \sqrt{\sin \tfrac{3\alpha}{2} \sin \tfrac{\alpha}{2}}.$$

$O = 345 \cdot 72246$ $(345 \cdot 725)$ cm^2, $C = 395 \cdot 4716$ $(395 \cdot 468)$ cm^3.

8) $C = 2abc \sqrt{\sin s \sin (s - \alpha) \sin (s - \beta) \sin (s - \gamma)}$.

§ 24. Zylinder.

1) Die Oberfläche O eines geraden Zylinders und die Mantelfläche M sind bekannt; wie groß ist die Höhe H dieses Zylinders? $O = 150 \cdot 796$ m^2, $M = 94 \cdot 2478$ m^2.

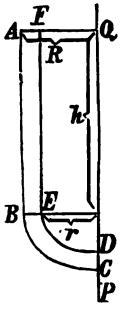
2) Von einem schief abgeschnittenen senkrechten Zylinder ist der Radius der unteren Grundfläche $R = 4$ dm, die größte und kleinste Seitenkante $S = 15$ dm, $s = 9$ dm bekannt; es soll die Oberfläche und der Inhalt dieses Zylinders und der Inhalt des abgeschnittenen Stückes (Hufes) berechnet werden.

3) Ein offenes zylindrisches Blechgefäß soll so angefertigt werden, daß die Höhe: Basisdurchmesser $= 4 : 3$; es soll 1000 Liter fassen, wie viel Blech braucht man mindestens dazu?

4) In der Grundfläche eines geraden Zylinders von 10 cm Höhe ist eine Sehne gleich dem Halbmesser 8 cm der Basis gezogen; durch dieselbe wird ein Schnitt parallel zur Achse gelegt, wie groß sind die Volumina der beiden Teile des Zylinders?

5) Aus einer Messingplatte von der Dicke $d = 2$ cm wird ein Kreisring von der Breite $b = 5$ cm ausgeschnitten. Der Durchmesser des inneren ausgeschnittenen Ringes beträgt $a = 12$ cm; wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt des Ringes?

6) Die aus einem Rechteck und einem Viertelkreisring gebildete Figur $ABCDEF$ rotiert um die Gerade PQ. Wie groß muß h sein, damit das Volumen des Hohlraumes viermal so groß als das der Wandung sei?



Speziell $R = 20$ cm, $r = 18$ cm.

7) Ein schiefer Zylinder, dessen Basis eine Ellipse ist, hat denselben Kubikinhalt wie ein gerades Prisma von der Höhe $h = 60$ cm. Die Basis des Prismas ist ein gleichseitiges Dreieck, dessen Höhe gleich ist der Höhe des Prismas. Wie groß ist der größte und kleinste Durchmesser der Basis des Zylinders,

Digitized by Google

wenn sich dieselben wie 4 : 3 verhalten und die Höhe des Zylinders zwei Drittel von der des Prismas beträgt? Wie lang ist die Achse, und unter welchem Winkel ist sie gegen die Basis geneigt, wenn ihre Horizontalprojektion $d = 5\ cm$ beträgt?

8) Das Volumen eines gleichseitigen Zylinders sei gleich $79{\cdot}91\ m^3$; wie groß ist der Inhalt eines Prismas von derselben Höhe, dessen Grundfläche ein dem Grundkreise des Zylinders eingeschriebenes reguläres Vierundzwanzigeck ist?

9) Man berechne das Volumen eines mittels zweier durch die Achse gehender Ebenen entstehenden Ausschnittes eines geraden Zylinders, wenn die Grundfläche ein Sektor mit dem Zentriwinkel $20^0\ 30'$ ist und die Summe seiner beiden Endflächen gleich der Summe der beiden rechtwinkeligen Begrenzungsebenen ist, und wenn ferner der Inhalt des Achsenschnittes des ganzen Zylinders 4·509 Flächeneinheiten beträgt.

10) Aus einem zylindrischen Stamme von der Höhe $h = 8\ m$ und dem Durchmesser $d = 80\ cm$ soll der größtmögliche viereckige Balken gehauen werden. Welches Volumen hat derselbe? Wie viel beträgt der Abfall?

11) Aus einem geraden Zylinder vom Durchmesser d und der Länge l wird ein regelmäßiges achtseitiges Prisma von derselben Länge mit dem geringstmöglichen Stoffverluste hergestellt; wie schwer wird dasselbe ausfallen, wenn das spezifische Gewicht s ist? Wie viel wiegt der Abfall? $d = 4{\cdot}6\ cm$, $l = 5\ cm$, $s = 1{\cdot}865$.

12) Ein massiver Zylinder von homogener Masse schwimmt bei horizontaler Lage seiner Achse, wenn er im Wasser bis zu einer Tiefe gleich der Hälfte des Radius der Grundfläche eintaucht. Wie groß ist das spezifische Gewicht des Materiales?

13) Ein zylinderförmiger Kupferdraht von der Länge $l = 1\ m$ und dem Durchmesser $d = 2\ cm$ soll so mit einer konzentrischen Korkschicht umgeben werden, daß derselbe im destillierten Wasser von 4^0 Celsius eingetaucht, ganz vom Wasser bedeckt schwimme. Welche Dicke muß dieser hohle Korkzylinder haben, wenn das spezifische Gewicht des Kupfers $s = 8{\cdot}88$, das spezifische Gewicht des Korkes $s_1 = 0{\cdot}24$ beträgt? Welches Gewicht hat dieser hohle Korkzylinder an und für sich?

14) Von einem dreiseitigen Prisma sind der Inhalt V und die drei Winkel des Grunddreieckes gegeben, es ist der Inhalt des eingeschriebenen Zylinders zu bestimmen.

Digitized by Google

§ 24a.

1) $H = \frac{M}{\sqrt{2\pi(O-M)}} = 5\ m.$

2) $O = R^2\pi + R\pi(S+s) + \frac{R\pi}{2}\sqrt{4R^2+(S-s)^2} = 132\pi\ dm^2,$

$C = R^3\pi\frac{S+s}{2} = 192\pi\ dm^3,$

$c = R^3\pi\frac{S-s}{2} = 48\pi\ dm^3.$

3) $O = 4\cdot82358\ (4\cdot8236)\ m^2.$ 4) $1952\cdot644\ cm^3,\ 57\cdot975\ cm^3.$

5) $O = 2\pi(a+b)(b+d),\quad C = \pi bd(a+b),$
$O = 747\cdot69905\ cm^2,\quad C = 534\cdot07075\ cm^3.$

6) $h = \frac{2(4R^3-5r^3)}{3(5r^2-4R^2)},\ h = 94^2/_3\ cm.$

7) $2a = 2h\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}} = 72\cdot7513\ (72\cdot752)\ cm,$

$2b = h\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}} = 54\cdot5635\ (54\cdot564)\ cm,$

$L = \frac{1}{3}\sqrt{4h^2+9d^2} = 40\cdot31129\ (40\cdot311)\ cm,$

$\alpha = 82^0\ 52'\ 29\cdot9''\ (82^0\ 52'\ 30'').$

8) $79\cdot00028\ (79)\ m^3.$ 9) $1\cdot43178\ (1\cdot4318)\ m^3.$

10) $\frac{d^2h}{2};\ \frac{d^2h}{4}(\pi-2);\quad 2\cdot56,\quad 1\cdot4612386\ m^3.$

11) $\frac{d^2ls}{2}\sqrt{2} = 136\cdot532$ Gramm;

$\frac{d^2ls}{4}(\pi-2\sqrt{2}) = 15\cdot117$ Gramm.

12) $\sigma = \frac{4\pi-3\sqrt{3}}{12\pi} = 0\cdot1955.$

13) $D = \frac{d}{2}\left[\sqrt{\frac{s-s_1}{1-s_1}}-1\right] = 2\cdot371709\ cm.$
$P = \pi l(R^2-r^2)s_1 = 781\cdot7612$ Gramm.

14) Da die Höhen gleich sind, so verhalten sich die Volumen wie die Grundflächen, also

$J : V = r^2\pi : \frac{ab\sin\gamma}{2}$; drückt man nun a und b durch den Radius des eingeschriebenen Kreises r aus, so erhält man

$$J = V\pi\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

§ 25. Pyramide.

1) Die Grundfläche einer Pyramide ist ein Quadrat, um welches sich ein Kreis mit dem Radius $r = 2\ m$ umschreiben läßt; die

Digitized by Google

Seitenflächen sind gleichseitige Dreiecke. Wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt?

2) Der Inhalt eines gleichseitigen Zylinders ist $402 \cdot 123\ m^3$. Wie groß ist die Oberfläche einer eingeschriebenen regelmäßigen sechsseitigen Pyramide?

3) Wie groß ist der Inhalt einer geraden Pyramide, welche zur Höhe H *m* und zur Basis ein einem Kreise mit dem Radius R *m* eingeschriebenes regelmäßiges Achteck hat?

$$R = 1\ m,\ H = 3\ m.$$

4) Wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche einer geraden dreiseitigen Pyramide mit regulärer Grundfläche, wenn jede Grundkante 3 *m* und jede Seitenkante 5 *m* ist?

5) Es ist die Oberfläche einer Pyramide zu berechnen, welche mit einem geraden quadratischen Prisma die Grundfläche a^2 gemeinsam hat und deren Spitze im Mittelpunkte der oberen Grundfläche des Prismas liegt, wenn die Kanten des letzteren: a, h gegeben sind. $a = 3 \cdot 1\ m,\ h = 4 \cdot 68\ m.$

6) Die Grundfläche einer Pyramide ist ein regelmäßiges Fünfeck, um welches sich ein Kreis mit dem Radius 6 *dm* beschreiben läßt, die Seitenflächen sind gleichseitige Dreiecke. Wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt dieser Pyramide?

7) Die Kante der Grundfläche einer geraden regelmäßigen achtseitigen Pyramide ist $7 \cdot 8\ m$ und die Länge einer Seitenkante beträgt 12 *m*. Die Oberfläche und der Inhalt sind zu bestimmen.

8) Eine gerade Pyramide, deren Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten $a = 5 \cdot 5\ m$ und $b = 2 \cdot 25\ m$ ist, hat eine Seitenkante $c = 11 \cdot 5\ m$; wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt?

Mit Trigonometrie.

9) In einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide ist eine Basiskante $4 \cdot 5\ m$ und die von der Spitze der Pyramide auf diese Kante gefällte Senkrechte $9\ m$; wie groß ist der Inhalt der Pyramide und welchen Winkel bildet die Seitenfläche mit der Basis?

10_a) In einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide ist der Kantenwinkel an der Spitze $\alpha = 48^0\ 30'$, die Grundkante mißt $a = 5\ dm$; die Oberfläche und der Inhalt sind zu bestimmen.

10_b) Von einer regelmäßigen $n$seitigen Pyramide sei eine Grundkante a *dm* lang und der Neigungswinkel einer Seitenfläche gegen die Grundfläche betrage α^0. Wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt dieser Pyramide?

Speziell $a = 1,\ n = 30,\ \alpha^0 = 60^0$.

Digitized by Google

11) Das Volumen einer geraden Pyramide mit quadratischer Basis sei $V = 58 \cdot 778$, der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Basis sei $\alpha = 68^\circ\, 9'\, 24''$; wie groß sind die Grund- und Seitenkanten?

12) Die Seitenkante einer regelmäßigen achtseitigen Pyramide sei $s = 42\ m$ und bilde mit der Höhe der Pyramide den Winkel $\alpha = 41^\circ\, 47'$; wie groß ist das Volumen?

13) Bei einer regulären zwölfseitigen Pyramide beträgt die durch die erste und die fünfte Seitenkante bestimmte Diagonalfläche $1\ m^2$ und der Neigungswinkel dieser Fläche gegen die Basis 60°. Wie groß ist der Inhalt dieser Pyramide?

14) Von einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide ist die Grundkante a und der Neigungswinkel zweier Seitenflächen 120°; die Oberfläche ist zu berechnen.

15) Von einer dreiseitigen Pyramide ist jede der drei Seitenkanten $s = 40$. Von der Grundfläche sind zwei Seiten $b = 23$, $c = 12$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel $\alpha = 74^\circ\, 52'\, 42''$ gegeben. Der Inhalt dieser Pyramide ist zu berechnen.

16) Wie groß ist der Inhalt einer geraden Pyramide, wenn die Basis ein regelmäßiges Fünfeck ist, eine Basiskante $3\ m$ und eine Seitenkante $10\ m$ beträgt? Wie groß ist die Neigung einer Seitenfläche gegen die Basis?

17) Von einer dreiseitigen Pyramide sind die an der Spitze zusammenstoßenden Seiten gleich lang, und zwar beträgt jede $9\ m$ und die drei zwischen ihnen liegenden Winkel sind:
$28^\circ\, 19'\, 37''$, $31^\circ\, 15'\, 25''$, $43^\circ\, 16'\, 24''$.
Wie groß ist das Volumen?

Pyramidalstutz.

18) Die Grundkante einer regelmäßigen achtseitigen Pyramide sei $s = 24 \cdot 8\ cm$, der von zwei Kanten gebildete Winkel $\delta = 32^\circ\, 14'$; diese Pyramide soll durch einen mit der Basis parallel geführten Schnitt so geteilt werden, daß sich die abgeschnittene Pyramide zum Stutze wie 3 : 7 verhält. Wie groß ist der Inhalt des Stutzes?

19) Eine Pyramide hat die Basis $B = 204 \cdot 8\ m^2$ und das Volumen $C = 1638 \cdot 4\ m^3$, *a*) in welcher Höhe h über der Grundfläche müßte sie parallel zur Basis abgestumpft werden, wenn der Inhalt des Stumpfes $C_1 = 947 \cdot 2\ m^3$ betragen soll? *b*) In welcher Höhe müßte sie abgestumpft werden, wenn der Inhalt des Stumpfes $691 \cdot 2\ m^3$ betragen soll?

Digitized by Google

20) Eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist parallel zur letzteren abgestumpft. Aus dem Inhalte der Abstumpfungsfläche a^2, der Höhe H der ganzen Pyramide und der Höhe h_1 des Stumpfes ist die Oberfläche des letzteren zu berechnen.

$$a^2 = 5625, \quad H = 231, \quad h_1 = 77.$$

21) Die Höhe einer abgestumpften Pyramide sei $h = 15\ cm$, die Summe der beiden Endflächen $s = 458\ cm^2$ und das Volumen $c = 3395\ cm^3$. *a*) Wie groß sind die Endflächen, die Höhe der Ergänzungspyramide und das Volumen der vollständigen Pyramide? *b*) Wie ist die Lösung, wenn $h = 48\ dm$, $s = 164\ dm^2$ und $C = 3904\ dm^3$ ist?

22) Eine Pyramide hat als Grundfläche ein Rechteck mit den Seiten $a = 26\ m$ und $b = 18\ m$; jede ihrer Seitenkanten ist $c = 38\ m$. In welchem Abstande von der Spitze ist parallel der Grundfläche ein Schnitt zu legen, der die Pyramide in inhaltsgleiche Stücke teilt?

23) In einem senkrechten Pyramidenstumpfe ist die Höhe 4 *m*, die Grundflächen sind gleichseitige Dreiecke, deren Seiten bezüglich 6 *m* und 2 *m* betragen. *a*) Wie groß ist die Oberfläche und der Kubikinhalt? *b*) Wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt, wenn statt der angeführten Größen folgende: 5 *dm*, 1·6 *dm*, 1·2 *dm* gelten?

24) Von einem geraden quadratischen Pyramidenstumpfe ist die untere Grundfläche a^2, die obere b^2, eine Seitenfläche ist c; wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche der Pyramide, von welcher der Stumpf ein Teil ist?

$$a^2 = 12{\cdot}96\ cm^2, \quad b^2 = 5{\cdot}76\ cm^2, \quad c = 22{\cdot}5\ cm^2.$$

§ 25a.

1) $O = 2r^2(1 + \sqrt{3}) = 21{\cdot}856406\ m^2$,
$C = \frac{2r^3}{3} = 5^1/_3\ m^3$.

2) $O = 146{\cdot}183\ m^2$ (146·185).

3) $C = \frac{2R^2H\sqrt{2}}{3}$; $2{\cdot}828427\ m^3$.

4) $O = 25{\cdot}360746\ m^2$, $C = 6{\cdot}093029\ m^3$.

5) $O = a^2 + a\sqrt{4h^2 + a^2} = 40{\cdot}176\ m^2$.

6) $O = 193{\cdot}3087\ dm^2$, $C = 105{\cdot}801346\ dm^3$ (193·31, 105·8).

7) $O = 647{\cdot}8368\ m^2$, $C = 620{\cdot}3832\ m^3$.

Digitized by Google

8) $O = ab + \frac{a}{2}\sqrt{4c^2 - a^2} + \frac{b}{2}\sqrt{4c^2 - b^2} = 99{\cdot}541\ m^2$,

$C = \frac{ab}{6}\sqrt{4c^2 - (a^2 + b^2)} = 45{\cdot}827\ m^3$.

9) $C = 142{\cdot}26885\ m^3$, $\alpha = 64^0\ 20'\ 27{\cdot}94''$ $(64^0\ 20'\ 28'')$.

10_a) $O = 148{\cdot}1988\ dm^2$, $C = 75{\cdot}1569\ dm^3$.

10_b) $O = \frac{na^2}{2}\operatorname{cotg}\frac{180^0}{n}\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$, $C = \frac{na^3}{24}\operatorname{cotg}^2\frac{180^0}{n}\operatorname{tg}\alpha$,

$O = 214{\cdot}07\ dm^2$, $C = 195{\cdot}987\ dm^3$.

11) $a = \sqrt[3]{6\sqrt{\operatorname{cotg}\alpha}} = 5{\cdot}2094$, $s = \frac{a}{2}\sqrt{2 + \operatorname{tg}^2\alpha} = 7{\cdot}4693$.

12) $C = \frac{1}{3}\sqrt{2}.s^3.\sin\alpha.\sin 2\alpha = 23.124{\cdot}813\ (23.125)\ m^3$.

13) Die Grundlinie der durch die erste und fünfte Seitenkante gelegten Dreiecksfläche ist die Seite eines dem Kreise eingeschriebenen gleichseitigen Dreieckes, somit, wenn R der Radius ist: $R\sqrt{3}$,

$C = \frac{4\sin 60^0}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\cos 60^0}{\sqrt{3}}} = \sqrt[4]{\frac{1}{3}} = 1{\cdot}0746\ m^3$.

14) $O = 4{\cdot}9934\ a^2$.

15) $C = 1695{\cdot}684$ $(1695{\cdot}68)$.

16) $C = 49{\cdot}90535\ m^3$; $\varphi = 77^0\ 56'\ 48{\cdot}5''$.

17) Die drei Kanten an der Basis sind: $4{\cdot}40441\ m$, $4{\cdot}84917\ m$, $6{\cdot}63695\ m$; die Basisfläche $10{\cdot}67509\ m^2$, der Inhalt $29{\cdot}76712\ m^3$.

18) Der Inhalt der ganzen Pyramide ist:

$C = \frac{s^3\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}{3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2}}\sqrt{\sin\frac{\alpha+\delta}{2}\sin\frac{\alpha-\delta}{2}}$, wo $\alpha = 45^0$.

$C = 30.437{\cdot}175$, $C_1 = 21306$.

19) $\frac{3}{B}\left[C - \sqrt[3]{C^2(C - C_1)}\right]\ m$ über der Basis.

a) $6\ m$, *b*) $4{\cdot}00667\ m$.

20) $O = \left(\frac{aH}{H - h_1}\right)^2 + a^2 + 2ah_1\frac{2H - h_1}{H - h_1}\sqrt{1 + \frac{a^2}{4(H - h_1)^2}} = 48.000$.

21) $B = \frac{s}{2} + \frac{1}{2h}\sqrt{s^2h^2 - 4(3C - hs)^2}$;

$b = \frac{s}{2} - \frac{1}{2h}\sqrt{s^2h^2 - 4(3C - hs)^2}$.

Die Höhe der Ergänzungspyramide ist $x = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$.

$C = \frac{B(h + x)}{3}$,

a) $B = 289\ cm^2$, $b = 169\ cm^2$, $x = 48^3/_4\ cm$,

$C = 6141^1/_4\ cm^3$,

b) $B = 1\ m^2$, $b = 0{\cdot}64\ m^2$, $x = 19{\cdot}2\ m$, $C = 8\ m^3$.

Digitized by Google

22) $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{c^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2)} = 27 \cdot 42577\ m.$

23) *a)* $O = 67 \cdot 280492\ m^2$, $C = 30 \cdot 022214\ m^3$.
b) $O = 22 \cdot 737651\ dm^2$, $C = 4 \cdot 272392\ dm^3$.

24) $O = a^2 + \frac{4a^2c}{a^2 - b^2} = 174 \cdot 96\ dm^2$,

$C = \frac{a^3}{6(a^2 - b^2)} \sqrt{16c^2 - (a^2 - b^2)^2} = 96 \cdot 8885\ dm^3$.

§ 26. Kegel.

1) Welchen Inhalt hat ein senkrechter Kegel, wenn die in einer Ebene ausgebreitete Mantelfläche desselben einen Sektor bildet, dessen Zentriwinkel 120° und dessen Halbmesser $1 \cdot 5\ m$ beträgt?

2) Ein Kreisausschnitt, dessen Zentriwinkel $\alpha = 74° 47'$, gibt die Mantelfläche eines Kegels von $f = 1052 \cdot 9\ dm^2$ Oberfläche; wie groß ist der Inhalt dieses Kegels?

3) Aus einem Kreise mit dem Radius s ist ein Sektor von $\alpha°$ ausgeschnitten und zu einem Kegelmantel umgebogen; wie groß ist das Volumen des Kegels? $\alpha = 60°$.

4) Aus dem Volumen $= 92\ dm^3$ und dem Basisradius $= 3 \cdot 5\ dm$ eines geraden Kegels ist der Zentriwinkel jenes Sektors zu berechnen, welcher durch das Aufrollen des Kegelmantels entsteht.

5) Wird Durchmesser und Seite eines geraden Kegels von $13 \cdot 345\ m^2$ Oberfläche je um $1\ m$ größer genommen, so erhält der neue Kegel eine Oberfläche von $31 \cdot 4\ m^2$. Wie groß waren jene Elemente beim ersten Kegel?

6) Ein senkrechter Kegel und ein gleichseitiger Zylinder haben eine gemeinschaftliche Grundfläche und eine gleiche Oberfläche. Wie groß ist der Kubikinhalt des Kegels, wenn der Radius des Zylinders $35 \cdot 32\ dm$ beträgt? (Allgemein und speziell.)

7) Ein gleichseitiger Kegel hat denselben Inhalt wie ein gerader gleichseitiger Zylinder. Die Oberfläche des Zylinders beträgt aber um $15\ m^2$ weniger als die des Kegels. Wie groß ist der Radius der Basis des Kegels, und wie groß der des Zylinders?

8) Von einem geraden Kegel ist die Seitenlinie $s = 89\ cm$ und die Differenz der Höhe und des Radius der Grundfläche $d = 41\ cm$ bekannt; wie groß ist die Mantelfläche und das Volumen des Kegels?

9) Wie groß ist das Volumen des geraden Kegels, dessen Oberfläche so groß ist wie die eines Kreises mit dem Radius $3\ dm$ und

Digitized by Google

dessen Höhe das geometrische Mittel zwischen der Seite und dem Basisradius ist?

10) Der Inhalt eines geraden Kegels ist aus seiner Oberfläche und der Seite S zu berechnen.
Speziell $O = 2808 \cdot 6\ m^2$, $S = 36\ m$.

11) Die Oberfläche eines geraden Kegels sei $O = 28 \cdot 3144\ m^2$, die Mantelfläche $M = 20 \cdot 8144\ m^2$; wie groß ist das Volumen und wie groß der Zentriwinkel des durch die Abwickelung der Mantelfläche entstehenden Kreisausschnittes?

12) Bei einem senkrechten Kegel von h (20 m) Höhe verhalte sich die Grundfläche zur Mantelfläche wie $m : n$ (5 : 16). Es ist die Oberfläche und der Inhalt dieses Kegels zu berechnen.

13) Von einem geraden Kegel ist die Höhe $H = 10\ cm$ und der Halbmesser der Grundfläche $R = 4\ cm$ gegeben; man soll durch einen der Grundfläche parallelen Schnitt einen Kegel abschneiden, welcher $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ des gegebenen beträgt. Wie groß ist die Höhe und die Grundfläche des abgeschnittenen Kegels?

14) Ein Prisma ist $h = 3 \cdot 2\ dm$ hoch und hat als Grundfläche ein regelmäßiges Zehneck, dessen Umfang $u = 7 \cdot 2\ dm$ ist. Wie groß ist der Inhalt eines Kegels von derselben Höhe, dessen Grundfläche ein dem Zehnecke umgeschriebener Kreis ist?

15) Wie hoch ist ein gerader Kegel von $75328 \cdot 5\ cm^3$ Inhalt, wenn der Durchmesser seiner Basis 62 cm lang ist, und in welcher Entfernung von der Grundfläche muß ein zu dieser paralleler Schnitt geführt werden, damit die Schnittfläche gleich werde der halben Basis?

16) Wie verhält sich der Inhalt eines gleichseitigen Kegels zum Inhalt des dem Kegel eingeschriebenen Würfels?

17) Die Katheten eines rechtwinkeligen Dreieckes sind $2 \cdot 4\ m$ und 5 m lang. Dasselbe dreht sich um seine Hypotenuse als fixe Achse; wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt des so erzeugten Doppelkegels? (Allgemein und speziell.)

Mit Trigonometrie.

18) Ein gerader Kegel habe an der Spitze des Achsenschnittes den Winkel $\alpha = 70^\circ\ 40'$ und die Peripherie des Grundkreises sei $p = 84 \cdot 9\ m$. Wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt?

19) Ein Achsialdreieck eines geraden Kegels hat den Inhalt $f = 10\ dm^2$ und den Scheitelwinkel $\alpha = 50^\circ$; wie groß ist das Volumen?

Digitized by Google

20) Der Inhalt eines geraden Kegels sei $C = 179{\cdot}044$ und seine Seitenlinien seien unter $\alpha = 67^0\ 5'\ 18''$ gegen die Basis geneigt; wie groß ist die Mantelfläche?

21) Der Inhalt eines geraden Kegels beträgt 45 cm^3. Wie groß ist der Radius und die Höhe, wenn letztere mit der Seite einen Winkel von $23^0\ 8'$ bildet?

22) Die Oberfläche eines geraden Kegels ist 20 dm^2, wie hoch ist der Kegel, wenn dessen Seite mit der Höhe einen Winkel von 55^0 bildet?

23_a) Ein rechtwinkeliges Dreieck rotiert um seine größere Kathete; wie groß ist die Oberfläche des Rotationskörpers, wenn das Produkt aus der Hypotenuse und der Achse $= m$ und der der Achse gegenüberliegende Winkel gleich α ist?

$$m = 486{\cdot}4, \quad \alpha = 84^0\ 32'\ 50''.$$

23_b) Ein rechtwinkeliges Dreieck rotiert nacheinander um seine beiden Katheten a und b und erzeugt zwei Körper, deren Volumina sich zueinander verhalten wie 3 : 4; sodann rotiert es um seine Hypotenuse c und erzeugt einen Körper vom Volumen $1200\pi m^3$. Wie groß sind die Oberflächen der Körper?

24) Über derselben kreisförmigen Grundfläche, deren Halbmesser 512 cm ist, erheben sich zwei gerade Kegel. Die Seitenlinie des einen ist gegen die Grundfläche unter dem Winkel $\alpha = 78^0\ 47'\ 50''$, die des andern unter dem Winkel $\beta = 19^0\ 33'\ 10''$ geneigt. Es soll Inhalt und Oberfläche des zwischen beiden Kegelmänteln liegenden Raumes angegeben werden.

25) Ein schiefwinkeliges Dreieck, dessen Seiten a, b, c gegeben sind, dreht sich um je eine Seite. Man bestimme die Volumina der so entstehenden Rotationskörper und untersuche die Schlußwerte für ein gleichschenkeliges und rechtwinkeliges Dreieck.

26) Ein Dreieck, dessen Seite c mit den ihr anliegenden Winkeln α und β [wobei $\alpha > \beta$ sein soll] gegeben ist, wird um die Seite c als Achse gedreht. Es ist der Inhalt und die Oberfläche des dadurch entstehenden Körpers durch einen zur logarithmischen Berechnung geeigneten Ausdruck zu bestimmen.

1. $c = 6\ m$, $\alpha = 97^0\ 12'$, $\beta = 13^0\ 8'$.
2. $c = 6\ dm$, $\alpha = 72^0$, $\beta = 60^0$.

27) Wie groß ist der Inhalt eines schiefen Kegels, wenn die kleinste Seitenlinie b desselben 17 m beträgt und gegen die Grundfläche unter dem Winkel $\alpha = 82^0\ 54'\ 30''$, die größte Seitenlinie aber unter dem Winkel $\beta = 35^0\ 40''\ 20'$ geneigt ist?

Digitized by Google

28) Die Verbindungslinie des Scheitels mit dem Mittelpunkte der Basis eines schiefen Kegels beträgt $a = 7\ m$, die größte Seitenlinie $b = 12\ m$, die kleinste $c = 8\ m$; wie groß ist der Radius R und das Volumen des Körpers?

29) Die größte Seite eines schiefen Kegels ist $S = 376{\cdot}5\ m$, die kleinste $s = 256{\cdot}75\ m$; der Winkel, welchen dieselben an der Spitze miteinander bilden, ist $\alpha = 48^\circ\ 25'\ 42''$. Wie groß ist der Inhalt dieses Kegels?

30) Es ist der Inhalt und die Verbindungslinie des Scheitels mit dem Mittelpunkte der Basis eines schiefen Kegels aus der längsten Seitenlinie $S = 58$, der kürzesten $s = 41$ und dem Halbmesser $R = 25{\cdot}5$ der Grundfläche zu berechnen.

31) In einem schiefen Kegel beträgt die längste Seitenlinie 20 m, die kürzeste 15 m, die Höhe des Kegels selbst beträgt 12 m. Wie groß ist das Volumen und die Verbindungslinie des Scheitels mit dem Mittelpunkte der Basis des Kegels? Welchen Winkel schließen die größte und die kleinste Seitenlinie miteinander ein?

32) Über einem Kreise, in welchem eine Sehne $6{\cdot}38\ m$ und der zugehörige Peripheriewinkel $58^\circ\ 34'\ 16''$ ist, erhebt sich ein Kegel, dessen größte Seite $15{\cdot}68\ m$, dessen kleinste $11{\cdot}27\ m$ beträgt. Wie groß ist sein Volumen?

33) Das Volumen einer geraden vierseitigen Pyramide mit quadratischer Basis ist $V = 640\ m^3$; der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Basis: $\alpha = 61^\circ\ 55'\ 39''$. Wie groß sind die Kanten? Wie groß ist der Unterschied der Volumina der um und in die Pyramide beschriebenen Kegel? (Allgemein und speziell.)

Kegelstutz.

34) Ein dem Zentriwinkel 288° entsprechender Ausschnitt des Ringes, den die konzentrischen Kreise mit den Radien R und r bilden, wird zu einem geraden Kegelstutze umgebogen; wie groß ist der Inhalt desselben?

35) Ein Gefäß von der Form eines abgestumpften Kegels hat eine Bodenfläche von 15 dm^2, der Durchschnitt der oberen Öffnung hat 10 dm^2 und seine Höhe beträgt 12 dm. Wie groß ist der Bodendruck, wenn dieses Gefäß mit Wasser gefüllt ist, und um wieviel ist dieser größer als das Gewicht des Wassers?

36) In einem Kegelstutze, dessen größere Basis $B = 100\ m^2$ und dessen Höhe $h = 48\ m$ beträgt, stehen die Halbmesser zueinander im Verhältnis $m : n = 5 : 4$; welches ist der Inhalt des Kegelstutzes?

Digitized by Google

37) Das Gewicht einer steinernen Säule von der Form eines abgestutzten Kegels beträgt 6175 kg; es sollen der obere und untere Durchmesser aus folgenden Angaben berechnet werden: $d : D = 5 : 6$, $h = 8\ D$, spez. Gewicht $= 2{\cdot}5$.

38) Um zwei sich berührende Kugeln mit den Radien a und b ist ein Kegelstutz beschrieben; der Inhalt desselben ist zu berechnen. Speziell $a = 2$, $b = 1$.

39) Die Mantelfläche eines abgestutzten Kegels beträgt $48{\cdot}47\ m^2$, die Radien der beiden Grundflächen verhalten sich $R : r = 5 : 2$, die Höhe des Stutzes ist $3\ m$; wie groß ist das Gewicht des Stutzes, wenn das spezifische Gewicht $11{\cdot}2$ beträgt?

40) Ein gerader Kegel, dessen Oberfläche $62{\cdot}834\ m^2$ beträgt und dessen Grundfläche sich zur Mantelfläche wie $1 : 4$ verhält, wird durch eine zur Basis parallele Ebene geschnitten. Wenn die Schnittfläche die Hälfte der Grundfläche beträgt, wie groß ist dann der Inhalt des Kegelstutzes?

41) Wie groß ist die Oberfläche eines Kegelstutzes von $1000\ cm^3$ Inhalt, wenn die Größen R, h, r sich wie die Zahlen $10 : 7 : 3$ verhalten? (Zuerst allgemein für die Größen C, m, n, p.)

42) Die Oberfläche eines abgekürzten Kegels beträgt $200\ m^2$, die Seitenlinie $5\ m$ und der Halbmesser der Grundfläche $4\ m$; wie groß ist der Inhalt?

43) Ein gerader elliptischer Kegel wird parallel zur Basis abgekürzt. Wie groß sind die beiden Halbachsen der Schnittfläche, wenn die Halbachsen der Grundfläche $27\ dm$, $12\ dm$, das Volumen des Kegelstutzes und dessen Höhe, beziehungsweise $2430{\cdot}619\ dm^3$ und $7\ dm$ betragen?

Mit Trigonometrie.

44) In einer Fabrik soll ein Sammelgefäß von $h = 8\ dm$ und $C = 2000\ dm^3$ Inhalt in der Form eines abgekürzten geraden Kegels konstruiert werden, und zwar soll der größere obere Grundkreis einen $n = 1^2/_3$ mal so großen Radius haben wie der untere. Wie groß sind die Radien und unter welchem Winkel ist die Seitenlinie gegen die Grundfläche geneigt?

45) Bei einem geraden, abgestutzten Kegel von der Seitenlänge 1 ist die Mantelfläche gleich der großen Grundfläche und der Neigungswinkel der Mantelfläche gegen die Grundfläche $\alpha = 60^0$; wie groß sind die Radien und die Grundfläche?

46) Wie groß ist der Inhalt eines geraden Kegelstutzes, wenn die Mantelfläche $M = 194{\cdot}35\ cm^2$, die Seite $s = 7{\cdot}9\ cm$ und der

Digitized by Google

Neigungswinkel $\alpha = 84^0\,28'\,30''$ derselben gegen die Grundfläche gegeben sind?

47$_a$) Wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt eines abgestumpften Kegels, wenn der Unterschied der beiden Grundflächen 8 dm^2 beträgt und das Verhältnis der Peripherien derselben 5 : 3, der Neigungswinkel einer Seite gegen die Grundfläche $19^0\,28'\,16{\cdot}38''$ ist?

47$_b$) Die Radien der Grundflächen eines geraden Kegelstumpfes sind die Wurzeln der Gleichungen

$$\tfrac{3}{4}\sqrt{x-y} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x-y}}, \quad \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 5$$

und der Neigungswinkel der Seite gegen die größere Grundfläche leistet der Gleichung $\cos\alpha + \sin\frac{\alpha}{2} = 1$ genüge. Der Mantel und das Volumen des Kegelstumpfes sind zu berechnen.

48) Ein gerader Kreiskegel, dessen Mantelfläche zur Grundfläche unter dem Winkel α geneigt ist, soll in solcher Weise abgestutzt werden, daß die Oberfläche des entstandenen Stutzes gleich werde der Mantelfläche des ganzen Kegels. In welchem Verhältnisse wird der Abstand der schneidenden Ebene vom Scheitel zur Höhe des ganzen Kegels stehen müssen? Für welche Werte von α läßt die Aufgabe überhaupt eine Lösung zu?
Spezieller Fall $\alpha = 75^0\,12'$.

49) Das Volumen eines geraden Kegelstumpfes beträgt $C = 5145{\cdot}03\,dm^3$. Der Winkel der Seite mit der Grundfläche ist $75^0\,14'\,26''$ und die Differenz der Radien der Grundflächen $4{\cdot}25\,dm$. Wie groß sind die Radien der Grundflächen?

50) Das Volumen eines geraden, abgestutzten Kegels sei $V = 981{\cdot}3573\,m^3$, die Höhe desselben $h = 8{\cdot}5\,m$ und die Neigung der Seitenfläche gegen die größere Grundfläche $\alpha = 70^0\,33'\,36''$; wie groß sind die Radien der Grundflächen?

51) Ein gerader Kegel wird 2 m hoch über der Basis abgestutzt, so daß der Inhalt des Stutzes 36 m^3 beträgt. Wenn sich die beiden Kreisflächen verhalten wie 5 : 3, wie groß ist die Höhe und der Inhalt des ganzen Kegels? und wie groß ist die Neigung der Mantelfläche gegen die Basis?

52) Ein rechtwinkliges Dreieck wird um eine durch den Fußpunkt der Hypotenuse gehende, auf der Basiskathete senkrecht stehende Gerade gedreht. Wie groß ist das Volumen des Rotationskörpers, wenn das vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällte Perpendikel $p = 4\,m$ ist und mit der Basiskathete den Winkel $\alpha = 52^0\,43'\,15''$ einschließt?

Digitized by Google

53) Es ist der Inhalt des Rotationskörpers zu bestimmen, der entsteht, wenn sich ein Dreieck mit den Seiten a, b und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel γ um eine Achse dreht, welche durch den Scheitel des Winkels γ geht und senkrecht auf der Seite a steht. Man spezialisiere die sich ergebende allgemeine Formel für den Fall, daß das rotierende Dreieck gleichseitig ist.

54_a) Ein Rhombus, dessen Seite $a = 12{\cdot}5\ cm$ ist, wird um eine Achse gedreht, welche mit der kleineren Diagonale des Rhombus parallel und durch einen Eckpunkt geht. Wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt des dadurch entstehenden Rotationskörpers, wenn die kleinere Diagonale gleich der Seite des Rhombus ist?

54_b) Ein Deltoid mit einer Diagonale $D = 10\sqrt{3}$ rotiert um die zweite Diagonale d. Das Volumen des Rotationskörpers ist $V = 400\pi\ cm^3$ und die Oberfläche $O = 120\sqrt{3}\pi\ cm^2$. Die Seiten und Winkel des Deltoids sind zu berechnen.

55) Ein regelmäßiges Sechseck von $s = 6\ dm$ Seitenlänge rotiert um eine seiner Seiten; welchen Rauminhalt hat der dadurch entstehende Körper?

56) Wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt des Körpers, welcher entsteht, wenn ein regelmäßiges Fünfeck von 2 dm Seitenlänge um die von einer Ecke auf die gegenüberliegende Seite gefällte Senkrechte gedreht wird?

57) Ein regelmäßiges Sechseck rotiert um eine der durch sein Zentrum gehenden Diagonalen, ein ihm kongruentes um die Gerade, welche durch die Halbierungspunkte zweier Gegenseiten geht. In welchem Verhältnisse stehen die Volumina der Rotationskörper?

58) Ein in einen Kreis gezeichnetes reguläres Zwölfeck rotiert zunächst um eine Gerade, die zwei gegenüberliegende Ecken desselben verbindet; hierauf rotiert es um eine Gerade, welche die einander gegenüberliegenden Mittelpunkte zweier Seiten verbindet. Wenn der Radius des Kreises 100 cm ist, um wieviel unterscheiden sich die Oberflächen dieser beiden Rotationskörper?

59_a) Ein gleichschenkeliges Trapez rotiert um die große Parallelseite, wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche des rotierenden Körpers, wenn ein Winkel des Trapezes $\alpha = 54^\circ\,18'$ und das Verhältnis der beiden Parallelen 5 : 3, ihre Mittellinie aber $28{\cdot}8\ dm$ ist?

59_b) Ein gleichschenkeliges Trapez von der Fläche $f = 18\ m^2$ rotiert nacheinander um die beiden Parallelseiten und erzeugt dadurch die Volumina $V_a = 42\pi\ m^3$ und $V_b = 66\pi\ m^3$. Wie groß sind

Digitized by Google

die Oberflächen dieser beiden Körper und wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt des Rotationskörpers, wenn das Trapez um seine Symmetrale rotiert?

60) Es sind von einem Dreiecke der Inhalt F und die Abstände p, q, r seiner Winkelspitzen von einer in der Ebene des Dreieckes liegenden festen Achse gegeben. Es wird der Inhalt des Körpers gesucht, welcher entsteht, wenn das Dreieck um die Achse rotiert.

61) Ein regelmäßiges Sechseck mit der Seite $s = 4{\cdot}5\ cm$ rotiert um eine Achse, welche im Abstande S parallel zu einer Seite des Sechseckes gezogen ist; wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt des entstehenden Körpers? $S = s$.

62) Der Radius des Grundkreises eines geraden Kegels ist $R = 10\ m$, verkleinert man ihn bei gleich bleibender Höhe auf $3\ m$, so wird der Winkel an der Basis verdreifacht. Wie groß ist der Inhalt des von den beiden Kegelmänteln begrenzten Körpers?

63) Einem Würfel ist ein gerader Kegel umgeschrieben, dessen Höhe gleich ist der doppelten Kante des Würfels. Wie groß ist der Winkel am Scheitel des senkrechten Achsendurchschnittes des Kegels? Denkt man sich oberhalb des Würfels wieder einen Würfel in dem kleinen Kegel eingeschrieben u. s. f., so ist die Frage, wie groß ist der Inhalt aller dieser Würfel und wie verhält sich derselbe zum Inhalt des Kegels?

§ 26a.

1) $C = 0{\cdot}37024\ m^3$.

2) $C = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{f^3\,(360^2 - \alpha^2)\,\alpha}{360^3\,\pi}} = 2864{\cdot}64\ (2864{\cdot}6)\ dm^3$.

3) $C = \frac{s^3\alpha^2\pi}{3.(360)^3}\sqrt{360^2 - \alpha^2}$.

$C = \frac{s^3\pi}{648}\sqrt{35} = 0{\cdot}02868196\ s^3\ (0{\cdot}028682\ s^3)$.

4) $157^0\ 53'\ 27''$.

5) $R = {}^1/_2\ m$, $S = 8\ m$.

6) Ist R der Radius des Zylinders, so ist

$C = \frac{R^3\pi}{3}\sqrt{24}$; $C = 226{\cdot}04573\ m^3$.

7) $R = 3{\cdot}5478\ m$, $r = 2{\cdot}3447\ m$.

8) $M = 3471\pi\ cm^2$, $C = 40.560\pi\ cm^3$.

9) $8{\cdot}4903\ dm^3$.

Digitized by Google

10) $R = -\frac{S}{2} + \sqrt{\frac{S^2}{4} + \frac{O}{\pi}}$; $h = \sqrt{S^2 - R^2}$; $C = R^2\pi . \frac{h}{3}$

$R = 16{\cdot}89992\ m$, $h = 31{\cdot}78668\ m$; $C = 9506{\cdot}98\ m^3$.

11) $\frac{1}{3\pi}\sqrt{O(O-M)(2M-O)\pi} = 10$, $\alpha = \frac{(O-M)360}{M} = 129^0\ 43'\ 4{\cdot}4''$.

12) $O = \frac{h^2 m\pi}{n-m}$; $J = \frac{h^3 m^2 \pi}{3\,(n^2-m^2)}$. $O = \frac{2000\,\pi}{11}$, $J = \frac{200000\,\pi}{693}$.

13) $r = R\sqrt[3]{\frac{m}{n}}$; $h = H\sqrt[3]{\frac{m}{n}}$; $r^2\pi = R^2\pi\sqrt[3]{\left(\frac{m}{n}\right)^2}$.

$r = 2\sqrt[3]{4}$, $h = 5\sqrt[3]{4}$, $r^2\pi = 8\pi\sqrt[3]{2}$.

14) $C = \frac{u^2 h\pi}{600}(3 + \sqrt{5}) = 4{\cdot}54798\ dm^3$.

15) $H = 74{\cdot}852672\ cm$, $x = 21{\cdot}923843\ cm$.

16) $1 : 0{\cdot}260167$.

17) $O = \frac{\pi . ab . (a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $C = \frac{\pi . a^2 b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$.

$O = 50{\cdot}30013\ (50{\cdot}299)\ m^2$, $C = 27{\cdot}189294\ (27{\cdot}189)\ m^3$.

18) $O = \frac{p^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{4} + 45^0\right)}{2\pi \sin\frac{\alpha}{2}}$; $C = \frac{p^3 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}{24\pi^2}$.

$O = 1565{\cdot}4\ m^2$, $C = 3644{\cdot}342\ (3644{\cdot}4)\ m^3$.

19) $C = \frac{f\pi}{3}\sqrt{f . \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = 22{\cdot}61335\ (22{\cdot}6134)\ dm^3$.

20) $M = \sqrt[3]{\left(\frac{3C}{\sin\alpha}\right)^2 \frac{\pi}{\cos\alpha}} = 140{\cdot}0012\ (140)$ Flächeneinheiten.

21) $h = \sqrt[3]{\frac{3C . \operatorname{cotg}^2\alpha}{\pi}}$; $R = \sqrt[3]{\frac{3C . \operatorname{tg}\alpha}{\pi}}$.

$h = 6{\cdot}17482\ cm$, $R = 2{\cdot}63803\ cm$ $(6{\cdot}1747,\ 2{\cdot}6381)$.

22) $h = 1{\cdot}185535\ dm$ $(1{\cdot}1856)$.

23_a) $O = 2m\pi \cos^2\frac{\alpha}{2} . \operatorname{cotg}\alpha = 159{\cdot}7264\ (159{\cdot}73)\ m^2$.

23_b) $O_a = 600\pi$; $O_b = 900\pi$; $O_c = 420\pi$.

24) $O = \frac{2r^2\pi}{\cos\alpha\cos\beta} . \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; $C = \frac{r^3\pi}{3}\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

$C_1 = \frac{r^3\pi}{3}\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

$O = 511{\cdot}2889\ (511{\cdot}29)\ m^2$, $C = 759{\cdot}5795\ (759{\cdot}6)\ m^3$;

$C_1 = 659{\cdot}743\ (659{\cdot}7)$.

Digitized by Google

25) Rotiert das Dreieck um die Achse a, so:
$C_a = \frac{4\pi}{3a} F^2$, um b, so: $C_b = \frac{4\pi}{3b} . F^2$, um c, so: $C_c = \frac{4\pi}{3c} F^2$,
wo $F^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ und $s = \frac{a+b+c}{2}$; ist das Dreieck gleichschenkelig, so ist $a = c$ und
$C_a = C_c = \frac{\pi b^2 (2a+b)(2a-b)}{12a}$; $C_b = \frac{\pi b^2 (2a+b)(2a-b)}{12b}$;
ist das Dreieck rechtwinkelig, c die Hypotenuse, so ist
$C_a = \frac{\pi a b^2}{3}$, $C_b = \frac{\pi a^2 b}{3}$, $C_c = \frac{\pi a^2 b^2}{3c}$.

26) $C = \frac{c^3\pi . \sin^2\alpha \sin^2\beta}{3\sin^2(\alpha+\beta)}$; $O = \frac{c^2\pi \sin\alpha \sin\beta \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}$.
$C = 13{\cdot}07301$ (13·0724) m^3, $O = 35{\cdot}35602$ (35·356) m^2;
$C = 277{\cdot}8492$ (277·86) dm^3, $O = 306{\cdot}4905$ (306·49) dm^2.

27) $C = \frac{b^3\pi . \sin\alpha . \sin^2\gamma}{12\sin^2\beta}$.
$\gamma = 61^\circ\,25'\,10''$, $C = 2894{\cdot}3847$ (2894·4) m^3.

28) $R = \sqrt{55} = 7{\cdot}4161985\ m$,
$C = 5\pi\sqrt{561} = 372{\cdot}05\ m^3$.

29) $C = \frac{D.S\,s\pi\sin\alpha}{12}$, wo $D = \frac{S-s}{\cos\varphi}$ und $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{Ss}\sin\frac{\alpha}{2}}{S-s}$,
$\varphi = 64^\circ\,50'\,54''$, $C = 5{,}334.450$ (5,334.500) m^3.

30) $K = \frac{R\pi}{12}\sqrt{(2R+S+s)(2R+S-s)(2R+s-S)(S+s-2R)}$,
$t = \sqrt{\frac{S^2+s^2-2R^2}{2}}$ = Achse des Kegels = 43·26951,
$K = 27.237{\cdot}61\ m^3$.

31) Es sind zwei Fälle möglich: 1. Die Höhe fällt innerhalb der beiden Linien, dann ist $C = 625\pi\ m^3$, die Achse 12·5 m und $\alpha = 90^\circ$. 2. Die Höhe fällt außerhalb, dann ist $C = 49\pi\ m^3$, die Achse ist 17·3277 m und $\alpha = 16^\circ\,15'\,36{\cdot}5''$ ($16^\circ\,15'\,36''$).

32) Der Radius ist 3·73848 m und $C = 153{\cdot}0103\ m^3$ (153·01).

33) Die Basiskante ist $a = \sqrt[3]{6 . C . \operatorname{cotg}\alpha}$.
$h = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha$; die Seitenkante $s = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}$.
Der eingeschriebene Kegel hat $\frac{a}{2}$, der umgeschriebene $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ zum Radius, daher $U = \frac{a^2\pi h}{12} = \frac{C\pi}{4}$.
$a = 12{\cdot}6992\ m$, $h = 11{\cdot}9055\ m$, $s = 14{\cdot}9123\ m$;
$U = 160.\pi = 502{\cdot}6548\ m^3$.

Digitized by Google

34) $\frac{16\pi}{125}(R^3 - r^3)$.

35) Das Volumen ist $148{\cdot}989795\ dm^3$, somit ist das Gewicht des Wassers $148{\cdot}989795\ kg$ (wobei destilliertes Wasser von 4° Celsius vorausgesetzt ist), der Bodendruck beträgt aber $180\ kg$, somit um $31{\cdot}010205\ kg$ mehr.

36) $C = \frac{Bh}{3m^2}[m^2 + mn + n^2] = 3904\ m^3$.

37) $D = 77{\cdot}5592\ cm$; $d = 64{\cdot}6327\ cm$, $h = 620{\cdot}4736\ cm$.

38) $J = \frac{2\pi(a+b)}{3ab}(a^4 + a^2b^2 + b^4) = 21\pi$.

39) 5333·78 Zentner.

40) $C = 20{\cdot}976\ m^3$.

41) $O = A^2\pi[m^2 + p^2 + (m+p)\sqrt{n^2 + (m-p)^2}]$.

$A = \sqrt[3]{\frac{3C}{(m^2 + mp + p^2)\pi n}}$,

$O = 737{\cdot}4617\ cm^2$.

42) $C = 209{\cdot}2695\ m^3$.

43) $a = 6{\cdot}1766\ cm$, $b = 2{\cdot}7452\ cm$.

44) $r = 6{\cdot}621843$, $R = nr$, 118° 53′ 27″.

45) $R = 1{\cdot}7071$, $r = 1{\cdot}2071$.

$R^2\pi = M = 9{\cdot}1553$.

46) $C = \frac{\sin\alpha}{12\pi s}(3M^2 + \pi^2 s^4 \cos^2\alpha) = 379{\cdot}9\ cm^3$.

47$_a$) $O = 25{\cdot}4853\ dm^2$, $C = 2{\cdot}30378\ (2{\cdot}3038)\ dm^3$.

47$_b$) $M_1 = 72\pi$, $V_1 = \frac{259\sqrt{3}\,\pi}{3}$,

$M_2 = \frac{2312\,\pi}{81}$, $V_2 = \frac{250579\sqrt{3}\,.\,\pi}{2187}$.

48) Es muß $\cos\alpha < \frac{1}{2}$, d. i. $\alpha > 60°$ sein.

Für $H = 1$ ist $h = \sqrt{\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2\cos\alpha}$,

somit $H : h = 2\sin{}^{\alpha}/_{2} : \sqrt{2\cos\alpha} = 1 : 0{\cdot}58574$.

49) $r = -\frac{d}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{12\,C\,.\,\mathrm{cotg}\,\alpha - \pi d^3}{3\pi d}}$; $R = r + d$,

$r = 7{\cdot}8758\ dm$.

$R = 12{\cdot}1258\ dm$.

50) $r = -\frac{h\,\mathrm{cotg}\,\alpha}{2} + \sqrt{\frac{C}{\pi h} - \frac{h^2\,\mathrm{cotg}^2\,\alpha}{12}} = 4{\cdot}5\ m$;

$R = r + h\,\mathrm{cotg}\,\alpha = 7{\cdot}5\ m$.

51) $H = 8{\cdot}87298\ m$, $C = 67{\cdot}2593\ m^3$; $\alpha = 73°\ 7'\ 54''$.

Digitized by Google

52) $C = \frac{2p^3\pi}{3\cos^2\alpha . \sin\alpha} = 459{\cdot}1753\ (459{\cdot}18)\ m^3$.

53) $C = \frac{ab\pi}{3} \sin\gamma\,[a + b\cos\gamma]$.

Für $a = b$ und $\gamma = 60^0$ ist $C = \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{4}$.

54_a) $O = 4\pi a^2\sqrt{3}$, $C = \frac{3a^3\pi}{2}$;

$O = 3400{\cdot}874\ cm^2$; $C = 9203{\cdot}883\ cm^3$.

54_b) Die Seiten sind 10 *cm* und 14 *cm* und die von den Seiten (10, 10), (10, 14), (14, 14) eingeschlossenen Winkel sind 120^0, $81^0\,47'\,13''$, $76^0\,25'\,34''$.

55) $C = \frac{9s^3\pi}{2}$; $C = 3053{\cdot}628\ dm^3$.

56) $O = 29{\cdot}75759\ dm^2$.

$C = 13{\cdot}6526\ dm^3$.

57) $C : C_1 = R^3\pi : \frac{7}{12} R^3\pi\sqrt{3} = 0{\cdot}98974 : 1$.

58) $O_1 = 121.381{\cdot}87\ cm^2$, $O_2 = 117245{\cdot}88\ cm^2$, daher $O_1 - O_2 = 4135{\cdot}99\ cm^2$.

59_a) $O = 2136{\cdot}65\ dm^2$, $C = 8326{\cdot}78\ (8326{\cdot}8)\ dm^3$.

59_b) $O_a = 42\pi\ m^2$, $O_b = 90\pi\ m^2$; $O = 56\pi\ m^2$, $V = 31\pi\ m^3$.

60) $C = \frac{2\pi . F}{3}(p + q + r)$.

61) $O = 6\pi s\,(2S + s\sqrt{3}) = 1424{\cdot}537\ (1424{\cdot}55)\ cm^2$,

$C = \frac{3\pi s^2}{2}(2\sqrt{3}\,S + 3s) = 2775{\cdot}792\ (2775{\cdot}8)\ cm^3$.

62) $C - c = \frac{R\pi}{3}(R^2 - r^2)\sqrt{\frac{R - 3r}{3R - r}}$. Speziell $\frac{910\pi}{27}\sqrt{3}$.

63) $J : J_1 = 6 : 7\pi$, $70^0\,31'\,43{\cdot}6''$.

§ 27. Kugel.

1) Wenn eine Kugel so abgedreht wird, daß sich ihre Oberfläche um den $n$ten Teil ihres Flächeninhaltes verkleinert, um wieviel wird ihr Rauminhalt kleiner?
Speziell $n = 4$.

2) Wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt einer Kugel, auf welcher ein Kreis den Radius $r = 25\ cm$ und von seinem Pole den Abstand $d = 16\ cm$ hat?

3) Jemand steht vom senkrechten Durchschnitte eines Turmes um $19{\cdot}3\ m$ entfernt und sieht die Spitze des Turmknopfes, der die Form einer Kugel hat, unter einem Winkel von $63^0\,20'$. Wie groß ist die Oberfläche desselben, wenn er einen Gesichtswinkel von $2^1/_2{}^0$ bildet?

Digitized by Google

4) Der zwischen zwei sich von ihnen berührenden Kugelflächen befindliche Raum beträgt $a = 108 \cdot 909\ m^3$, ihre Zentrallinie $d = 2\ m$. Wie groß sind die Radien der beiden Kugeln?

5) Eine Kugel, deren Oberfläche O gegeben ist, soll in einen geraden Zylinder von gleichem Inhalt verwandelt werden. Wie groß ist der Radius der Grundfläche, wenn der Mantel des Zylinders gleich der Oberfläche der Kugel ist?
$O = 36 \cdot 1035\ m^2$.

6) Die Oberfläche einer Kugel beträgt $O = 28 \cdot 27431\ m^2$; wie groß ist die Mantelfläche eines geraden Zylinders, welcher denselben Inhalt hat wie diese Kugel, und bei welchem die Höhe gleich ist dem Durchmesser der Kugel?

7) Einer Kugel vom Halbmesser r ist ein gerader Zylinder eingeschrieben, dessen Oberfläche drei Viertel der Oberfläche der Kugel beträgt; wie groß ist das Volumen des Zylinders?

8) Der Inhalt einer Kugel sei C, es soll die Oberfläche und der Inhalt eines geraden regelmäßigen sechsseitigen Prismas gefunden werden, dessen Grund- und Seitenflächen die Kugel berühren.

9) Ein regelmäßiges dreiseitiges Prisma mit der Grundkante $a = 4$ ist so hoch, daß eine eingeschriebene Kugel nicht bloß die Seitenflächen, sondern auch die beiden Grundflächen tangiert. Es ist die Oberfläche und der Inhalt beider Körper anzugeben und das Verhältnis der Oberflächen zu bestimmen.

10) Zwei Kugeln haben zusammen denselben Inhalt wie ein Würfel mit der Kante a; wie groß ist der Inhalt jeder der beiden Kugeln, wenn sich ihre Radien wie $1 : n$ verhalten?

11) In eine regelmäßige vierseitige Pyramide, deren jede Kante $= a$ ist, soll eine Kugel eingeschrieben werden, wie groß ist der Halbmesser und der Inhalt derselben?

12) Die Grundkante einer geraden Pyramide mit quadratischer Basis ist a, die Seitenkanten sind $\frac{3a}{\sqrt{2}}$. Man berechne den Kubikinhalt der Pyramide und den Radius der um dieselbe beschriebenen Kugel.

13) Einer Kugel, deren Halbmesser $R = 4\sqrt{3}$ ist, sei eine sechsseitige Pyramide eingeschrieben, deren Basis vom Mittelpunkte der Kugel um den halben Radius absteht; man soll den Halbmesser und den Inhalt einer Kugel bestimmen, welche mit jener Pyramide gleichen Inhalt hat.

Digitized by Google

14) Der Radius r einer Kugel ist so in zwei Stücke geteilt, daß das an den Mittelpunkt anliegende Stück die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem zweiten Stücke und dem ganzen Radius ist. Durch den Teilpunkt ist eine Ebene senkrecht auf diesen Radius durch die Kugel gelegt und in dem größeren der so entstandenen Kugelabschnitte ist eine vierseitige regelmäßige Pyramide beschrieben, deren Spitze in der Kugelfläche liegt. Wie groß ist der Inhalt und die Oberfläche dieser Pyramide und der Neigungswinkel der Seitendreiecke gegen die Grundfläche?

15) Der Halbmesser r der Grundfläche und die Höhe h eines senkrechten Kegels sind als Linien gegeben. Man konstruiere den Halbmesser r_1 jener Kugel, deren Oberfläche O_1 gleich ist der Oberfläche O dieses Kegels.
Berechnung von r_1, wenn die Maßzahlen von r und h, nämlich $r = 6$ und $h = 8$, gegeben sind.

16) Eine Kugel und ein gleichseitiger Kegel sind so beschaffen, daß sich ihre Oberflächen wie 1:3 verhalten; wie verhalten sich ihre Inhalte?

17) Eine Kugel vom Radius $r = 1{\cdot}56\ dm$ soll in einen solchen geraden Kegel verwandelt werden, daß der Mantel desselben m mal ($m = 3$) so groß ist als die Grundfläche. Wie groß ist der Halbmesser der Basis und die Höhe des Kegels?

18) Wie groß ist der Inhalt einer Kugel, aus welcher sich ein Kegel von $132{\cdot}8\ m^3$ Inhalt, dessen Spitze im Mittelpunkte der Kugel liegt und dessen Grundkreis der Hälfte des größten Kugelkreises gleich ist, herausschneiden läßt?

19) Es ist die Oberfläche und der Inhalt der Kugel zu bestimmen, welche sich in einem senkrechten Kegel mit dem Radius $r = 12\ dm$ und der Höhe $h = 16\ dm$ einschreiben läßt.

20) Einer Kugel vom Halbmesser $r = 8\ dm$ ist ein gerader Kegel eingeschrieben, dessen Höhe dem Durchmesser der Basis gleich ist; wie groß ist dessen Oberfläche und Volumen?

21) Durch eine Kugel ist ein Schnitt gelegt, dessen Flächeninhalt ein Drittel des größten Kugelkreises ist. Auf dieser Fläche ist ein Kegel errichtet, dessen Spitze der Mittelpunkt der Kugel ist, und dessen Inhalt $480\ m^3$ beträgt. Wie groß ist der Radius dieser Kugel?

22) Der Halbmesser r der Grundfläche eines geraden Kegels, sowie das Verhältnis der Höhe zur Seite: $h : s = m : n$ sei gegeben; wie groß ist der Halbmesser jener Kugel, welche dieselbe Oberfläche wie der Kegel hat?
$r = 6\ m$, $h : s = 4 : 5$.

Digitized by Google

23) Ein gerader Kegel ist durch seine Höhe h und den Halbmesser R seiner Grundfläche bestimmt. Wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt der diesem Kegel ein- und umgeschriebenen Kugel?

24) Wie groß ist die Oberfläche des geraden Kegels, welcher denselben Inhalt hat wie eine Kugel mit der Oberfläche $O = 314\,m^2$, wenn die Achse des Kegels gleich dem Durchmesser der Kugel ist?

25) Die Oberfläche eines senkrechten Kreiskegels ist $^3/_{128}$ von der Oberfläche einer Kugel, deren Radius gleich dem Umfange des Achsenschnittes des Kegels ist. Die Fläche des Achsenschnittes ist $588\,m^2$; wie groß ist der Radius der Basis und die Seite des Kegels?

26) Einer Kugel von $O = 50\,m^2$ Oberfläche ist ein gerader Kegel eingeschrieben, der an der Spitze einen Winkel $\alpha = 34^\circ\,18'\,36''$ hat. Der Mantel und das Volumen dieses Kegels sind zu berechnen.

27) Ein gerader Kegel ist in eine Kugel, mit dem Volumen V eingeschrieben, die Seiten eines durch den Kegel gelegten Achsenschnittes bilden am Scheitel den Winkel α. Wie groß ist das Volumen des Kegels, und wie groß ist der Radius der Kugel? $V = 2713{\cdot}476\,cm^3$, $\alpha = 67^\circ\,14'\,24{\cdot}5''$.

28) In einem Kreise mit dem Radius $r = 40\,cm$ ist ein horizontaler Durchmesser gezeichnet; von dem einen Endpunkte dieses Durchmessers ist unter $\alpha = 25^\circ\,14'\,36''$ eine Sehne gezogen, deren Endpunkt mit dem zweiten Endpunkte des Durchmessers verbunden ist. Um wieviel ist der durch Rotation dieses Dreieckes um den horizontalen Durchmesser entstandene Doppelkegel dem Inhalte und der Oberfläche nach kleiner als die durch Rotation des Halbkreises um dieselbe Achse entstandene Kugel?

29) Auf einer Kugel vom Radius $R = 5\,dm$ befindet sich ein kleiner Kugelkreis, dessen Umfang 8π ist. Wenn die Pole dieses Kreises als die Spitzen zweier Kegel über diesem Kreise als der gemeinschaftlichen Grundfläche angenommen werden, wie groß ist dann die Summe der Inhalte der Kegel, und welches ist das Verhältnis ihrer Inhalte zu dem Inhalte der Kugel?

30) Auf der Grundfläche eines gleichseitigen Kegels, dessen Oberfläche $O = 169{\cdot}56\,cm^2$ ist, wird die größtmögliche Halbkugel aufgesetzt; wie groß ist die Kante eines Würfels, welcher mit dem so begrenzten Körper *a*) gleichen Inhalt, *b*) gleiche Oberfläche hat?

31) Ein Draht, dessen Querschnitt ein Kreis mit dem Radius ϱ ist, wird zu einem kreisförmigen Ringe zusammengebogen, und der Kreis, welchen dabei die Achse des Ringes bildet, hat den

Digitized by Google

Radius r. Dieser Ring liegt auf einer horizontalen Ebene und auf demselben und zugleich auf der Ebene, beide berührend, liegt eine Kugel. Wie groß ist der Radius dieser Kugel? Welches Volumen hat der senkrechte Kegel, welcher den Berührungskreis mit dem Ringe zur Basis hat und dessen Spitze in der Oberfläche der Kugel liegt?

32) Das Volumen eines geraden Kegelstumpfes, welcher einer Kugel vom Radius r umgeschrieben ist, soll berechnet werden, wenn man außerdem noch weiß, daß die kleinere Grundfläche des Kegelstumpfes gleich der Hälfte der größeren ist.
$r = 5{\cdot}34813\ m$.

33) Man berechne das Volumen eines geraden Kegelstumpfes, welcher einer Kugel vom Radius $R = 6{\cdot}7815\ m$ eingeschrieben ist, und zwar derart, daß die kleinere Grundfläche gleich der Hälfte der größeren ist, und daß die größere Grundfläche um den vierten Teil ihres Radius vom Mittelpunkte der Kugel absteht.

34) Es ist der Radius ϱ einer Kugel zu berechnen, deren Volumen viermal so groß ist als das Volumen eines geraden Kegelstumpfes, der zum Halbmesser der unteren Basis R, zum Halbmesser der oberen Basis r hat, und bei dem die Seitenkanten gegen die Basis unter dem Winkel α geneigt sind.
$R = 4{\cdot}5\ cm$, $r = 2\ cm$, $\alpha = 65^\circ\, 18'\, 35{\cdot}5''$.

35) Ein auf der Spitze stehender gerader Kegel, dessen Grundradius $r = 3\ cm$ und dessen Höhe $h = 8\ cm$ ist, sei bis zur Höhe $a = 6\ cm$ mit Wasser gefüllt. Es werde eine Kugel vom Radius $\varrho = 1{\cdot}5\ cm$ hineingelegt, die ganz untergeht; wie hoch ist dann das Niveau des Wassers?

36) Man berechne die Radien R und r $(R > r)$ der Grundkreise eines geraden abgestumpften Kegels, der gleiches Volumen, gleiche Gesamtoberfläche und gleiche Höhe hat mit einer Halbkugel, deren Radius $\varrho = 3\ cm$ gegeben ist.

37) Die Seite eines gleichseitigen Zylinders ist durch

$$\sqrt{2x+2} + \sqrt{7+6x} = \sqrt{7x+72}$$

gegeben. Man schreibe diesem Zylinder einen Kegel und eine Kugel ein, bestimme die Oberflächen und die Inhalte dieser Körper und untersuche, wie sie sich zueinander verhalten.

38) Beschreibt man um einen Kreis ein Quadrat und ein gleichseitiges Dreieck und denkt sich diese drei Flächen um eine durch den Mittelpunkt gehende und auf der Grundlinie dieses Dreieckes und

Digitized by Google

Quadrates Senkrechte gedreht, so entsteht eine Kugel, ein Kegel und ein Zylinder.

α) In welchem Verhältnisse stehen die Manteloberflächen des Zylinders und Kegels und die Kugeloberfläche?

β) Wie verhalten sich die Oberflächen der drei Körper?

γ) Wie verhalten sich die Kubikinhalte?

39$_a$) Die Oberfläche O einer Kugel ist gleich 25 m^2 und die Höhe einer von der Kugel weggenommenen Kalotte gleich 1 m. Es ist die Oberfläche und der Inhalt dieses Kugelsegmentes zu berechnen.

39$_b$) In einem Kreise liegt eine Sehne 7 cm vom Zentrum entfernt und ist um 23 cm länger als der Radius. Der Kreis rotiert um den auf der Sehne normalen Durchmesser; es ist die Oberfläche und der Inhalt des kleineren Segmentes zu berechnen.

40) Eine Kugel vom Halbmesser $3 \cdot 5$ dm wird durch zwei parallele Ebenen derart geschnitten, daß die Oberfläche der Kugel in drei gleiche Teile zerlegt wird. Wie groß ist das Volumen der Kugelhaube?

41$_a$) Eine Kugel, deren Radius $r = 10$ dm ist, wird durch eine Ebene so geschnitten, daß sich die Teile der Oberfläche wie $m : n = 1 : 4$ verhalten. Wie groß sind die Volumina der zugehörigen Segmente?

41$_b$) Von einer Kugel mit dem Radius $r = 5$ ist ein Segment derart abgeschnitten, daß der Inhalt der dem Segmente eingeschriebenen größten Kugel ein Drittel des Inhaltes des Segmentes ist; wie groß ist der Inhalt des Segmentes?

42) Das Volumen einer Kugel ist $C = 2458$ cm^3, der Flächeninhalt eines ebenen Schnittes $f = 185$ cm^2; wie groß sind die Teile des zum Schnitte normalen Radius und wie groß die Teile der Oberfläche der Kugel?

43$_a$) Wie groß ist der Zentriwinkel eines Kugelsegmentes, wenn die Gesamtoberfläche desselben gleich einem größten Kreise der Kugel ist?

43$_b$) Wie groß ist der Zentriwinkel eines Kugelsektors, wenn seine Oberfläche doppelt so groß ist, wie die des größten Kugelkreises?

44) Der Radius einer Kugel ist $r = 7 \cdot 25$ dm, der Achsenschnitt eines Sektors bildet einen Winkel von $2\alpha = 53^\circ\, 12'$; wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt des Sektors?

45) Zur Bedachung (Kugelkalotte) eines Pavillons sollen $O = 20$ m^2 Kupferblech verwendet werden; wie groß ist der Kugelradius zu nehmen, wenn das Dach auf einem kreisförmigen Gemäuer von $\varrho = 2 \cdot 3$ m aufstehen soll?

Digitized by Google

46) Die sphärische Oberfläche einer Kugelmütze sei F, die Höhe derselben h; wie groß ist ihre Basis? Wie groß ist die Gesamtoberfläche und wie groß ist der Kubikinhalt dieses Segmentes? $F = 1{\cdot}5\ m^2$, $h = 0{\cdot}5\ m$.

47$_a$) Eine Kugel von $r = 5\ dm$ soll durch eine Ebene derart geschnitten werden, daß die Kalotte den $m = 1^1/_2$fachen Flächeninhalt des Schnittkreises hat; wie groß muß der Abstand der Schnittebene vom Kugelzentrum sein? In welchem Verhältnisse steht das Volumen des Kugelsegmentes zum Volumen der ganzen Kugel?

47$_b$) Aus einer Kugel wurde ein Sektor so herausgeschnitten, daß sich die Kalotte zum Mantel wie 2 : 3 verhält. Dieser Sektor wird dann in ein Segment und in einen Kegel zerlegt. Wie verhalten sich die Oberflächen und die Volumina dieser beiden Körper?

48) Die Oberfläche eines gleichseitigen Zylinders beträgt $784\ cm^2$; wenn dieser Zylinder in eine Kugel verwandelt würde, wie groß wäre dann das Volumen einer $h = 1\ cm$ hohen Kalotte?

49) Die Höhe eines geraden Kegels beträgt $h = 8\ cm$, der Winkel an der Spitze eines Achsenschnittes $2\alpha = 28^\circ\,48'$; wie groß ist das Volumen jenes Kugelsektors, von welchem der gegebene Kegel ein Ergänzungsstück bildet?

50) Eine Kugel vom Halbmesser $5{\cdot}6421\ m$ wird von einem Punkte A aus beleuchtet; wenn der beleuchtete Teil der Kugeloberfläche $100\ m^2$ beträgt, wie weit steht der leuchtende Punkt vom Mittelpunkte der Kugel ab?

51) Wie weit muß ein leuchtender Punkt von dem Mittelpunkte einer Kugel mit dem Radius r abstehen, damit er den dritten Teil der Kugeloberfläche erhelle?

52) Aus einer Kugel vom Radius $R = 5\ cm$ ist ein zylinderförmiger Kern herausgebohrt, dessen Achse durch den Mittelpunkt der Kugel geht; wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt des herausgebohrten Kernes, wenn der Radius seines Querschnittes $r = 3\ cm$ ist?

53) Eine Kugel vom Halbmesser R besitzt eine zentrale kreisrunde Bohrung in der Weite $d = R$; wie groß sind Gesamtoberfläche und Kubikinhalt des restlichen Körpers?
$R = 1{\cdot}732\ m$.

54) Aus einer Kugel vom Radius R ist ein zylinderförmiger Kern herausgebohrt, dessen Achsen durch den Mittelpunkt der Kugel

Digitized by Google

geht; wie groß ist das Volumen des entstandenen Kugelringes, wenn dessen Höhe $h = 1{\cdot}4\ dm$ ist?

55) Über einer gegebenen Geraden $AB = a$ als Durchmesser ist ein Halbkreis gezeichnet; auf diesem soll ein Punkt C so bestimmt werden, daß, wenn der Halbkreis um AB als Achse gedreht wird, die Sehne AC dieselbe Fläche beschreibt wie der Bogen CB.

56) Wie groß ist die Oberfläche der heißen Zone, der beiden gemäßigten und der beiden kalten Zonen, wenn die Erde als eine Kugel vom Radius 637 Myriameter betrachtet wird?

57) Wie groß ist der Flächeninhalt der Zone zwischen dem 40. und 50. Breitegrade, wenn die Erde als Kugel vom Halbmesser $R = 858{\cdot}48$ geographische Meilen betrachtet wird?

58$_a$) Wie groß ist der Inhalt einer Kugelschicht, welche begrenzt ist von einem größten und einem dem Umfange nach fünfmal kleineren Kugelkreise, wenn die Höhe der Kugelschicht $h = 20\ cm$ ist?

58$_b$) Wie groß ist der Inhalt einer Kugelschicht, welche begrenzt ist von einem größten und einem der Fläche nach fünfmal kleineren Kugelkreis, wenn der Radius der Kugel r ist?

59) Einem geraden Kegel mit dem Radius $r = 12\ cm$ und der Höhe $h = 16\ cm$ ist eine Kugel eingeschrieben. Im Halbierungspunkte seiner Höhe wird der Kegel durch einen zur Basis parallelen Schnitt geteilt. Wie groß sind die beiden dadurch entstehenden Kugelteile, sowohl der Oberfläche wie dem Inhalte nach?

60) Wie groß ist der Inhalt einer konvexen Linse, deren Dicke $2{\cdot}05\ cm$ ist und deren sphärische Seitenflächen Kugeln von $6{\cdot}15\ cm$, $4{\cdot}1\ cm$ Radius angehören?

61) Ein Kreissektor, dessen Radius r und dessen Zentriwinkel α ist, rotiert um einen seiner beiden Radien; man soll die Formeln für die Oberfläche und den Rauminhalt des so erzeugten Kugelsektors ableiten, dann selbe für den speziellen Fall $r = 9\ cm$ und $\alpha = 11^0\ 15'$ anwenden.

Spezifisches Gewicht.

62) Eine gußeiserne massive Walze endet an beiden Seiten in Halbkugeln. Wenn die Länge dieses Körpers von Gipfel zu Gipfel $h = 2\ m$, der Durchmesser $d = 0{\cdot}6\ m$ beträgt und das spezifische Gewicht des Gußeisens $s = 7{\cdot}2$ ist, wieviel wiegt dann der Körper?

63) Eine hohle eiserne Kugel mit der Wanddicke $3\ cm$ wiegt $40{\cdot}5\ kg$; wie groß ist ihr Halbmesser, wenn das spezifische Gewicht des Eisens $7{\cdot}5$ ist?

Digitized by Google

64) Eine hohle kupferne Kugel von $2R = 200\ mm$ äußerem Durchmesser sinkt gerade mit ihrer Hälfte im Wasser ein. Wenn das spezifische Gewicht des Kupfers $s = 8{\cdot}8$ ist, wie groß ist die Metallstärke der Kugel?

65) Eine Hohlkugel aus Eisen von $30\ kg$ Gewicht sinkt im Wasser zur Hälfte ein; wie groß ist die Wanddicke der Kugel, wenn das spezifische Gewicht des Eisens $7{\cdot}7$ genommen wird?

66) Eine Kugel vom Halbmesser $R = 20\ cm$ und aus einem Materiale, dessen Dichte $d = 6{\cdot}75$ ist, soll so ausgehöhlt werden, daß sie bis zu $^3/_4$ des Durchmessers im Wasser einsinkt. Wie groß wird die Wanddicke sein müssen?

67) Welche Dicke muß eine hohle metallene Kugel haben, wenn sie im Wasser von der Dichte 1 schwimmen soll, so zwar, daß ein Kugelabschnitt, dessen Höhe der Hälfte des Kugelradius gleich ist, über das Niveau der Flüssigkeit emporragt, während der ganze übrige Teil vom Wasser benetzt wird. $R = 10\ cm$, die Dichte des Metalles sei $d = 7$.

68) Eine metallene Hohlkugel, deren äußerer Durchmesser $2R = 18\ cm$ ist, sinkt im Wasser so tief ein, daß noch $\frac{1}{n} = \frac{1}{5}$ ihrer Oberfläche aus dem Wasser hervorragt. Wie dick im Metall ist die Kugel, wenn das spezifische Gewicht des Metalles $s = 8{\cdot}5$ ist?

69) Eine gleichmäßig dichte Holzkugel von $R = 1\ dm$ wird in reines Wasser von größter Dichte getaucht. Dieselbe sinkt soweit unter, daß der Wasserspiegel mit ihrer Oberfläche einen Kreis von $r = 8\ cm$ bildet. Wie groß ist das spezifische Gewicht der Kugel?

70) Eine Bleikugel im Gewichte von a Gramm soll mit einer konzentrischen Korkschicht umgeben werden, damit diese Verbindung bis zur Hälfte im Wasser untersinke. Man berechne die Dicke des Korkes, wenn das spezifische Gewicht des Bleies s, des Korkes σ ist.
$a = 500$, $s = 11{\cdot}35$, $\sigma = 0{\cdot}24$.

71) Eine eiserne Hohlkugel wiegt $12\ kg$, unter Wasser aber $5\ kg$. Wie groß ist die Wanddicke, wenn das spezifische Gewicht des Eisens $7{\cdot}5$ ist?

72) Eine Kugel aus einer Legierung von Silber und Kupfer wiegt $122{\cdot}8$ Gramm, unter Wasser von der Dichte 1 gegeben, verliert sie 12 Gramm von ihrem Gewichte. Wieviel Gramm Silber und wieviel Gramm Kupfer sind in der Legierung, wenn das spezifische Gewicht des Silbers $10{\cdot}62$, des Kupfers 9 ist? Wie schwer ist

Digitized by Google

eine ebenso große Kugel aus reinem Silber und wie groß ist der Radius dieser Kugel?

73) Eine Seifenblase mit dem äußeren Radius r ist mit Wasserstoff gefüllt. Wie groß ist die mittlere Dicke derselben, wenn sie in der Luft schweben soll, das spezifische Gewicht des Seifenwassers $s_1 = 1$, der Luft $s_2 = 0{\cdot}001299$, des Wasserstoffes $s = 0{\cdot}000089$ ist? Um wieviel ist die Blase für $r = 30\ mm$ und $D = 0{\cdot}01\ mm$ leichter als eine gleich große Luftmenge?

§ 27a.

1) $U = \frac{4R^3\pi}{3}\left[1 - \sqrt{\left(\frac{n-1}{n}\right)^3}\right] = 1{\cdot}4681\ R^3$.

2) $O = \pi\left(\frac{d^2+r^2}{d}\right)^2 = 9524{\cdot}93\ cm^2$.

$C = \frac{\pi}{6}\left(\frac{d^2+r^2}{d}\right)^3 = 87411{\cdot}04\ cm^3$.

3) $r = \frac{19{\cdot}3 \sin\frac{\delta}{2}}{\cos\left(\alpha - \frac{\delta}{2}\right)}$, wo $\delta = 2^0\,30'$, $\alpha = 63^0\,20'$,

und $4r^2\pi = 10{\cdot}1623\ (10{\cdot}162)\ m^2$.

4) $R = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{a}{4\pi d} - \frac{d^2}{12}}$; $r = -\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{a}{4\pi d} - \frac{d^2}{12}}$.

$R = 3\ m$, $r = 1\ m$.

5) $r = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{O}{\pi}}$; $r = 1{\cdot}13\ m$.

6) $M = \frac{O}{3}\sqrt{6}$; $M = 23{\cdot}0859\ m^2$.

7) $V_1 = \frac{9r^3\pi}{50}\sqrt{10}$, $V_2 = \frac{r^3\pi\sqrt{2}}{2}$.

8) $O_1 = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\sqrt[3]{36\pi C^2}$, $C_1 = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}C$.

9) $O = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3} = 41{\cdot}56922$, $C = \frac{a^3}{4} = 16$;

$O_1 = \frac{a^2\pi}{3} = 16{\cdot}75516$, $C_1 = \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{54} = 6{\cdot}44907$;

$O : O_1 = 1 : 0{\cdot}4030665$.

10) $C = \frac{a^3}{1+n^3}$; $C_1 = \frac{a^3n^3}{1+n^3}$.

11) $\frac{a}{4}(\sqrt{3}-1)\sqrt{2} = 0{\cdot}258819\,a$,

$C = \frac{a^3\pi\sqrt{2}}{12}(3\sqrt{3}-5) = 0{\cdot}0726235\,a^3$.

Digitized by Google

12) $C = \frac{2a^3}{3}$, $R = \frac{9a}{8}$.

13) Die Pyramide hat als Basiskante $\frac{R}{2}\sqrt{3}$, und als Höhe entweder: $\frac{3R}{2}$ oder $\frac{R}{2}$. Der Kubikinhalt ist entweder:

$\frac{9R^3\sqrt{3}}{16}$ oder $\frac{3R^3\sqrt{3}}{16}$, daher der Radius $\frac{3R}{4}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{\pi}}$ oder:

$\frac{R}{4}\sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}}{\pi}}$; $C_1 = 324\ m^3$, $C_2 = 108\ m^3$.

$r_1 = 4{\cdot}260744\ m$, $r_2 = 2{\cdot}954235\ m$.

14) $C = \frac{2r^3}{3}$; $O = r^2\left[(\sqrt{5}-1) + \sqrt{10+2\sqrt{5}}\right]$; der Neigungswinkel ist $71^0\ 2'\ 21{\cdot}5''$.

15) Ist $2r_1 = d$, so $d^2 = r(r+S)$ und $S = \sqrt{r^2+h^2}$, somit d auf mehrfache Weise zu konstruieren.

$r_1 = 4{\cdot}8989795$.

16) $1 : 2\sqrt{3}$ oder $1 : 3{\cdot}4641016$.

17) $\varrho = r\sqrt[6]{\frac{16}{m^2-1}}$, $h = r\sqrt[3]{4(m^2-1)}$.

$\varrho = 1{\cdot}75104\ dm$, $h = 4{\cdot}95265\ dm$.

18) $\frac{4R^3\pi}{3} = 8C\sqrt{2} = 1502{\cdot}46\ m^3$.

19) $O = 4\frac{r^2h^2}{(r+s)^2}\pi$, $C = \frac{4}{3}\frac{r^2h^2\pi}{(r+s)^2}$, $s = \sqrt{r^2+h^2}$.

$s = 20$, $O = 144\pi = 452{\cdot}38933\ dm^2$,

$C = 288\pi = 904{\cdot}77867\ dm^3$.

20) $O = \frac{16r^2\pi}{25}(1+\sqrt{5})$; $C = \frac{128}{375}r^3\pi$.

$O = 416{\cdot}416\ dm^2$, $C = 549{\cdot}033\ dm^3$.

21) $R = \sqrt[3]{\frac{9{\cdot}C\sqrt{6}}{2\pi}}$; $R = 11{\cdot}89761\ m$.

22) $\varrho = \frac{r}{2}\sqrt{1+\frac{n}{\sqrt{n^2-m^2}}}$; $\varrho = 4{\cdot}8989795\ m$.

23) $o = 4\pi\left(\frac{Rh}{R+\sqrt{h^2+R^2}}\right)^2$; $c = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{Rh}{R+\sqrt{h^2+R^2}}\right)^3$;

$O = \pi\left(\frac{h^2+R^2}{h}\right)^2$; $C = \frac{\pi}{6}\left(\frac{h^2+R^2}{h}\right)^3$.

24) Die Oberfläche des Kegels ist $\frac{O}{2}(1+\sqrt{3}) = 428{\cdot}9319756\ m^2$.

25) Der Radius ist 21 m, die Seite 35 m.

Digitized by Google

26) $M = 2R^2\pi \sin\alpha \cos {}^{\alpha}/_{2}$, $C = \frac{2}{3} R^3\pi \sin^2\alpha . \cos^2 {}^{\alpha}/_{2}$,

$R = \sqrt{\frac{O}{4\pi}}$;

$M = 13{\cdot}46482\ m^2$, $C = 4{\cdot}821917\ m^3$, $R = 1{\cdot}99471\ m$.

27) $C = \frac{V}{2} \sin^2\alpha \cos^3\frac{\alpha}{2}$; $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.

$C = 800{\cdot}00013\ cm^3$, $R = 8{\cdot}652584\ cm$.

28) $O = 2\sqrt{2}r^2\pi \sin 2\alpha \cos(45 - \alpha) = 10.322{\cdot}75$, $O_1 = 4r^2\pi$,

$\Delta O = 9783{\cdot}45$;

$C = \frac{2r^3\pi}{3} \sin^2 2\alpha = 79.778{\cdot}2$, $C_1 = \frac{4r^3\pi}{3}$, $\Delta C = 188.304{\cdot}4$.

29) Beide Kegel haben $167{\cdot}551608\ dm^3$ Inhalt. Der Inhalt der Kugel verhält sich zu dem der Kegel wie 125 : 32 : 8.

30) $a = \sqrt[6]{\frac{O^3(7+4\sqrt{3})}{243\pi}} = 6{\cdot}681154\,cm$; $b = \frac{1}{3}\sqrt{2O} = 6{\cdot}138403\ cm$.

31) $R = \frac{r^2}{4\varrho}$; $C_1 = \frac{2\varrho r^3\pi}{3(r^2+4\varrho^2)^3}$; $C_2 = \frac{r^{10}\varrho}{6\varrho(r^2+4\varrho^2)^3}$.

32) $C = \frac{r^3\pi\sqrt{2}}{3}(3+\sqrt{2})$; $C = 1000\ m^3$.

33) Es sind zwei abgestutzte Kegel möglich:

$C_1 = \frac{32R^3\pi}{51\sqrt{17}}(3+\sqrt{2})$; $C_2 = \frac{C_1}{2} = 329{\cdot}0834\ m^3$.

34) $\varrho = \sqrt[3]{(R^3 - r^3)\operatorname{tg}\alpha} = 5{\cdot}65466\ cm$.

35) $H = \sqrt[3]{a^3 + \frac{4\varrho^3h^2}{r^2}} = 6{\cdot}782423\ cm$.

36) Die Gleichsetzung der Oberflächen und Volumina führt auf die beiden Gleichungen:

$2\varrho^2 = R^2 + r^2 + Rr$ und $4R^2r^2 + 5Rr\varrho^2 = 5\varrho^4$.

Da Rr positiv sein muß, so ergibt sich aus der zweiten Gleichung:

$Rr = \frac{\varrho^2}{8}[\sqrt{105} - 5]$.

$R = 2{\cdot}7145\ cm$, $r = 2{\cdot}1746\ cm$.

37) Nur die positive Wurzel $x = 7$ ist hier zulässig.
Die Oberfläche des gleichseitigen Zylinders ist $6R^2\pi = 230{\cdot}90706$.
Der Inhalt ist $2R^3\pi = 269{\cdot}39157$.
Die Oberfläche des Kegels ist $R^2\pi(\sqrt{5}+1) = 124{\cdot}53849$.
Der Inhalt $\frac{2R^3\pi}{3} = 89{\cdot}79719$.
Die Oberfläche der Kugel: $4R^2\pi = 153{\cdot}93804$.

Digitized by Google

Der Inhalt $\frac{4R^3\pi}{3} = 179{\cdot}59438$.

somit Oberfl. Zyl : Ku : Ke $= 6 : 4 : 3{\cdot}236068$

Kub. Zyl : Ku : Ke $= 3 : 2 : 1$.

38) Die Mantelfläche des Zyl. ist gleich der Oberfläche der Kugel und die Mantelfläche des Kegels verhält sich zur Oberfläche der Kugel wie 3 : 2.

Oberfl. Ke : Zyl : Ku : $= 9 : 6 : 4$

Kub. Ke : Zyl : Ku : $= 9 : 6 : 4$.

39$_a$) $C = \pi . h^2 \left[\sqrt{\frac{O}{4\pi}} - \frac{h}{3} \right] = 3{\cdot}38394\ m^3$,

Oberfläche $= 2h\sqrt{O\pi} - h^2\pi = 14{\cdot}58295\ m^2$.

39$_b$) $O = 1476\pi\ cm^2$, $C = 6156\pi\ cm^3$.

40) $C = 46{\cdot}5615\ dm^3$.

41$_a$) $C_1 = \frac{4r^3m^2\pi}{3(m+n)^3}(m+3n)$; $C_2 = \frac{4r^3n^2\pi}{3(m+n)^3}(n+3m)$.

$C_1 = 435{\cdot}634\ dm^3$, $C_2 = 3753{\cdot}156\ dm^3$.

41$_b$) $\frac{108r^3\pi}{125}$, 108π.

42) $r = \sqrt[3]{\frac{3C}{4\pi}}$, $\varrho = \sqrt{\frac{f}{\pi}}$;

$r - \sqrt{r^2 - \varrho^2} = 5{\cdot}02485$ und $\sqrt{r^2 - \varrho^2} = 3{\cdot}34719\ cm$,

$2r\pi\,(r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}) = 264{\cdot}323\ cm^2$.

$2r\pi\,(r + \sqrt{r^2 - \varrho^2}) = 616{\cdot}467\ cm^2$.

43$_a$) Ist h die Höhe der Kalotte und R der Radius der Kugel, so ist $2R\pi h + \varrho^2\pi = R^2\pi$, $h = R - R\cos\alpha$ und $\varrho = R\sin\alpha$, daher $\cos^2\alpha + 2\cos\alpha = 2$, $\cos\alpha = \sqrt{3} - 1$; $2\alpha = 85^0\,52'\,58{\cdot}2''$.

43$_b$) $126^0\,52'\,12''$.

44) $C = \frac{4r^3\pi}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2} = 84{\cdot}4785\ (84{\cdot}48)\ dm^3$,

$O = 2r^2\pi\sin\frac{\alpha}{2}\left[2\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right] = 108{\cdot}895\ dm^2$.

45) $r = \frac{O}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{O - \pi\varrho^2}} = 3{\cdot}0683\ m$.

46) $\varrho^2\pi = F - h^2\pi = 0{\cdot}714602\ m^2$,

$O = 2F - h^2\pi = 2{\cdot}214602\ m^2$,

$C = h\left[\frac{F}{2} - \frac{h^2\pi}{3}\right] = 0{\cdot}2441003\ m^3$.

47$_a$) $\frac{r}{m}(2 - m) = \frac{5}{3}$;

Kugel : Segment $= 1 : \frac{(m+2)(m-1)^2}{m^3} = 1 : \frac{7}{27}$.

Digitized by Google

47$_b$) $O_s : O_k = 19 : 24$, $I_s : I_k = 7 : 18$.

48) $C = \frac{1}{3}(3r - h)\,h^2\pi = 22{\cdot}1457\ cm^3$, $r = \sqrt[6]{\frac{O^3}{96\pi^3}} = 7{\cdot}38252$.

49) $C = \frac{4\pi h^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{3\cos^3\alpha} = 37{\cdot}07492\ cm^3$.

50) $11{\cdot}28338\ m$. 51) $3r$.

52) $O = 4R^2\pi - 4\pi(R - r)\sqrt{R^2 - r^2}$,

$C = \frac{4R^3\pi}{3} - \frac{4\pi}{3}(R^2 - r^2)\sqrt{R^2 - r^2}$;

$O = 213{\cdot}6283\ cm^2$, $C = 255{\cdot}5162\ cm^3$.

53) $O = 3R^2\pi\sqrt{3}$, $C = \frac{R^3\pi}{2}\sqrt{3}$;

$O = 48{\cdot}96972\ m^2$ (48·97), $C = 14{\cdot}13593\ m^3$ (14·136).

54) $C = \frac{1}{6}h^3\pi = 1{\cdot}436755\ dm^3$.

55) Fällt man von C eine Normale CD auf AB, so ist $BD = 0{\cdot}381966\,a$.

56) Die Ekliptikschiefe beträgt 23° 27′ 28″. Die heiße Zone: 2,029.793 Quadrat-Myriameter, jede der beiden gemäßigten: 1,323.920 und jede der kalten Zonen: 210.708 Quadrat-Myriameter.

57) 570770 Quadratmeilen.

58$_a$) $C = \frac{17\pi h^3}{24} = 17802{\cdot}36\ cm^3$.

58$_b$) $C = \frac{22r^3\pi}{75}\sqrt{5} = 2{\cdot}0606\,r^3$.

59) $O_1 = \frac{rh^2(3r - s)\pi}{(r + s)^2} = 48\pi$; $O_2 = \frac{rh^2\pi}{r + s} = 96\pi$.

$C_1 = \frac{\pi h^3(3r - s)^2(3r + s)}{24(r + s)^3} = \frac{224}{3}\pi$; $C_2 = \frac{\pi h^3(5r - s)}{24(r + s)} = \frac{640\pi}{3}$.

60) $C = 29{\cdot}8845\ cm^3$.

61) $O = 4r^2\pi\sin^2\frac{\alpha}{2} + r^2\pi\sin\alpha$; $C = \frac{4r^3\pi}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}$;

$O = 59{\cdot}424\ cm^2$, $C = 29{\cdot}337\ cm^3$.

62) 36 Zentner 64 Kilogramm 353·7 Gramm.

63) $10{\cdot}4369\ cm$ beträgt der innere Halbmesser.

64) $D = R\left[1 - \sqrt[3]{\frac{2s - 1}{2s}}\right] = 1{\cdot}931\ mm$.

65) $D = 5{\cdot}375\ mm$.

66) $D = R\left[1 - \frac{1}{4d}\sqrt[3]{2(32d - 27)d^2}\right] = 8{\cdot}7069\ mm$.

67) $D = R\left[1 - \frac{1}{4d}\sqrt[3]{2(32d - 27)d^2}\right] = 4{\cdot}191\ mm$.

Digitized by Google

68) $D = 3{\cdot}2815\ mm, \quad r = \frac{R}{n}\sqrt[3]{\frac{n^3(s-1)+3n-2}{s}}.$

69) $s = \frac{2R^3 \mp (2R^2 + r^2)\sqrt{R^2 - r^2}}{4R^3},$

$s_1 = 0{\cdot}104, \quad s_2 = 0{\cdot}896.$

70) $D = \sqrt[3]{\frac{3a(s-\sigma)}{2s(1-2\sigma)\pi}} - \sqrt[3]{\frac{3a}{4s\pi}} = 5{\cdot}46872\ cm.$

71) $D = 9{\cdot}834\ mm.$

72) Silber 97·0222 Gramm, Kupfer 25·7778 Gramm.
Eine gleich große Silberkugel wiegt 127·44 Gramm und der Radius der Kugel ist 1·42025 *cm*.

73) $D = r\left[1 - \sqrt[3]{\frac{s_1 - s_2}{s_1 - s_3}}\right] = 0{\cdot}0004035\ r.$
Die Seifenblase ist um 0·0238468 mal dem Gewichte eines Kubikzentimeters Seifenwassers leichter als eine gleich große Luftmenge.

§ 28. Die regelmäßigen Körper.

1) Wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt eines Tetraeders, wenn der Radius der dem Tetraeder umgeschriebenen Kugel $R = 6\ dm$ ist?

2) Wenn der Radius einer dem Tetraeder eingeschriebenen Kugel $s = 6\ cm$ beträgt, wie groß ist dann eine Kante, die Oberfläche und der Kubikinhalt des Tetraeders?

3) Die Oberfläche eines Tetraeders beträgt um $2\ m^2$ weniger als die Oberfläche der dem Tetraeder umgeschriebenen Kugel. Wie groß ist eine Kante des Tetraeders, und wie groß ist der Radius der umgeschriebenen Kugel?

4) Der Inhalt eines gleichseitigen Kegels beträgt $a = 3\ m^3$. Wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt des Tetraeders, bei welchem eine Kante gleich ist der Höhe dieses Kegels?

5) Ein Tetraeder hat die gleiche Oberfläche wie ein gleichseitiger Kegel und dieselbe wie eine Kugel. Wie verhalten sich Kante, Kegelseite und Kugeldurchmesser ihrer Größe nach?

6) Einem regelmäßigen Oktaeder ist eine Kugel mit dem Radius $r = 5\ cm$ eingeschrieben, wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt des Oktaeders?

7) Einem regelmäßigen Oktaeder, dessen Oberfläche $O = 10\ m^2$ beträgt, ist eine Kugel eingeschrieben; es soll die Oberfläche der-

Digitized by Google

selben berechnet und das Verhältnis der Oberflächen und Volumina der beiden Körper bestimmt werden.

8) Die Kante eines regulären Oktaeders ist $s = 3{\cdot}6\ m$ lang, wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt desselben, und wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt der dem Oktaeder umgeschriebenen Kugel?

9) Der Inhalt eines regulären Oktaeders beträgt um $5\ m^3$ mehr als der Inhalt der dem Oktaeder eingeschriebenen Kugel. Wie groß ist eine Kante des Oktaeders, und wie groß der Radius der Kugel?

10) Wie groß ist der Inhalt eines Oktaeders, dessen Oberfläche gleich der eines abgestumpften Kegels ist, von dem der Inhalt, die Differenz der Radien und die Höhe gegeben sind?
$C = 636{\cdot}7\ dm^3$, $R - r = d = 2\ dm$, $h = 8\ dm$.

11) Wie groß ist der Inhalt eines Oktaeders, dessen Oberfläche gleich ist dem Flächeninhalte eines regelmäßigen Zwölfeckes mit der Seitenlänge von $8\ dm$?

12) Die Oberfläche eines Oktaeders beträgt um $5\ m^2$ mehr als die eines Tetraeders; die Radien der dem Oktaeder und Tetraeder eingeschriebenen Kugeln stehen im Verhältnisse von $8 : 5$, wie groß sind die Kanten des Oktaeders und des Tetraeders? Wie groß sind die Radien der eingeschriebenen Kugeln?

13) Die Oberfläche und der Inhalt eines Ikosaeders sind zu berechnen, wenn die Kante desselben $s = 1\ m$ gegeben ist.

14) Wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt eines Ikosaeders, wenn der Radius der eingeschriebenen Kugel $r = 5\ cm$ gegeben ist?

15) Einer Kugel mit dem Radius $R = 4\ dm$ ist ein Ikosaeder eingeschrieben, um wieviel ist die Oberfläche und der Inhalt der Kugel größer als vom Ikosaeder?

16) Die Oberfläche der einem Ikosaeder umgeschriebenen Kugel beträgt $O = 52{\cdot}4992\ m^2$, wie groß ist die Oberfläche des Ikosaeders?

17) Durch eine Kante in der Grundfläche eines Würfels ist eine Ebene gelegt, welche gegen die Grundfläche unter einem Winkel $\alpha = 40^0$ geneigt ist. Wie groß sind die Volumina der beiden hiedurch entstandenen Teile des Würfels, wenn der Flächeninhalt der Schnittfigur $F = 76{\cdot}603\ dm^2$ ist?

18) Durch die Mitten der in einem Eckpunkte zusammenstoßenden Kanten eines Würfels von der Oberfläche O wird eine Ebene gelegt und dadurch eine dreiseitige Pyramide abgeschnitten, wie groß sind die Oberfläche, der Körperinhalt und die Flächenwinkel der Pyramide? Allgemein und speziell für $O = 1176\ cm^2$.

Digitized by Google

19) Die Oberfläche eines Dodekaeders beträgt $O = 1 \cdot 2\ cm^2$; wie groß ist die Seite desselben? Wie groß ist die Diagonale einer Grenzfläche?

20) Es soll die Oberfläche O des Dodekaeders berechnet werden, wenn eine Kante $a = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ gegeben ist.

21) Um wieviel ist der Inhalt eines Dodekaeders kleiner als der Inhalt der dem Dodekaeder umgeschriebenen Kugel mit dem Radius $R = 3\ dm$?

22) Aus der Kante $a = 1\ dm$ eines Tetraeders ist dessen Oberfläche, Volumen, Radius des um- und eingeschriebenen Kreises und der Körperwinkel zu bestimmen. (Allgemein und speziell.)

23) Aus der Kante $a = 1\ dm$ eines Oktaeders ist dessen Oberfläche, Volumen, Radius des um- und eingeschriebenen Kreises und der Körperwinkel zu bestimmen.

24) Dieselbe Aufgabe ist bezüglich des Ikosaeders durchzuführen.

25) Dieselbe Aufgabe ist bezüglich des Dodekaeders durchzuführen.

§ 28a.

1) $O = \frac{8R^2\sqrt{3}}{3}$, $C = \frac{8R^3\sqrt{3}}{27}$.
$O = 166 \cdot 2769\ dm^2$, $C = 110 \cdot 8513\ dm^3$.

2) $s = 2r\sqrt{6}$, $O = 24r^2\sqrt{3}$, $C = 8r^3\sqrt{3}$;
$s = 29 \cdot 39388\ cm$, $O = 1496 \cdot 4919\ cm^2$,
$C = 2992 \cdot 9838\ cm^3$.

3) $s = 0 \cdot 819185\ m$, $R = 0 \cdot 501647\ m$.

4) $O = 3\sqrt[6]{\frac{3^5 a^4}{\pi^4}} = 7 \cdot 26725\ m^2$, $C = \frac{3a}{4\pi}\sqrt{2} = 1 \cdot 01286\ m^3$.

5) $1 : 0 \cdot 857383 : 0 \cdot 742515$.

6) $O = 12r^2\sqrt{3}$, $C = 4r^3\sqrt{3}$;
$O = 519 \cdot 61524\ cm^2$, $C = 866 \cdot 0254\ cm^3$.

7) Die Oberfläche der Kugel ist $\frac{O\pi\sqrt{3}}{9}$, somit verhalten sich die beiden Oberflächen wie $1 : \frac{\pi\sqrt{3}}{9} = 1 : 0 \cdot 6045998$. Speziell ist die Oberfläche der Kugel $6 \cdot 045998\ m^2$. Die Volumina sind $\frac{O}{18}\sqrt{O\sqrt{3}}$ und $\frac{O\pi}{54}\sqrt{\frac{O\sqrt{3}}{3}}$, daher verhalten sie sich wie $1 : \frac{\pi\sqrt{3}}{9} = 1 : 0 \cdot 6045998$.

Digitized by Google

8) $O = 2s^2\sqrt{3}$; $C = \frac{s^3\sqrt{2}}{3}$; $O_1 = 2s^2\pi$; $C_1 = \frac{s^3\pi\sqrt{2}}{3}$;
$O = 44 \cdot 89476\ m^2$, $C = 21 \cdot 99385\ m^3$;
$O_1 = 81 \cdot 43008\ m^2$, $C_1 = 69 \cdot 09572\ m^3$.

9) $s = 2 \cdot 99350\ m$, $r = 1 \cdot 22209\ m$.

10) Die Radien der Grundflächen des Kegelstutzes sind:
$R = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{C}{h\pi} - \frac{d^2}{12}}$; $r = -\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{C}{h\pi} - \frac{d^2}{12}}$,
somit die Oberfläche $O = R^2\pi + r^2\pi + (R + r)\,\pi\sqrt{d^2 + h^2}$.
Die Kante des Oktaeders $s = \sqrt{\frac{O\sqrt{3}}{6}}$ und der Inhalt desselben $\frac{O}{18}\sqrt{O\sqrt{3}}$; $R = 6$, $r = 4$;
$O = 134 \cdot 462113\pi = 422 \cdot 4252\ dm^2$, $C = 634 \cdot 7936\ dm^3$.

11) $O = 716 \cdot 5537\ dm^2$, $C = 1402 \cdot 429\ dm^3$.

12) Vom Tetraeder $s = 3 \cdot 21089\ m$, $r = 0 \cdot 65542\ m$.
Vom Oktaeder $s = 2 \cdot 56871\ m$, $r = 1 \cdot 04867\ m$.

13) $O = 5s^2\sqrt{3}$; $C = \frac{5s^3(3+\sqrt{5})}{12}$;
$O = 8 \cdot 660254\ m^2$, $C = 2 \cdot 181695\ m^3$.

14) $O = 30\sqrt{3}\,[7 - 3\sqrt{5}]\,r^2$; $C = \frac{Or}{3}$;
$O = 379 \cdot 054125\ cm^2$, $C = 631 \cdot 756875\ cm^3$.

15) $\Delta O = 4R^2\pi - 2R^2\sqrt{3}\,(5 - \sqrt{5}) = 47 \cdot 86927\ dm^2$.
$\Delta C = \frac{4R^3\pi}{3} - \frac{2}{3}R^3\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = 105 \cdot 76889\ dm^3$.

16) $O_1 = \frac{O\sqrt{3}}{2\pi}\,[5 - \sqrt{5}] = 40\ m^2$.

17) $C_1 = 188 \cdot 596\ dm^3$, $C_2 = 260 \cdot 924\ dm^3$.

18) $O_1 = \frac{O}{48}\,[3 + \sqrt{3}]$; $C_1 = \frac{O}{288}\sqrt{\frac{O}{6}}$.
Der Neigungswinkel einer Seitenfläche gegen die Basisfläche ist $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) = 54^\circ\,44'\,8''$; zwei Seitenflächen stehen aufeinander senkrecht.
$O = 115 \cdot 9352\ cm^2$, $C = 57 \cdot 1667\ cm^3$.

19) $s = \sqrt{\frac{O}{15}\sqrt{(5 - 2\sqrt{5})}} = 2 \cdot 41088\ cm$.
$d = \frac{s}{2}\,(\sqrt{5} - 1)$ oder $d = \frac{s}{2\sin 18^0} = 3 \cdot 900884\ cm$.

20) $O = 15a^2\sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}} = \frac{15}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} =$
$= 28 \cdot 531695$ Flächeneinheiten.

Digitized by Google

21) $\measuredangle C = \frac{4R^3\pi}{3} - \frac{2}{9}R^3\sqrt{15}\,(\sqrt{5}+1) = 37{\cdot}89791\ dm^3$.

22) $O = a^2\sqrt{3}$; $C = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$; $R = \frac{a}{4}\sqrt{6}$; $r = \frac{a}{12}\sqrt{6}$;
$\cos A = \frac{1}{3}$;
$O = 1{\cdot}7320508\ dm^2$, $C = 0{\cdot}1178511\ dm^3$;
$R = 0{\cdot}6123724\ dm$, $r = 0{\cdot}2041241\ dm$; $A = 70^\circ\,31'\,43{\cdot}61''$.

23) $O = 2a^2\sqrt{3}$; $C = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$; $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$;
$\cos A = -\frac{1}{3}$;
$O = 3{\cdot}4641016\ dm^2$, $C = 0{\cdot}4714045\ dm^3$;
$R = 0{\cdot}7071068\ dm$, $r = 0{\cdot}4082483\ dm$; $A = 109^\circ\,28'\,16{\cdot}39''$.

24) $O = 5a^2\sqrt{3}$; $C = \frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$; $R = \frac{a}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$;
$r = \frac{a}{12}(3+\sqrt{5})\sqrt{3}$; $\cos A = -\frac{1}{3}\sqrt{5}$;
$O = 8{\cdot}6602540\ dm^2$, $C = 2{\cdot}1816950\ dm^3$;
$R = 0{\cdot}9510565\ dm$, $r = 0{\cdot}7557613\ dm$; $A = 138^\circ\,11'\,22{\cdot}87''$.

25) $O = 15a^2\sqrt{1+\frac{2}{5}\sqrt{5}}$; $C = \frac{a^3}{4}(7+3\sqrt{5})\sqrt{5}$;
$R = \frac{a}{4}\sqrt{18+6\sqrt{5}}$; $r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{25+11\sqrt{5}}{10}}$;
$\cos A = -\frac{1}{5}\sqrt{5}$.
$O = 20{\cdot}6457291\ dm^2$, $C = 7{\cdot}6631191\ dm^3$;
$R = 1{\cdot}4012585\ dm$, $r = 1{\cdot}1135164\ dm$; $A = 116^\circ\,33'\,54{\cdot}18''$.

D. Analytische Geometrie.

§ 29. Gerade Linie.

1) Durch den Punkt $x_1 = 1$, $y_1 = 3$ ($x_1 = 8$, $y_1 = 3$) soll eine Gerade so gelegt werden, daß sie mit den beiden rechtwinkeligen Koordinatenachsen die Fläche 8 (50) bildet.

2) *a*) Die Gleichung einer Geraden ist:

$$2y = x + 2$$

und die Koordinaten eines Punktes M außerhalb derselben sind $x_1 = 2$, $y_1 = -2$. Es ist der senkrechte Abstand des Punktes M von der gegebenen Geraden zu suchen.

b) $4x - 3y - 50 = 0$, $x_1 = 3$, $y_1 = -4$.

Digitized by Google

3) Die Gleichung einer Geraden ist:

$$y = \frac{3x}{4} + \frac{2}{3}; \quad (y = ax + b)$$

die Koordinaten eines Punktes außerhalb der Geraden sind $x_1 = 2$, $y_1 = 3$; wie groß ist der senkrechte Abstand dieses Punktes von der Geraden und wie heißen die Koordinaten des Fußpunktes dieser Senkrechten? (Allgemein und speziell.)

4) Von einem Parallelogramm $ABCD$ sind die Koordinaten der Eckpunkte $A: x_1 = 0$, $y_1 = 3$; $B: x_2 = 2$, $y_2 = 1$; $C: x_3 = 8$, $y_3 = 4$; wie groß sind die Koordinaten von D?

5) Es ist die Gleichung einer Geraden zu finden, welche durch den gegebenen Punkt $x_1\ y_1$ so gelegt ist, daß die von zwei anderen gegebenen Punkten $x_2\ y_2$, $x_3\ y_3$ auf sie gefällten Perpendikel gleich lang werden.

Speziell $x_1 = 1$ $\quad x_2 = 3$ $\quad x_3 = 5$
$\quad\quad y_1 = 2$ $\quad y_2 = 3$ $\quad y_3 = 2.$

6) Es ist die Gleichung der Geraden zu suchen, welche durch den Punkt (2, 2) geht und mit der Geraden $y = \frac{x}{2} - 3$ einen Winkel von 30° bildet.

7) Es ist die Gleichung jener Geraden abzuleiten, welche mit der Geraden:

$$10y - 15x + 8 = 0$$

den Winkel von 45° bildet und durch den Punkt $x_1 = \frac{1}{3}$, $y_1 = \frac{1}{4}$ geht; auch sind die Abschnitte, welche die zu bestimmende Gerade an den Achsen bildet, zu berechnen.

8) Man soll die Gleichung der Geraden L aufstellen, welche durch den Punkt $x_1 = -3 \cdot 4$, $y_1 = -2 \cdot 8$ geht und mit der Geraden $\frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 1$ den Winkel $\alpha = 50°\,38'\,54''$ bildet; dann sind die Winkel zu berechnen, welche L mit den Koordinatenachsen einschließt.

9) Die Gleichung der Geraden:

$$2y + 5x - 7 = 0$$

und der Punkt $x_1 = -2$, $y_1 = +3$ sind gegeben. Es ist die Gleichung derjenigen Geraden zu bestimmen, welche durch den gegebenen Punkt geht und von der Abszissenachse ein Stück $= -5 \cdot 2$ abschneidet. Außerdem ist die Größe des Winkels zu bestimmen, den diese Geraden miteinander einschließen.

Digitized by Google

10) Durch den Punkt $x_1 = -2$, $y_1 = 4$ soll eine Gerade so gelegt werden, daß sie mit den Geraden $4x - 3y = 21$, $5x - 12y = -36$ supplementäre Winkel bildet; wie lautet die Gleichung der Geraden?

11) Der Punkt $\xi = 3$, $\eta = 11$ hat von der Geraden, die durch den Punkt $x_1 = -4$, $y_1 = 0$ geht, die Entfernung 1. Wie heißt die Gleichung der Geraden?

12) Ein Punkt M_1 ist durch $x_1 = 10$, $y_1 = 4$ gegeben; man soll durch M_1 eine Gerade ziehen, welche die Gerade:

$$y = \frac{3x}{4} + 6$$

senkrecht schneidet. Wie lautet die Gleichung dieser Geraden? Unter welchem Winkel schneidet sie die X-Achse, und wo liegt ihr Durchschnittspunkt mit der gegebenen Geraden?

13) Durch einen Punkt, welcher durch die rechtwinkeligen Koordinaten $x_1 = 5$, $y_1 = 7$ bestimmt ist, geht eine gerade Linie, welche die Abszissenachse unter einem Winkel von 40° durchschneidet; man soll die Gleichung einer Geraden finden, die auf dieser in dem gegebenen Punkte senkrecht steht.

14) Drei Gerade *a*) $4y + 3x = 0$, *b*) $5y + 12x = 0$, *c*) $y + x = 2$ seien gegeben; es ist jener Punkt in *c* zu bestimmen, welcher von den Geraden *a* und *b* gleichweit entfernt ist.

15) Es ist die Gleichung der Geraden zu entwickeln, welche durch den Durchschnittspunkt der beiden gegebenen Geraden

$$y = ax + b, \qquad y = a_1 x + b_1$$
$$(3y - 4x + 2 = 0, \quad 5y - 3x - 4 = 0)$$

geht und mit der X-Achse parallel ist.

16) Es ist die Gleichung der Geraden zu entwickeln, welche durch den Durchschnittspunkt der beiden Geraden:

$$y = 3x + 4, \quad y + 2x + 6 = 0$$

geht und den von diesen beiden Geraden eingeschlossenen Winkel halbiert.

17) Aus zwei Punkten *A* und *B*, welcher auf einer Seite einer Geraden liegen, sind Senkrechte *a* und *b* auf diese Gerade gefällt, die Entfernung ihrer Fußpunkte sei *c*. In welcher Entfernung muß der Punkt *C* in der Geraden zwischen den Fußpunkten der Senkrechten genommen werden, wenn der Winkel *ACB* 90°. betragen soll? (§ 17, Aufg. 10.)

18) Es ist die Gleichung der Geraden zu finden, welche durch den Durchschnittspunkt der beiden Geraden:

$$y = 5x + 3 \text{ und } y = 4x + 1$$

Digitized by Google

und durch den Mittelpunkt der Strecke geht, deren Endpunkte die Koordinaten

$x_1 = -1,\ y_1 = 4;\quad x_2 = 4,\ y_2 = 3$ haben.

19) Von dem Durchschnittspunkte der beiden Geraden:

$$y = 2x + 3 \text{ und } y = 3x - 4$$

wird auf die Gerade:

$$5y + 4x = 7$$

ein Perpendikel gefällt, wie groß ist dasselbe?

20) Es sind drei Punkte $M_1 : x_1 = -3,\ y_1 = -4;\ M_2 : x_2 = 1,\ y_2 = -2,\ M_3 : x_3 = -5,\ y_3 = 2$ gegeben, man soll durch M_3 zwei Gerade so ziehen, daß die eine mit $M_1 M_2$ parallel ist, die zweite aber auf $M_1 M_2$ senkrecht steht. Wie heißen die Gleichungen dieser beiden Geraden?

21) Es seien zwei Gerade:

$$y = \frac{x}{4} + 1 \ldots AB \qquad \frac{y}{5} + \frac{x}{2} = 10 \ldots A'B'$$

und der Punkt $M_1 : x_1 = 4{\cdot}3,\ y_1 = -2{\cdot}5$ gegeben. Man fälle aus M_1 auf jede dieser Geraden eine Senkrechte und berechne:

a) die Koordinaten des gemeinschaftlichen Durchschnittspunktes der beiden gegebenen Geraden;

b) den Neigungswinkel der beiden gegebenen Geraden;

c) den Neigungswinkel der beiden Senkrechten;

d) die Neigungswinkel, welche die beiden gegebenen Geraden mit der X-Achse bilden und

e) die Länge der Perpendikel $M_1 M_2$ und $M_1 M_3$.

22) Das durch den Punkt $x_1 = \frac{9}{4},\ y_1 = 9$ gehende, auf

$$3(y - 1) = 4x$$

senkrecht stehende Perpendikel ist die Basishöhe eines gleichschenkeligen Dreieckes, dessen Flächeninhalt 6 m^2 beträgt. Wie groß sind die Seiten und Winkel dieses Dreieckes?

23) Ein Dreieck ist durch die Koordinaten seiner Eckpunkte gegeben, es ist die Lage des Schwerpunktes zu ermitteln:

$$A \begin{cases} x_1 = -15 \\ y_1 = -15 \end{cases} \qquad B \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = +15 \end{cases} \qquad C \begin{cases} x_3 = +15 \\ y_3 = -3 \end{cases}$$

24) Das rechtwinkelige Dreieck ABC ist durch die Koordinaten seiner Eckpunkte gegeben:

$$A \begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 0 \end{cases} \qquad B \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 3 \end{cases} \qquad C \begin{cases} x_3 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

welche sind die Gleichungen der Halbierungslinien der drei Winkel dieses Dreieckes?

Digitized by Google

25) Die Koordinaten der drei Eckpunkte eines Dreieckes ABC sind

$$A\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{cases} \qquad B\begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = -2 \end{cases} \qquad C\begin{cases} x_3 = -4 \\ y_3 = -1. \end{cases}$$

Es sind die Längen der drei Höhen und die Gleichungen der drei Schwerlinien zu bestimmen.

26) Es ist mit Hilfe rechtwinkeliger Koordinaten nachzuweisen, daß die Summe der Perpendikel, die von einem innerhalb der Fläche eines gleichseitigen Dreieckes gelegenen Punkte auf die Seiten gefällt werden, der Höhe des Dreieckes gleich ist.

27) Drei Punkte sind durch ihre Koordinaten gegeben:

$$O\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \qquad M\begin{cases} x_2 = 10 \\ y_2 = 0 \end{cases} \qquad N\begin{cases} x_3 = 6 \\ y_3 = 8. \end{cases}$$

Diese bilden die Spitzen eines Dreieckes, dessen Schwerpunkt Höhendurchschnittspunkt und Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises zu bestimmen sind. Ferner soll nachgewiesen werden, daß diese drei Punkte in einer Geraden liegen und daß die Entfernung des Kreismittelpunktes vom Höhendurchschnittspunkt gerade dreimal so groß ist, als die Entfernung des Kreismittelpunktes vom Schwerpunkte.

28) Zwei Gerade haben die Gleichungen

$$4y = 3x + 6, \quad 5y = 12x + 24.$$

Wie groß ist die Entfernung des Koordinatenanfangspunktes von der Geraden, welche den von den beiden gegebenen Geraden gebildeten spitzen Winkel halbiert?

29) Drei Punkte haben die Koordinaten:

$$A\begin{cases} x_1 = -4 \\ y_1 = -2 \end{cases} \qquad B\begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 7 \end{cases} \qquad C\begin{cases} x_3 = 8 \\ y_3 = 3. \end{cases}$$

Man berechne die Fläche des Dreieckes ABC aus der Grundlinie AB und der Höhe CD.

30) Von einem Dreiecke sind die Koordinaten der Eckpunkte gegeben:

$$A\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 4 \end{cases} \qquad B\begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = -4 \end{cases} \qquad C\begin{cases} x_3 = -2 \\ y_3 = 2. \end{cases}$$

Wie groß sind die Seiten dieses Dreieckes und wie groß ist der Radius des diesem Dreiecke eingeschriebenen Kreises?

31) Wenn $A\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = -1 \end{cases}$ $B\begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 2 \end{cases}$ $C\begin{cases} x_3 = 4 \\ y_3 = -3 \end{cases}$

gegeben sind, wie groß sind dann die Seiten und der Flächeninhalt des Dreieckes? Wie groß ist der Radius und der Flächeninhalt des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises?

Digitized by Google

32) Wenn $A \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 2 \end{cases}$ $B \begin{cases} x_2 = 8 \\ y_2 = 1 \end{cases}$ $C \begin{cases} x_3 = 8 \\ y_3 = 9 \end{cases}$ gegeben sind, wie groß ist die Fläche des dem Dreiecke ein- und umgeschriebenen Kreises?

33) Drei Punkte sind durch ihre Koordinaten gegeben, man bestimme die Länge der Verbindungslinien der drei Punkte und die Winkel, welche sie miteinander einschließen:

$A \begin{cases} x_1 = -4 \\ y_1 = +2 \end{cases}$ $B \begin{cases} x_2 = +3 \\ y_2 = -10 \end{cases}$ $C \begin{cases} x_3 = +10 \\ y_3 = +6. \end{cases}$

34) Wenn $A \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases}$ $B \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 3 \end{cases}$ $C \begin{cases} x_3 = 4 \\ y_3 = 1 \end{cases}$ ist, wie groß sind dann die Verbindungslinien, wie groß die Winkel und die Fläche des Dreieckes und wie groß ist der Radius des diesem Dreiecke umgeschriebenen Kreises?

35) Es sind drei Gerade durch ihre Gleichungen:

$$y = x, \quad y = -x, \quad y = 2x - 2$$

gegeben. Man soll Seiten, Winkel und Flächeninhalt des durch die drei Geraden gebildeten Dreieckes berechnen.

36) Das von den beiden Linien $y = 2x - 4$, $y = -x + b$ und der Abszissenachse eingeschlossene Dreieck hat den Inhalt von 3 Flächeneinheiten. Welcher Wert entspricht dem b?

37) Die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreieckes sind:

$A \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases}$ $B \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 3 \end{cases}$ $C \begin{cases} x_3 = 3 \\ y_3 = 1{\cdot}5 \end{cases}$

man bestimme das Volumen jenes Körpers, der durch Rotation des Dreieckes um die Y-Achse entsteht.

38) Die drei Seiten eines Dreieckes sind durch ihre Gleichungen

$$3y = 2x - 8, \quad 3y = 10x - 16, \quad y = -2x + 8$$

gegeben, es soll die Oberfläche und der Inhalt des Körpers, welcher durch die Rotation des Dreieckes um die Y-Achse entsteht, bestimmt werden.

39) Das durch die Koordinaten der Eckpunkte

$A \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$ $B \begin{cases} x_2 = 10 \\ y_2 = 0 \end{cases}$ $C \begin{cases} x_3 = 9 \\ y_3 = 3 \end{cases}$

bestimmte Dreieck rotiert um die X-Achse. Es ist die Oberfläche und der Inhalt des Rotationskörpers zu bestimmen.

40) Die Gleichungen dreier Geraden sind:

$$y = 2, \quad y = 2x - 2, \quad y = -2x + 10;$$

wie groß ist die Oberfläche und der Inhalt des Körpers, der durch Umdrehung des durch diese drei Geraden bestimmten Dreieckes um die X-Achse entsteht?

Digitized by Google

41) Die Koordinaten der Eckpunkte eines Viereckes sind:

$$A\begin{cases}x_1=1\\y_1=1\end{cases}\quad B\begin{cases}x_2=2\\y_2=3\end{cases}\quad C\begin{cases}x_3=3\\y_3=3\end{cases}\quad D\begin{cases}x_4=4\\y_4=1.\end{cases}$$

Man suche die Koordinaten des Durchschnittspunktes der beiden Diagonalen, den Winkel, welchen diese beiden Diagonalen bilden, und den Flächeninhalt des Viereckes.

42) Die Koordinaten der Eckpunkte eines Viereckes sind:

$$A\begin{cases}x_1=2\\y_1=5\end{cases}\quad B\begin{cases}x_2=4\\y_2=3\end{cases}\quad C\begin{cases}x_3=10\\y_3=6\end{cases}\quad D\begin{cases}x_4=6\\y_4=12.\end{cases}$$

Es sind die Seiten, Winkel und der Inhalt des Viereckes zu bestimmen.

43) Die Gleichungen und die Längen der Diagonalen eines Viereckes, dann die Winkel desselben sind zu berechnen, wenn die Seiten durch die Gleichungen:
$(DA)\ y=5x-3,\ (AB)\ 14y=3x+92,$
$(BC)\ 11y=7x-2,\ (CD)\ 4y=x+7$
gegeben sind.

44) Durch die Punkte $x_1=1,\ y_1=3;\ x_2=3,\ y_2=4$ soll eine Gerade gezogen, durch den Punkt $x_3=3,\ y_3=2$ auf diese Gerade eine Senkrechte errichtet und dann der Inhalt der Fläche bestimmt werden, welche von der Geraden, der darauf errichteten Senkrechten und den beiden positiven Koordinatenachsen eingeschlossen wird.

45) Es soll analytisch nachgewiesen werden, daß die Verbindungslinien der Halbierungspunkte der Seiten eines Viereckes ein Parallelogramm bilden.

46) Der Scheitel eines Winkels α sei der Koordinatenanfangspunkt und ein Schenkel liege in der Abszissenachse; innerhalb der Schenkel dieses Winkels sei ein Punkt durch die rechtwinkeligen Koordinaten $x'\ y'$ gegeben; man soll durch diesen Punkt eine Gerade so ziehen, daß von den Schenkeln dieses Winkels gleiche Stücke abgeschnitten werden. Speziell $\alpha=120^0,\ x'=1,$ $y'=\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

§ 29a.

1) $y=-x+4,\ y=-9x+12;\ y=-\frac{9x}{16}+\frac{15}{2},\ y=-\frac{x}{4}+5.$

2) *a*) $P=\frac{8\sqrt{5}}{5}=3{\cdot}5777088;$
b) $P=5{\cdot}2.$

Digitized by Google

3) $P = \pm \frac{y_1 - a x_1 - b}{\sqrt{1+a^2}}$; $x_2 = \frac{a y_1 + x_1 - a b}{a^2+1}$, $y_2 = \frac{a^2 y_1 + a x_1 + b}{a^2+1}$;
$P = \frac{2}{3}$; $x_2 = \frac{12}{5}$, $y_2 = \frac{37}{15}$.

4) $x = 6$, $y = 6$.

5) $y = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}(x - x_1) + y_1 = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$;
$y = \frac{y_3 + y_2 - 2y_1}{x_3 + x_2 - 2x_1}(x - x_1) + y_1 = \frac{x}{6} + \frac{11}{6}$.

6) $y - 2 = \frac{8 + 5\sqrt{3}}{11}(x - 2)$ oder $y - 2 = \frac{8 - 5\sqrt{3}}{11}(x - 2)$.

7) $y = -5x + \frac{23}{12}$, $y = \frac{x}{5} + \frac{11}{60}$. Die Abschnitte auf den Achsen sind:
$X = \frac{23}{60}$, $Y = \frac{23}{12}$, $X_1 = -\frac{11}{12}$, $Y_1 = \frac{11}{60}$.

8) $y = -2{\cdot}795306x - 12{\cdot}30404$ ($y = -2{\cdot}7953x - 12{\cdot}3039$);
$\varphi = 109^0\,41'\,3{\cdot}5''$ ($109^0\,41'\,4''$),
$y = 0{\cdot}14745x - 2{\cdot}29876$,
$\varphi = 8^0\,23'\,16''$.

9) $y = \frac{15x}{16} + \frac{39}{8}$; $v = 68^0\,38'\,56{\cdot}46''$ ($68^0\,38'\,56''$).

10) $9y = 7x + 50$, $7y = -9x + 10$.

11) $y = \frac{15x}{8} + \frac{15}{2}$; $y = \frac{4x}{3} + \frac{16}{3}$.

12) $y = -\frac{4x}{3} + \frac{52}{3}$; $v = 126^0\,52'\,11{\cdot}64''$ ($v_1 = 53^0\,7'\,48{\cdot}36''$)
($126^0\,52'\,12''$, $53^0\,7'\,48''$);
$X = 5\frac{11}{25}$, $Y = 10\frac{2}{25}$.

13) Die durch $x_1 = 5$, $y_1 = 7$ gehende Gerade ist:
$$y = 0{\cdot}8391x + 2{\cdot}8045,$$
die im Punkte $x_1\,y_1$ darauf Senkrechte
$$y = -1{\cdot}19175x + 12{\cdot}95877.$$

14) $y_1 = \frac{7}{8}$, $x_1 = \frac{9}{8}$; $y_2 = 9$, $x_2 = -7$.

15) $y = \frac{a b_1 - a_1 b}{a - a_1}$, $y = 2$ ist die gesuchte Linie.

16) $y = 0{\cdot}07107x - 1{\cdot}85786$, $y = -14{\cdot}07107x - 30{\cdot}14214$.

17) Der Abstand vom ersten Fußpunkte ist $\xi = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}$.

18) $y = 3x - 1$.

19) $P = 16{\cdot}55442$.

20) $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$, $y = -2x - 8$.

Digitized by Google

21) Die Koordinaten des Durchschnittspunktes der beiden gegebenen Geraden sind: $\xi = \frac{196}{11}$, $\eta = \frac{60}{11}$.
$v = 97^\circ\,45'\,54{\cdot}6''$ $(v_1 = 82^\circ\,14'\,5{\cdot}4'')$ = Neigungswinkel der beiden Geraden ($97^\circ\,45'\,55''$, $82^\circ\,14'\,5''$).
Die Gleichungen der beiden Senkrechten sind:

$$y = -4x + 14{\cdot}7, \quad y = \frac{2x}{5} - 4{\cdot}22.$$

$V = 82^\circ\,14'\,5{\cdot}4''$ $(V_1 = 97^\circ\,45'\,54{\cdot}6'')$ = Neigungswinkel der beiden Senkrechten ($82^\circ\,14'\,5''$, $97^\circ\,45'\,55''$).
$\alpha_1 = 14^\circ\,2'\,10{\cdot}5''$; $\alpha_2 = 111^\circ\,48'\,5{\cdot}07''$
($14^\circ\,2'\,10''$, $111^\circ\,48'\,5''$).

$$P_1 = \frac{18{\cdot}3\sqrt{17}}{17} = 4{\cdot}438402; \quad P_2 = \frac{83{\cdot}5\sqrt{29}}{29} = 15{\cdot}505561.$$

22) Die Seiten sind: 4 *m*, 3·6055513 *m*, 3·6055513 *m*.
Die Winkel $67^\circ\,22'\,48{\cdot}46''$, $\beta = \gamma = 56^\circ\,18'\,35{\cdot}77''$.
($67^\circ\,22'\,48''$, $56^\circ\,18'\,36''$).

23) Die drei Schwerlinien sind:

$$y = x, \; y = -8x - 9; \quad y = -\frac{x}{8} - \frac{9}{8},$$

daher $X = -1$, $Y = -1$.

24) $y = x$, $y = -\frac{x}{3} + \frac{4}{3}$; $y = -2x + 3$.

25) Die Schwerlinien sind:
$y = \frac{x}{13} - \frac{9}{13}$, $y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$; $y = x - 1$;
$h_1 = 6{\cdot}3245554$, $h_2 = 3{\cdot}1622777$, $h_3 = 2{\cdot}8284272$.

26) Nimmt man die Basis des Dreieckes als X-Achse und die im Mittelpunkte der Basis errichtete Normale als Y-Achse an, so sind die von einem Punkte $x_1\,y_1$ innerhalb der Fläche des Dreieckes auf die Seiten gefällten Perpendikel

$$y_1, \; -\frac{y_1 - x_1\sqrt{3} - \frac{s}{2}\sqrt{3}}{2}, \; -\frac{y_1 + x_1\sqrt{3} - \frac{s}{2}\sqrt{3}}{2}$$

und die Summe dieser drei Perpendikel ist $\frac{s}{2}\sqrt{3}$, was sich auch leicht synthetisch nachweisen läßt.

27) Die Schwerlinien sind $y = \frac{x}{2}$, $y = -\frac{4x}{7} + \frac{40}{7}$, $y = 8x - 40$.
Die Höhenperpendikel: $y = \frac{x}{2}$, $x = 6$, $y = -\frac{3x}{4} + \frac{80}{4}$.
Die im Mittelpunkte der Seiten errichteten Perpendikel:
$y = \frac{1}{2}x$, $x = 5$, $y = -\frac{3x}{4} + \frac{25}{4}$,

Digitized by Google

somit sind die Koordinaten des Höhendurchschnittes $x = 6$, $y = 3$, des Schwerpunktes: $x = 5\frac{1}{3}$, $y = 2\frac{2}{3}$, des Kreismittelpunktes $x = 5$, $y = 2\frac{1}{2}$. Für diese drei Punkte besteht: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$, daher liegen sie in einer geraden Linie.

Der Abstand des Kreismittelpunktes vom Höhendurchschnitte ist

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Der Abstand des Kreismittelpunktes vom Schwerpunkte ist:

$$\tfrac{1}{6}\sqrt{5} \text{ und es ist } 3 . \tfrac{1}{6}\sqrt{5} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}.$$

28) Die Gleichung der Winkelsymmetrale ist $7y = 9x + 18$ und der Abstand beträgt $P = \frac{9\sqrt{130}}{65} = 1{\cdot}5787$.

29) Die durch A und B gehende Linie ist $y = x + 2$, die Strecke $AB = 9\sqrt{2}$, die Höhe darauf $3{\cdot}5\sqrt{2}$, daher $f = 31{\cdot}5$.

30) $a = 10$, $b = \sqrt{29} = 5{\cdot}3851648$, $c = \sqrt{37} = 6{\cdot}0827625$.
$r = 1{\cdot}3042712$.

31) $a = \sqrt{18}$, $b = \sqrt{20}$, $c = \sqrt{26}$, $F = 9$.
$r = 1{\cdot}3030451$, $f = 5{\cdot}334193$.

32) $f = 10{\cdot}67325$, $F = 60{\cdot}44424$.

33) $a = 17{\cdot}4642492$, $b = 14{\cdot}5602198$, $c = 13{\cdot}892444$.
$\alpha = 75^0\,41'\,20{\cdot}25''$, $\beta = 53^0\,53'\,8{\cdot}95''$ ($75^0\,41'\,21''$, $53^0\,53'\,10''$).

34) $a = 2{\cdot}8284271$, $b = 3$, $c = 2{\cdot}2360680$, $f = 3$.
$\alpha = 63^0\,26'\,5{\cdot}8''$ ($63^0\,26'\,6''$), $\gamma = 45^0$.
$R = 1{\cdot}5811389$ ($1{\cdot}5812$).

35) $2\sqrt{2}$, $\frac{2}{3}\sqrt{2}$, $\frac{4}{3}\sqrt{5}$;
$f = \frac{4}{3}$; der Winkel, welcher der Seite $\frac{4}{3}\sqrt{5}$ gegenüberliegt, beträgt 90^0, der der Seite $2\sqrt{2}$ gegenüberliegende Winkel $71^0\,33'\,54{\cdot}21''$, der dritte Winkel $18^0\,26'\,5{\cdot}79''$.
($71^0\,33'\,54''$, $18^0\,26'\,6''$).

36) $b_1 = +5$, $b_2 = -1$.

37) $C = 7\pi = 21{\cdot}991149$.

38) $O = 182{\cdot}52639$, $C = 30\pi = 94{\cdot}247779$.

39) $O = 12\pi\sqrt{10} = 119{\cdot}21506$, $C = 30\pi = 94{\cdot}24778$.

40) $O = (8 + 12\sqrt{5})\,\pi = 109{\cdot}430519$
$C = \frac{32\pi}{3} = 33{\cdot}510322$.

41) $X = Y = 2{\cdot}5$; 90^0, 4 Flächeneinheiten.

Digitized by Google

42) Die Seiten sind $a = 8{\cdot}0622577$, $b = 7{\cdot}2111026$, $c = 6{\cdot}7082039$ und $d = 2{\cdot}8284271$.
$< (a, b) = 63^\circ\, 26'\, 5{\cdot}8''$; $< (b, c) = 82^\circ\, 52'\, 30''$
$< (c, d) = 108^\circ\, 26'\, 5{\cdot}8''$; $< (d, a) = 105^\circ\, 15'\, 18{\cdot}4''$
$(63^\circ\, 26'\, 6''$, $82^\circ\, 52'\, 30''$, $108^\circ\, 26'\, 6''$, $105^\circ\, 15'\, 18'')$.
Die Fläche beträgt 35 Flächeneinheiten.

43) $y = -\frac{4x}{3} + \frac{29}{3}$, $y = +\frac{8x}{15} + \frac{22}{15}$; 5, 17.
$113^\circ\, 24'\, 16{\cdot}9''$, $20^\circ\, 22'\, 35{\cdot}2''$, $161^\circ\, 33'\, 54{\cdot}2''$, $64^\circ\, 39'\, 13{\cdot}7''$
$(113^\circ\, 24'\, 18''$, $20^\circ\, 22'\, 34''$, $161^\circ\, 33'\, 54''$, $64^\circ\, 39'\, 13'')$.

44) Die Fläche beträgt $9\frac{19}{20}$ Flächeneinheiten.

45) Sind A, B, C, D die Eckpunkte des Viereckes mit den Koornaten $x_1\, y_1$, $x_2\, y_2$, $x_3\, y_3$, $x_4\, y_4$, so sind die Halbierungslinien der Seiten:

$AB,\ BC \ldots y = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} x - M$ (1)

$AD,\ CD \ldots y = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} x - N$ (2)

$AB,\ AD \ldots y = \frac{y_4 - y_2}{x_4 - x_2} x - P$ (3)

$BC,\ CD \ldots y = \frac{y_4 - y_2}{x_4 - x_2} x - Q$ (4)

daher sind 1 und 2, 3 und 4 parallel, da sie gleiche Richtungskonstanten haben.

46) Ist $y - y' = A\,(x - x')$, wo $A = \operatorname{tang} \gamma$, die durch den Punkt $x'\, y'$ gehende Gerade, so ist der Abschnitt auf dem einen Schenkel (der X-Achse): $\frac{Ax' - y'}{A}$ und auf dem anderen Schenkel, dessen Gleichung $y = x \operatorname{tg} \alpha = a\, x$ ist, $\frac{Ax' - y'}{A - a} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}$. Aus $\frac{Ax' - y'}{A} = \frac{Ax' - y'}{A - a} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}$ folgt $A_1 = -\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$ und $A_2 = \frac{y'}{x'}$, daher geht die Gleichung $y - y' = A\,(x - x')$ über in $y = -x \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} + \left(y' + x' \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}\right)$; $y = \frac{y'}{x'} x$; für $\alpha = 120^\circ$, $x' = 1$, $y' = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ ist $\gamma_1 = 150^\circ$ und $\gamma_2 = 30^\circ$, daher $y = -\frac{x}{3}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{3} = -0{\cdot}5773503\, x + 1{\cdot}1547005$, $y = \frac{x\sqrt{3}}{3} = 0{\cdot}5773503\, x$. Die durch letztere Gleichung dargestellte Gerade geht durch den Scheitel und schneidet von den Schenkeln des Winkels gleiche Stücke 0 ab. Den Wert von A_1 kann man auch erhalten, wenn man beachtet, daß γ ein Außenwinkel eines gleichschenkeligen

Digitized by Google

Dreieckes ist, also $\gamma_1 = 90 + \frac{\alpha}{2}$ und $A_1 = \operatorname{tg} \gamma_1 = -\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$. Nimmt man aber beide Schenkel des Winkels α als Koordinatenachsen an, so ist die Gleichung der gesuchten Geraden $y - y_1 = \frac{\sin \gamma}{\sin (\alpha - \gamma)} (x - x_1)$, wo $x_1\, y_1$ die Koordinaten des gegebenen Punktes bezogen auf das schiefwinkelige Koordinatensystem sind. Speziell $y_1 = \frac{2}{3}$, $x_1 = \frac{4}{3}$. Da die Abschnitte auf beiden Achsen gleich sind, so ist $y_1 - x_1 \frac{\sin \gamma}{\sin (\alpha - \gamma)} = x_1 - y_1 \frac{\sin (\alpha - \gamma)}{\sin \gamma}$, daher

$[\sin \gamma + \sin (\alpha - \gamma)]\, [x_1 \sin \gamma - y_1 \sin (\alpha - \gamma)] = 0$,

$\sin \gamma + \sin (\alpha - \gamma) = 0$ gibt $\operatorname{tg} \gamma_1 = -\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$; $\gamma_1 = 150°$, daher $y = -x + 2$. $x_1 \sin \gamma - y_1 \sin (\alpha - \gamma) = 0$ gibt $\operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{y_1 \sin \alpha}{x_1 + y_1 \cos \alpha}$; $\gamma_2 = 30°$, daher $y = \frac{x}{2}$.

§ 30. Der Kreis.

1) Es ist die geometrische Bedeutung der Gleichung:

$$x^2 - 12x + y^2 - 16y + 64 = 0$$

anzugeben, dieselbe zu konstruieren, und sind die Durchschnittspunkte mit den Koordinatenachsen zu berechnen.

2) Ebenso: $4x^2 - 3x + 4y^2 + 7y - 12\frac{5}{8} = 0$.

3) Es ist die Gleichung der Zentrallinie der beiden Kreise:

$$x^2 + y^2 - 2y = 0, \quad x^2 + y^2 - 2x = 0$$

aufzustellen.

4) Die Gleichung eines Kreises ist:

$$x^2 + y^2 = 6x + 8y - 12 \cdot 75.$$

Man bestimme die Oberfläche und den Inhalt eines Tetraeders, dessen Seitenfläche diesem Kreise eingeschrieben ist.

Gleichung eines Kreises, der durch drei Punkte geht.

5) Die rechtwinkeligen Koordinaten dreier Punkte eines Kreises sind gegeben, wie lautet die Gleichung des Kreises?

a) (0, 0), (0, 3), (3, 0),

b) (0, 0), (8, 0), (0, 6),

wo die ersten Werte die Abszissen, die zweiten die Ordinaten angeben. Die Kreise sollen auch konstruiert werden.

Digitized by Google

6a) Die Koordinaten der Eckpunkte eines Dreieckes sind:

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 3$$
$$y_1 = -2 \quad y_2 = 3 \quad y_3 = -1.$$

Wie groß ist der Flächeninhalt des dem Dreiecke umgeschriebenen Kreises?

6b) Wie groß ist der Inhalt einer durch die drei Punkte M_1 (2, 1), M_2 (3, 1), M_3 (6, 4), die in einer Ebene liegen, gehenden Kugel, wenn ihre Oberfläche durch die Ebene im Verhältnis 1 : 2 geteilt wird?

7) Ein Kreis geht durch die drei Punkte:

$$x_1 = 0,\ y_1 = 1; \quad x_2 = 1,\ y_2 = 0; \quad x_3 = 1,\ y_3 = 2.$$

Wie lautet die Gleichung dieses Kreises, und wie groß ist der Flächeninhalt desselben?

8) Es soll die Gleichung eines Kreises gefunden werden, welcher die beiden Achsen eines rechtwinkeligen Koordinatensystems berührt und durch den Punkt $x_1 = 9,\ y_1 = 2$ geht.

9) Es sind die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises zu bestimmen, welcher dem durch die drei Geraden:

$$2y = x + 4; \quad y + x = 2; \quad y = 2x - 1$$

bestimmten Dreiecke umgeschrieben ist.

10) Es ist die Gleichung des Kreises aufzustellen, welcher durch die beiden Punkte A ($x_1 = 2,\ y_1 = 2$), B ($x_2 = 5,\ y_2 = 3$) und durch den Punkt C geht, welch letzterer Punkt der Durchschnitt der Abszissenachse mit der im Mittelpunkte von AB auf AB errichteten Normalen ist. Auch ist der Flächeninhalt des Kreises zu bestimmen.

11) Drei Punkte sind in einer Ebene bezüglich eines rechtwinkeligen Achsensystems durch ihre Koordinaten:

$$M_1 \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases} \qquad M_2 \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 1 \end{cases} \qquad M_3 \begin{cases} x_3 = 6 \\ y_3 = 4 \end{cases}$$

gegeben; man lege durch diese Punkte einen Kreis, betrachte ihn als den größten Kreis einer Kugel und berechne die Oberfläche und den Inhalt dieser Kugel.

12) Man lege durch die drei Punkte:

$$M_1 \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \end{cases} \qquad M_2 \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = 3 \end{cases} \qquad M_3 \begin{cases} x_3 = 3 \\ y_3 = -2 \end{cases}$$

einen Kreis, betrachte ihn als den Grundkreis eines gleichseitigen Zylinders und berechne die Oberfläche und den Inhalt des diesem Zylinder eingeschriebenen Würfels.

Digitized by Google

Kreis und Gerade.

13) Welche Linien werden durch die Gleichungen: $3x - 4y + 7 = 0$, $x^2 + y^2 = 25$ dargestellt? Wie heißen die Koordinaten der Durchschnittspunkte beider Linien? Wie lang ist die Sehne und wie groß ist ihr Abstand vom Kreismittelpunkte?

14) Ein Kreis, dessen Gleichung $x^2 + y^2 = 25$ ist, wird von einer Geraden, welche durch die Punkte $x_1 = 0$, $y_1 = 3$; $x_2 = -3$, $y_2 = 2$ geht, geschnitten; es ist die Länge der Sehne und des zugehörigen kleinen Kreisbogens zu berechnen.

15) In wieviel Punkten schneidet die Gerade $y = \frac{x}{2} + 15$ die Kurve $x^2 + y^2 = 400$? Wie groß sind die Koordinaten der Durchschnittspunkte, und wie groß ist der Abstand der Geraden vom Kurvenmittelpunkte?

16) Um jeden Eckpunkt der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreieckes, dessen Katheten $a = 3$, $b = 4$ bezüglich auf der X- und Y-Achse liegen, sei mit der anliegenden Kathete als Radius ein Kreis beschrieben; man bestimme die Gleichung der gemeinschaftlichen Sekante und die Länge der gemeinschaftlichen Sehne.

17) Die Gleichung eines Kreises sei $x^2 + y^2 = 16$, die Gleichung einer Geraden $y = 2x + 5$, es sollen die Koordinaten der Durchschnittspunkte dieser beiden Linien, die Länge der dadurch bestimmten Sehne und ihr Abstand vom Mittelpunkt bestimmt werden.

18) Die Gleichung eines Kreises sei $x^2 + y^2 = 9$, die Gleichung einer Geraden $y = x - 4$. Es soll durch den Punkt $x' = 2$, $y' = 0$ eine Sehne parallel zu der Geraden gezogen werden und die Länge dieser Sehne, sowie ihre Entfernung vom Mittelpunkte des Kreises bestimmt werden; auch sind die Koordinaten der Durchschnittspunkte der gegebenen Geraden mit dem Kreise anzugeben.

19) Im Kreise: $x^2 - 2x + y^2 - 2y + 1 = 0$ sind zu suchen die Durchschnittspunkte desselben mit den Achsen und mit der Geraden $y = -x + 1$, und es sind der Kreis und die Gerade zu konstruieren.

20) Welches ist der geometrische Ort aller Punkte, die von dem Punkte $x' = 2$, $y' = 3$ die Entfernung 4 haben? In welcher Beziehung steht die Linie $2y - 5x = 4$ zu diesem geometrischen Orte?

Digitized by Google

21) Die Gleichung einer geraden Linie sei:

$$y = x + 3$$

und die Koordinaten eines Punktes M seien $x' = +3$, $y' = +1$, man suche die Koordinaten jener Punkte in der Geraden, welche von dem Punkte M die Entfernung $d = 4$ haben.

22) Die Gleichung des Kreises ist zu bestimmen, welche dem durch die Geraden

a) $4x + 3y = 15$, $4x - 3y = -23$, $3x - 4y = 30$

b) $3x + 4y + 15 = 0$, $12y - 5x + 10 = 0$, $15x - 8y - 30 = 0$

gegebenen Dreiecke eingeschrieben ist.

23) In welchen Punkten schneidet die Gerade

$$3x - 2y = 6$$

den Kreis

$$x^2 - 6y + y^2 - 3 = -4x?$$

Es ist die Lage und Größe des Kreises auf rechtwinkelige Achsen bezogen zu bestimmen.

24) Die Gerade $y = \frac{4x}{3} - 2$ schneidet die Kurve

$$x^2 + y(y - 4) = 3(1 + 2x)$$

in zwei Punkten. Wie lang ist die Verbindungslinie der beiden Durchschnittspunkte? Wenn man die Durchschnittspunkte mit dem Koordinatenanfangspunkt verbindet, so schließen die dadurch entstehenden Linien mit der Geraden ein Dreieck ein; wie groß ist der Flächeninhalt desselben?

Kreis und Tangente.

25) Die geometrische Bedeutung der Gleichung:

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$$

ist anzugeben und die Kurve zu konstruieren, sodann ist zu untersuchen, in welcher Beziehung die gerade Linie:

$$3x = 4y + 19$$

zu dieser Kurve steht.

26) An einen Kreis, dessen Gleichung:

$$x^2 + 2x + y^2 = 24$$

lautet, soll eine Tangente gezogen werden; welchen Winkel bildet diese Tangente mit der Abszissenachse, wenn die Koordinaten des Berührungspunktes $x_1 = 3$, $y_1 = 3$ sind?

27) Vom Punkte $x_1 = 6$, $y_1 = 0$ sollen an den Kreis

$$x^2 + y^2 = 9$$

Tangenten gezogen und die Koordinaten der Berührungspunkte bestimmt werden.

Digitized by Google

28) Man ziehe durch den Punkt $x_1 = 7$, $y_1 = 1$ gerade Linien, welche den Kreis:

$$x^2 + y^2 = 25$$

tangieren. Man bestimme ferner den Neigungswinkel, den diese Tangenten einschließen.

29$_a$) Die Gleichungen eines Kreises und einer Geraden seien

$$x^2 + y^2 - x = 0, \quad x + y = 0;$$

man suche die Gleichungen der Tangenten, welche mit dieser Geraden parallel sind, und bestimme die Koordinaten der Berührungspunkte.

29$_b$) Wie groß ist der Winkel, den die Tangenten von $x_1 = 0$, $y_1 = 3$ an die Kurven $x^2 + y^2 - 2(3x + 5y) + 30 = 0$ miteinander einschließen? Wie groß ist die von diesen Tangenten und der Berührungssehne begrenzte Fläche?

30) An einen Kreis mit der Gleichung:

$$x^2 + y^2 = 100$$

wird in einem Punkte, dessen Abszisse $x_1 = 6$ und die Ordinate positiv ist, eine Tangente gezogen. Welchen Winkel bildet diese Tangente mit einer Geraden, welche durch die Punkte:

$$x_2 = -5, \; y_2 = 0; \quad x_3 = 3, \; y_3 = 4 \text{ geht?}$$

31) An den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ soll eine Tangente gelegt werden, die von der positiven Y-Achse ein Stück abschneidet, das $n$mal so groß ist wie das Stück, das sie von der positiven X-Achse abschneidet; wie lautet die Gleichung der Tangente?

32) Durch die drei Punkte:

$$A \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad B \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \qquad C \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

soll ein Kreis gelegt und der Winkel, welchen die in A und B gezogenen Tangenten miteinander bilden, bestimmt werden.

33) Die Gleichungen eines Kreises und einer Geraden seien

$$x^2 + y^2 = 10x, \; y = 4x - 7;$$

man soll durch die Punkte M_1 und M_2, in welchen die Gerade den Kreis schneidet, Tangenten ziehen, die Koordinaten des Durchschnittspunktes M_3 und den Neigungswinkel dieser zwei Tangenten berechnen.

34) Die Gleichung eines Kreises ist:

$$x^2 + y^2 + 12y - 22x + 57 = 0.$$

Wie lauten die Gleichungen der Tangenten in den Schnittpunkten mit der Abszissenachse und wie groß ist das Volumen eines Kegels, welcher diesen Kreis als Basis hat und dessen Mantel-

Digitized by Google

linien gegen die Grundfläche dieselbe Neigung besitzen, wie jene Tangenten gegen die Abszissenachse?

35) Welchen Winkel bilden die beiden Tangenten miteinander, welche vom Ursprunge an den Kreis $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$ gezogen werden können?

36) Es sind die Gleichungen der an die beiden Kreise:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad (x-4)^2 + y^2 = 4$$

gemeinschaftlichen Tangenten aufzustellen, und die Winkel, welche diese Tangenten mit der Abszissenachse bilden, zu berechnen.

37) An die beiden Kreise

$$x^2 + y^2 = 100, \quad x^2 - 42x + y^2 - 6x + 425 = 0$$

sind die beiden inneren gemeinsamen Tangenten zu legen.

38) Die Koordinaten dreier Punkte sind

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = 4 \qquad x_3 = 9$$
$$y_1 = 2 \qquad y_2 = 1 \qquad y_3 = 6.$$

Man leite die Gleichung des durch diese drei Punkte gehenden Kreises ab und bestimme die Koordinaten des Berührungspunktes jener Tangente, welche gegen die Koordinatenachsen gleich geneigt ist.

39) Die Gerade $3y + 4x + 12 = 0$ soll um jenen Punkt in ihr, welcher von dem Mittelpunkte des Kreises

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$$

den kleinsten Abstand hat, so gedreht werden, daß sie zur Tangente wird; wie groß ist ihr Drehwinkel?

40) Die vom Punkte $x = -3$, $y = 0$ an den Kreis:

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

gezogene Tangente teilt den Kreis:

$$(x-4)^2 + y^2 = 4$$

in zwei ungleiche Teile. Der Flächeninhalt des kleineren Segmentes ist zu berechnen.

41) Es ist die Gleichung des Kreises zu suchen, welcher seinen Mittelpunkt in der X-Achse hat und die Gerade $y = 2x + 3$ in einem Punkte berührt, dessen Abszisse -1 ist.

42) Es ist die Gleichung des Kreises aufzustellen, dessen Zentrum in der Abszissenachse liegt, der die Gerade $12x + 5y = 97$ berührt und den Radius 13 hat.

43) Welcher Kreis berührt die positive X-Achse, die positive Y-Achse und die Gerade:

$$y = -5\left(\frac{x}{3} - 1\right)$$

und wo erfolgen die Tangierungen?

Digitized by Google

44) An den Kreis, der die positive X-, die positive Y-Achse berührt, und durch den Punkt $x_1 = 8$, $y_1 = 1$ geht, soll eine Tangente so gelegt werden, daß sie mit der Geraden $y = -\frac{4x}{3} + 2$ parallel ist.

45) Ein Kreis berührt die beiden Geraden $y = \frac{3x}{4} + \frac{1}{2}$, $y = -\frac{5x}{12} + 4$ und geht durch den Punkt $x = 6$, $y = 3$; wie lautet seine Gleichung?

46) Eine auf rechtwinkelige Koordinaten bezogene Gerade schneidet die Abszissenachse in $x_1 = 4$ und die Ordinatenachse in $y_1 = 5$. Zwischen dieser Geraden und der Ordinatenachse liegt ein Kreis, welcher beide Linien berührt und zu dessen Mittelpunkt die Abszisse $p = 1$ gehört; wie lautet die Kreisgleichung?

47) Es ist die Gleichung eines Kreises zu finden, wenn die Koordinaten seines Mittelpunktes: α und β und die Gleichung $y = ax$ der durch den Anfangspunkt der Koordinaten hindurchgehenden Tangente am Kreise gegeben sind.
Speziell $\alpha = 4$, $\beta = 8$, $a = 1$.

48) Es ist die Gleichung des Kreises zu finden, welcher durch den Punkt $x_1 = 1$, $y_1 = 1$ geht, die Gerade $2y - x - 3 = 0$ und die X-Achse berührt.

49) Es ist die Gleichung eines Kreises zu finden, dessen Mittelpunkt die Koordinaten $x_1 = -1$, $y_1 = 2$ hat und der die Gerade $3x + 4y = 30$ berührt.

50) Ein Kreis ist durch zwei Punkte ($x_1 = 2$, $y_1 = 9$), ($x_2 = 1$, $y_2 = 2$) und durch die Tangente $4y = 3x + 30$ gegeben; man suche die Gleichung des Kreises.

51) Es ist der geometrische Ort der Spitzen aller Dreiecke, welche die Basis $2a$ und den Winkel an der Spitze δ gemeinsam haben, analytisch zu bestimmen. Speziell $2a = 6$, $\delta = 30^0$.

52) Die Summe der Quadrate der Verbindungslinien AM und BM eines Punktes M mit zwei gegebenen Punkten A und B sei einem gegebenen Quadrate gleich. Es soll der geometrische Ort des Punktes M bestimmt werden.

53) Die Gerade AB sei durch den Punkt C in die Abschnitte m und n zerlegt, es ist der geometrische Ort des Punktes M zu suchen, von dem aus die beiden Strahlen MA und MC einen Winkel einschließen, der gerade so groß ist wie der Winkel, den die Strahlen MC und MB miteinander einschließen.
(Speziell $m = 3$, $n = 2$.)

Digitized by Google

54) Es ist der geometrische Ort des Punktes M zu finden, dessen Abstände von den beiden ihrer Lage nach gegebenen Punkten A und B in dem konstanten Verhältnisse $m : n$ stehen.
(Speziell $AB = 6$ und $m : n = 5 : 4$.)

55) Es ist die Gleichung eines Kreises zu suchen, der die beiden Achsen eines rechtwinkeligen Koordinatensystems und den auf dieselben bezogenen Kreis:

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$$

berührt.

56) Man bestimme die Gleichung und den Inhalt des Kreises, welcher durch den Punkt:

$$x_1 = 4, \quad y_1 = 3$$

geht, den Kreis:

$$(x - 2)^2 + y^2 = 1$$

von außen berührt und gleichzeitig auch die Ordinatenachse tangiert.

57) Es soll die Gleichung des Kreises aufgestellt werden, welcher die Kreise (1) und (2):

$$1.\ x^2 + y^2 = 9 \qquad 2.\ (x - 6)^2 + y^2 = 1$$

von innen und den Kreis (3):

$$3.\ (x - 10)^2 + y^2 = 4$$

von außen berührt.

58) Es ist die Gleichung des Kreises zu finden, der durch den Punkt

$$x_1 = 13, \quad y_1 = 8$$

geht und die beiden Kreise

$$x^2 + y^2 = 9 \qquad (x - 6)^2 + y^2 = 1$$

von außen berührt.

59) Es soll die Gleichung des Kreises aufgestellt werden, welcher die drei Kreise:

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0, \quad x^2 + y^2 - 36x - 6y + 308 = 0.$$
$$x^2 + y^2 - 22x - 40y + 496 = 0$$

von außen berührt.

60) Es ist der Flächeninhalt eines Viereckes zu bestimmen, dessen Diagonalen die Zentrallinie und die Durchschnittssehne der durch die Gleichungen:

$$x^2 + y^2 - 72 \cdot 25 = 0, \quad x^2 + y^2 - 21x + 85 \cdot 25 = 0$$

gegebenen Kreise sind; ferner ist die Mantelfläche und der Inhalt des Doppelkegels zu berechnen, den dieses Viereck beschreibt, wenn es um die Zentrallinie als Achse gedreht wird.

Digitized by Google

§ 30a.

1) $(x-6)^2+(y-8)^2=6^2$.
Dieser Kreis berührt die Y-Achse im Punkte $y=8$, die X-Achse wird nicht berührt.

2) $(x-\frac{3}{8})^2+(y+\frac{7}{8})^2=4$.
$x_1=2\cdot1734368$; $x_2=-1\cdot4234368$.
$y_1=1\cdot0895292$; $y_2=-2\cdot8395292$.

3) $y=-x+1$.

4) $(x-3)^2+(y-4)^2=(\frac{7}{2})^2$;
$O=3r^2\sqrt{3}=\frac{147}{4}\sqrt{3}$
$J=\frac{r^3\sqrt{6}}{4}=\frac{343}{32}\sqrt{6}$.

5) *a*) $(x-\frac{3}{2})^2+(y-\frac{3}{2})^2=(\frac{3}{2}\sqrt{2})^2$;
b) $(x-4)^2+(y-3)^2=5^2$.

6$_a$) $(x-\frac{2}{11})^2+(y-\frac{1}{11})^2=(\frac{1}{11}\sqrt{1105})^2$,
$r^2\pi=28\cdot68975$ Flächeneinheiten.

6$_b$) $C=\frac{1125\pi}{16}$.

7) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$;
$r^2\pi=3\cdot14159265$ Flächeneinheiten.

8) $(x-5)^2+(y-5)^2=25$;
$(x-17)^2+(y-17)^2=289$.

9) $(x-\frac{7}{6})^2+(y-\frac{13}{6})^2=(\frac{5}{6}\sqrt{2})^2$.

10) $(x-\frac{113}{30})^2+(y-\frac{17}{10})^2=(\frac{17}{30}\sqrt{10})^2$;
$f=10\cdot088003$ Flächeneinheiten.

11) $(x-\frac{19}{6})^2+(y-\frac{23}{6})^2=(\frac{1}{6}\sqrt{290})^2$;
$O=101\cdot2291$ Flächeneinheiten;
$C=95\cdot7705$ Kubikeinheiten.

12) $x^2+(y-\frac{9}{10})^2=(2\cdot9)^2$.
$O=100\cdot92$ Flächeneinheiten;
$C=68\cdot9825$ Kubikeinheiten.

13) $x_1=3$, $y_1=4$; $x_2=-\frac{117}{25}$, $y_2=-\frac{44}{25}$;
$S=9\frac{3}{5}$; $p=\frac{7}{5}$.

14) $x_1=3$, $y_1=4$; $x_2=-4\cdot8$, $y_2=1\cdot4$;
$D=2\cdot6\sqrt{10}=8\cdot221922$ ($8\cdot2219$), $B=9\cdot652516$ ($9\cdot6525$).

15) $y=12\pm2\sqrt{11}$, $x=-6\pm4\sqrt{11}$, $p=6\sqrt{5}$.

Digitized by Google

16) $x^2 - 2ax + y^2 = 0$, $x^2 - 2by + y^2 = 0$;
$y = \frac{a}{b}x$, $S = \frac{2ab}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}$; $(x-3)^2 + y^2 = 9$;
$x^2 + (y-4)^2 = 16$; $y = \frac{3x}{4}$, $S = 4 \cdot 8$.

17) $x_1 = -2 + \frac{1}{5}\sqrt{55} = -0{\cdot}5167603$;
$y_1 = 1 + \frac{2}{5}\sqrt{55} = 3{\cdot}9664794$.
$x_2 = -2 - \frac{1}{5}\sqrt{55} = -3{\cdot}4832397$;
$y_2 = 1 - \frac{2}{5}\sqrt{55} = -1{\cdot}9664794$.
Die Sehne $= 2\sqrt{11} = 6{\cdot}6332496$.
Der senkrechte Abstand $P = \sqrt{5} = 2{\cdot}236068$.

18) $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{2}}{2}$; $y_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{2}}{2}$.
Die Länge der Sehne ist $2\sqrt{7}$; $P = \sqrt{2}$.

19) Der Kreis berührt die X-Achse im Punkte $x = 1$ und die Y-Achse im Punkte $y = 1$, mit der Geraden hat er die Punkte:
$x_1 = 0$, $y_1 = 1$; $x_2 = 1$, $y_2 = 0$ gemein.

20) Der geometrische Ort ist der Kreis $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$, die Gerade ist eine Sekante dieses Kreises;
$x_1 = 2$, $y_1 = 7$; $x_2 = -\frac{22}{29}$, $y_2 = \frac{3}{29}$.

21) Die Aufgabe ist identisch mit der: in welchen Punkten schneidet die Gerade $y = x + 3$ den Kreis $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 16$?
$x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{7})$; $y_{1,2} = \frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{7})$.

22) *a*) $(y+2)^2 + (x+1)^2 = 25$,
b) $(y + \frac{30}{14})^2 + (x + \frac{5}{14})^2 = (\frac{15}{14})^2$.

23) Der Mittelpunkt dieses Kreises mit dem Radius 4 hat die Koordinaten $x = -2$, $y = +3$.
$x = \frac{28 \pm \sqrt{-464}}{13}$, somit gibt es keinen Durchschnittspunkt.

24) Die Gerade schneidet den Kreis $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$ in den Punkten $x_1 = \frac{27}{5}$, $y_1 = \frac{26}{5}$; $x_2 = \frac{3}{5}$, $y_2 = -\frac{6}{5}$; die Sehne ist gleich 8, somit ein Durchmesser des Kreises.
$f = 4^4/_5$ Flächeneinheiten.

25) Die Kurve ist ein Kreis $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2$ und die Gerade ist eine Tangente im Punkte $x = 5$, $y = -1$.

26) Die Gleichung der Tangente ist $y = -\frac{4x}{3} + 7$
$\alpha = 126^\circ\, 52'\, 11{\cdot}64''$ $(126^\circ\, 52'\, 12'')$.

Digitized by Google

27) $x = \frac{3}{2}$, $y = \pm \frac{3}{2}\sqrt{3} = \pm 2{\cdot}598076$;
$y = \pm \frac{x}{3}\sqrt{3} \mp 2\sqrt{3}$.

28) Die Berührungspunkte haben die Koordinaten $x_1 = 4$, $y_1 = -3$, $x_2 = 3$, $y_2 = 4$; die Gleichungen der Tangenten sind
$y = -\frac{3x}{4} + \frac{25}{4}$, $y = \frac{4x}{3} - \frac{25}{3}$ und $v = 90^0$.

29$_a$) $x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}$, $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$; $y = -x + \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$.

29$_b$) $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4$; $y = 3$, $y = 2{\cdot}4x + 3$
$\operatorname{tg} \varphi = 2{\cdot}4$, $\varphi = 67^0\,22'\,48''$; $f = 4^3/_{13}$ Flächeneinheiten.

30) Die Gleichung der Geraden ist $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, die der Tangente
$y = -\frac{3x}{4} + \frac{25}{2}$;
$v = 116^0\,33'\,54{\cdot}18''$ $(116^0\,33'\,54'')$; $180^0 - v$.

31) $y = -nx + r\sqrt{1+n^2}$.

32) $(x-2)^2 + (y+\frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$;
$v = 73^0\,44'\,23{\cdot}28''$, $106^0\,15'\,36{\cdot}72''$ $(73^0\,44'\,23''$, $106^0\,15'\,37'')$.

33) $x_1 = 1$, $y_1 = -3$; $x_2 = \frac{49}{17}$, $y_2 = \frac{77}{17}$;
$y = -\frac{4x}{3} - \frac{5}{3}$, $y = \frac{36x}{77} + \frac{35}{11}$.
$X = -\frac{35}{13}$, $Y = \frac{25}{13}$, $v = 78^0\,11'\,15{\cdot}8''$ $(78^0\,11'\,16'')$.

34) $(x-11)^2 + (y+6)^2 = 10^2$; $X_1 = 3$, $X_2 = 19$.
Die Tangente im Punkte: $X_1 = 3$, $Y_1 = 0$ ist $y = \frac{4}{3}x - 4$.
Die Tangente im Punkte: $X_2 = 19$, $Y_2 = 0$ ist $y = -\frac{4}{3}x + \frac{76}{3}$.
$\alpha = 53^0\,7'\,48{\cdot}36''$ $(53^0\,7'\,48'')$.
$C = 1396{\cdot}2634$ Kubikeinheiten.

35) $v = 53^0\,7'\,48{\cdot}36''$ $(53^0\,7'\,48'')$.

36) Die vier Tangenten sind: $y = \pm \frac{x\sqrt{15}}{15} \pm \frac{4\sqrt{15}}{15}$,
$y = \mp \frac{3\sqrt{7}}{7}x \pm \frac{4\sqrt{7}}{7}$, wo gleichzeitig die oberen oder unteren Zeichen gelten; $v_1 = 14^0\,28'\,39''$ $(165^0\,31'\,21'')$;
$v_2 = 48^0\,35'\,25{\cdot}4''$ $(131^0\,24'\,34{\cdot}6'')$ $(48^0\,35'\,25''$, $131^0\,24'\,35'')$.

37) $y = \frac{4x}{3} - \frac{50}{3}$, $y = -\frac{3x}{4} + \frac{25}{2}$.

38) $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 25$. Die Tangentengleichung ist
$y = \frac{4-\xi}{\eta-6}x + \frac{4\xi + 6\eta - 27}{\eta - 6}$, wo

Digitized by Google

$\xi_1 = 4 - \frac{5}{2}\sqrt{2} = \xi_4 \qquad \xi_2 = 4 + \frac{5}{2}\sqrt{2} = \xi_3$

$\eta_1 = 6 + \frac{5}{2}\sqrt{2} = \eta_3 \qquad \eta_2 = 6 - \frac{5}{2}\sqrt{2} = \eta_4$ ist,

somit genügen vier Tangenten.

39) Der Fußpunkt des vom Mittelpunkte des Kreises auf die gegebene Gerade gefällten Perpendikels hat die Koordinaten $x = -3$, $y = 0$; die von diesem Punkte möglichen Tangenten sind $y = -\frac{7x}{24} - \frac{7}{8}$ und $x = -3$ und bei jeder derselben beträgt der Drehwinkel $36^0\ 52'\ 11{\cdot}64''$ ($36^0\ 52'\ 12''$).

40) Die eine Tangente ist $y = \frac{x\sqrt{15}}{15} + \frac{\sqrt{15}}{5}$, diese durchschneidet den zweiten Kreis in den Punkten $x_1 = \frac{9}{2}$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{15}$; $x_2 = \frac{21}{8}$, $y_2 = \frac{3\sqrt{15}}{8}$; der Flächeninhalt des kleineren Segmentes ist $0{\cdot}3263$ Flächeneinheiten.

41) $(x-1)^2 + y^2 = 5$.

42) $(x+6)^2 + y^2 = 169$, $(x - \frac{133}{6})^2 + y^2 = 169$.

43) $(x-\varrho)^2 + (y-\varrho)^2 = \varrho^2$, wo $\varrho = \frac{8-\sqrt{34}}{2} = 1{\cdot}084524$ oder $\varrho = \frac{8+\sqrt{34}}{2} = 6{\cdot}91547595$.

Die X-Achse im Punkte $x = \varrho$, die Y-Achse im Punkte $y = \varrho$, die Gerade im Punkte $x_1 = 2{\cdot}01449575$, $y_1 = 1{\cdot}64250708$ oder $x_2 = 0{\cdot}98550424$, $y_2 = 3{\cdot}35749293$.

44) Es entsprechen zwei Kreise $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ und $(x-13)^2 + (y-13)^2 = 169$, sonach als Tangenten an den ersten Kreis:

$$y = -\frac{4x}{3} + 20;\quad y = -\frac{4x}{3} + \frac{10}{3}$$

und an den zweiten Kreis:

$$y = -\frac{4x}{3} + 52,\quad y = -\frac{4x}{3} + \frac{26}{3}.$$

45) Sind p, q die Mittelpunktskoordinaten und r der Radius, so ist $p_1 = \frac{437}{49}$, $p_2 = 5$, $q_1 = \frac{171}{49}$, $q_2 = 3$, $r_1 = \frac{145}{49}$, $r_2 = 1$.

46) $(x-1)^2 + \left(y - \frac{15 \pm \sqrt{41}}{4}\right)^2 = 1$.

Der geometrische Ort des Kreismittelpunktes ist die zur Y-Achse parallele Gerade: $x = 1$ und die mit $y = -\frac{5x}{4} + 5$ im Abstande ± 1 parallele Gerade: $y = -\frac{5x}{4} + \frac{20 \pm \sqrt{41}}{4}$. Der eine Mittel-

Digitized by Google

punkt liegt in der Halbierenden des spitzen, der andere in der Halbierenden des stumpfen Winkels.

47) $(x-a)^2+(y-\beta)^2=\left(\frac{\beta-a\alpha}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2$

$(x-4)^2+(y-8)^2=(2\sqrt{2})^2$.

48) $(x-2{\cdot}2078)^2+(y-1{\cdot}2294)^2=1{\cdot}2294^2$

$(x-0{\cdot}2643)^2+(y-0{\cdot}7706)^2=0{\cdot}7706^2$.

49) $(x+1)^2+(y-2)^2=5^2$.

50) $(x-5)^2+(y-5)^2=25$.

51) Die Basis sei die Abszissenachse und die im Mittelpunkte der Basis errichtete Senkrechte die Ordinatenachse, so ist:

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{y}{x+a},\quad \operatorname{tg}\alpha_2=\frac{y}{x-a},\quad \operatorname{tg}\delta=\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2};$$

somit $x^2+(y-a\operatorname{cotg}\delta)^2=\left(\frac{a}{\sin\delta}\right)^2$, also ein Kreis;

$$x^2+(y-3\sqrt{3})^2=6^2.$$

52) Die Verbindungslinie AB sei die X-Achse, die im Mittelpunkte darauf errichtete Senkrechte die Y-Achse, so ist der Kreis:

$$x^2+y^2=\frac{b^2-2a^2}{2},$$

wo a den Abstand des Punktes A oder B vom Anfangspunkte und b^2 das gegebene Quadrat bedeutet, der geometrische Ort. Für $b<a\sqrt{2}$ genügt kein Punkt, für $b=a\sqrt{2}$ geht der Kreis in einen Punkt — Koordinatenanfangspunkt — über, für $b=2a$ ist $r=a$.

53) Liegt AB in der X-Achse und ist die im Punkte C darauf errichtete Senkrechte die Ordinatenachse, so sind die Gleichungen der drei Strahlen:

$$y=\frac{\eta}{\xi+m}x+\frac{m\eta}{\xi+m},\quad y=\frac{\eta}{\xi}x,\quad y=\frac{\eta}{\xi-n}x-\frac{n\eta}{\xi-n}.$$

Aus der Gleichsetzung der Winkel ergibt sich:

$$\eta^2+\xi^2-2\frac{mn}{m-n}\xi=0,\quad (\xi-6)^2+\eta^2=6^2.$$

54) Liegt $AB=2a$ in der Abszissenachse und ist die im Mittelpunkte von AB errichtete Senkrechte die Ordinatenachse, so ergibt sich als Gleichung des geometrischen Ortes:

$$\left(x-a\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{2amn}{m^2-n^2}\right)^2.$$

$$(x-\tfrac{41}{8})^2+y^2=(\tfrac{40}{8})^2.$$

55) $x^2+y^2-2\alpha(x+y)+\alpha^2=0$, wo $\alpha=9\pm\sqrt{60}$.

Erfolgt die Berührung des gegebenen Kreises von innen, so ist $\alpha=5\pm2$.

Digitized by Google

56) $(x-2)^2+(y-3)^2=4$, $f=12\cdot56637$ Flächeneinheiten.
$(x-74)^2+(y+21)^2=74^2$,
$f=17.203\cdot36135$ Flächeneinheiten.

57) $(x-\frac{1}{2})^2+(y\pm\sqrt{42})^2=(\frac{19}{2})^2$.

58) $(x-6)^2+(y-8)^2=49$.

59) $(x-11)^2+\left(y-\frac{171}{17}\right)^2=\left(\frac{84}{17}\right)^2$.

60) Die Seiten des Viereckes sind $8\cdot5$, $8\cdot5$, 5, 5.
$M=169\cdot646$ Flächeneinheiten, $C=175\cdot92919$ Kubikeinheiten.

§ 31. Die Ellipse.

1) *a*) Es ist die geometrische Bedeutung der Gleichung
$$9x^2+16y^2-36x-96y+36=0$$
anzugeben und das geometrische Gebilde zu zeichnen.
b) $x^2+9y^2+6x=0$.

2_a) Die Gleichung einer Ellipse ist:
$$\left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2=1.$$
Wie groß ist die Exzentrizität und der Parameter dieser Ellipse und wie lautet die Scheitelgleichung?

2_b) Welchen Winkel bilden im ersten Quadranten die Leitstrahlen der Ellipse
$$9x^2+25y^2=225$$
miteinander, wenn ihre Längendifferenz 4 ist?

3_a) Von welchem Punkte der Ellipse
$$4x^2+9y^2=36$$
sieht man die Exzentrizität der Ellipse unter einem rechten Winkel?

3_b) Wenn die doppelte Exzentrizität der Erdbahn $2e=5$ Millionen *km* und die große Achse derselben $2a=299$ Millionen *km* beträgt, um wie viel ist die Entfernung der Sonne von der Erde gewachsen, wenn sich die Erde um den Winkel 120° vom Perihel fortbewegt hat?

Ellipse und Gerade.

4) In einer Ellipse, deren Achsen 16 und 8 *cm* sind, wird durch einen der Scheitel der großen Achse eine Sehne unter dem Winkel von 45° gegen die große Achse gezogen; die Länge dieser Sehne soll berechnet werden.

5) Welche Kurve ist durch die Gleichung:
$$9x^2+4y^2-24y=0$$

Digitized by Google

ausgedrückt? Welche Lage hat dieselbe in bezug auf ein rechtwinkeliges Achsensystem? Wo liegen die Durchschnittspunkte dieser Kurve mit der Geraden:

$$2y + x = 3?$$

6) Es sind die Linien zu bestimmen, denen die Gleichungen:

$$9y^2 + 4x^2 - 18y - 24x + 9 = 0 \text{ und}$$
$$3y - 2x - 3 = 0$$

entsprechen. Die Linien sind zu konstruieren und die Koordinaten ihrer Durchschnittspunkte anzugeben.

7) Wie lauten die Gleichungen der Geraden, welche durch den Koordinatenanfangspunkt und durch die Brennpunkte der Ellipse

$$25x^2 + 9y^2 - 150x - 36y + 36 = 0$$

gehen, und welchen Winkel schließen die beiden Geraden miteinander ein?

Ellipse und Tangente.

8) Die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse ist:

$$16x^2 + 25y^2 = 400.$$

Die Gleichung einer auf dasselbe Koordinatensystem bezogenen Geraden ist:

$$3x + 5y = 25.$$

Man bestimme, welche Punkte die Ellipse mit dieser Geraden gemeinschaftlich hat.

9$_a$) An die Ellipse, deren Gleichung

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

ist, soll in einem Punkte, dessen Abszisse + 2 und dessen Ordinate positiv ist, eine Tangente gezogen und auf diese aus den beiden Brennpunkten Normale errichtet werden; wie lauten die Gleichungen der Normalen, und wie lang ist das zwischen den Normalen liegende Stück der Tangente?

9$_b$) Es ist die Gleichung des Kreises zu suchen, der mit der Ellipse $4x^2 + 9y^2 = 900$ konzentrisch ist und sie unter einem Winkel v schneidet, so daß $\operatorname{tg} v = \frac{2}{5}$ ist.

10) Eine Ellipse, deren Mittelpunkt im Koordinatenanfangspunkt liegt, ist gegeben durch die Tangente $8y + 3x = 50$ und durch den Berührungspunkt $x_1 = 6$, $y_1 = 4$. Die Gleichung der Ellipse ist zu suchen.

11) Es ist die Gleichung der Ellipse aufzustellen, welche ihre Achsen in den rechtwinkeligen Koordinatenachsen hat und die beiden Geraden $5y - 4x - 25 = 0$, $20y + 9x - 75 = 0$ als Tan-

Digitized by Google

genten besitzt. Auch sind die Koordinaten der Berührungspunkte anzugeben.

12) Die Gerade $3x + 5y = 50$ ist die Tangente einer Ellipse mit der Halbachse $a = 10$; man berechne die Gleichung der Ellipse und die Koordinaten des Berührungspunktes.

13) An die Ellipse

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

soll vom Punkte $x_1 = 0$, $y_1 = 4$ im ersten Quadranten eine Tangente gezogen werden; man bestimme die Koordinaten des Berührungspunktes, gebe die Gleichungen der Tangente und Normalen an und berechne die vier Berührungsgrößen.

14) Die Subnormale eines Punktes der Ellipse

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$$

hat die Länge 1; wie groß ist die Subtangente dieses Punktes?

15) Parallel zu $15x - 8y = 0$ sind Normalen zur Kurve $4x^2 + 25y^2 = 100$ gezogen; wie groß ist der Abstand derselben?

16) Unter welchem Winkel sieht man die Kurve $9x^2 + 16y^2 = 144$ vom Punkte $x_1 = 1$, $y_1 = 6$?

17) Die Gleichung einer Ellipse sei:

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1.$$

In einem der Brennpunkte werde eine Ordinate errichtet und durch den Endpunkt derselben eine Tangente zur Ellipse gezogen. Wie groß ist die Fläche des Dreieckes, das von dieser Tangente und den von ihr getroffenen Koordinatenhalbachsen gebildet wird?

18) In dem nach der positiven Richtung hin gelegenen Brennpunkte einer Ellipse:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

denke man sich eine Ordinate errichtet, durch den Endpunkt derselben zur Ellipse eine Tangente gezogen und dann von den Brennpunkten auf die Tangente Perpendikel gefällt. Wie groß sind diese und wie groß ist ihr Produkt?

19) Durch den auf der positiven Seite der Abszissenachse gelegenen Brennpunkt einer Ellipse:

$$16x^2 + 25y^2 = 400$$

wird eine Sehne gezogen, welche die kleine Halbachse auf der negativen Seite der Ordinaten halbiert. Man suche die Gleichung der Sehne und der zu ihr parallel gezogenen Tangenten, dann die Gleichung der im Berührungspunkte auf der Tangente errichteten Normalen und erläutere das Ganze durch eine Zeichnung.

Digitized by Google

20$_a$) An die Ellipse $4x^2 + 9y^2 = 36$
wird eine Tangente gelegt, welche von den positiven Koordinatenachsen gleiche Stücke abschneidet; wie lautet die Gleichung der Tangente, und wo liegt der Berührungspunkt?

20$_b$) An die Ellipse $16x^2 + 25y^2 = 400$
soll eine Tangente gelegt werden, welche mit den positiven Koordinatenachsen eine Fläche von $20^5/_6$ Flächeneinheiten einschließt; wie lautet die Tangente?

21) Durch den auf der negativen Seite der Abszissenachse gelegenen Brennpunkt der Ellipse
$$25y^2 + 16x^2 = 400$$
wird eine Sehne gezogen, welche mit der positiven Richtung der Abszissenachse den Winkel von 30° bildet; man suche die Gleichung dieser Sehne und die Gleichungen der mit ihr parallelen Tangenten.

22) Die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse sei:
$$25y^2 + 9x^2 = 225;$$
die Tangente in einem Punkte dieser Ellipse schließe mit dem zu diesem Punkte gezogenen Vektor den Winkel von 45° ein. Die Koordinaten des Berührungspunktes, die Gleichung und die Länge der Tangente soll berechnet werden.

23) Bei einer Ellipse, deren Mittelpunktsgleichung:
$$9y^2 + 4x^2 = 36$$
gegeben ist, schließt die Tangente mit dem Vektor den Winkel von 60° ein. Wie groß sind die Koordinaten des Berührungspunktes und wie groß ist diese Tangente?

24) Die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse ist:
$$16x^2 + 25y^2 = 400$$
und die Gleichung einer Tangente derselben:
$$y = -\tfrac{3}{5}x + 5.$$
Man berechne den Winkel, welchen die zu dem Berührungspunkte gezogenen Leitstrahlen miteinander einschließen und die Koordinaten des Berührungspunktes.

25) Gegeben seien eine Ellipse und eine Gerade durch
$$9x^2 + 25y^2 = 225, \quad x + y = b;$$
welchen Wert muß b annehmen, damit die Gerade die Ellipse tangiere?

26) Man bestimme die Gleichungen jener Tangenten an
$$x^2 + 4x + 2y^2 = 44,$$
welche mit $y = -\frac{1}{2}x$ parallel sind.

Digitized by Google

27a) Um die Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ist ein gleichseitiges Dreieck beschrieben, und zwar ist eine Seite des Dreieckes parallel zur X-Achse; wie groß ist die Fläche des Dreieckes?

27b) Wie groß ist die Fläche des der Ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

umgeschriebenen Quadrates.

28) Sind m_1 und m_2 die Perpendikel von den Brennpunkten einer Ellipse auf eine zum Berührungspunkte $x_1\ y_1$ gezogene Tangente, so ist mit Hilfe der analytischen Geometrie nachzuweisen, daß $m_1\ m_2 = b^2$, wo b die halbe kleine Achse der Ellipse bedeutet.

29) Es ist zu beweisen, daß der Fußpunkt der Normalen von irgend einem Brennpunkte auf die Tangente in einem Punkte M der Ellipse:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

vom Mittelpunkte die Entfernung der halben großen Achse hat.

30) Durch den Brennpunkt der Ellipse:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

wird eine zur großen Achse normale Sehne gezogen und zu einem Endpunkte derselben die Tangente und Normale errichtet, von dem andern Brennpunkte aus werden auf diese beiden Geraden Perpendikel gefällt; wie groß ist die Fläche des so entstandenen Viereckes?

31) Eine Ellipse sei durch ihre Mittelpunktsgleichung:

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^2 = 1$$

gegeben. Man bestimme die Koordinaten $x_1\ y_1$ des Berührungspunktes jener Ellipsentangente, welche die Verlängerung der großen Achse in dem vom nächsten Scheitel um die halbe große Achse entfernten Punkte trifft, stelle für jenen Berührungspunkt die Gleichungen der Tangente und Normalen auf und berechne die Fläche des Dreieckes, welches von diesen zwei Linien und der Abszissenachse gebildet wird.

32) Eine Ellipse mit den Halbachsen:

$$a = 5,\quad b = 3,$$

deren Mittelpunkt mit dem Anfangspunkte und deren Achsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen, ist gegeben. Von einem Punkte M mit den Koordinaten:

$$x = -1,\quad y = 4^1/_5$$

sollen die beiden Tangenten an die Ellipse gezogen werden; es sind die Gleichungen dieser Tangenten, die Koordinaten der Berührungspunkte und die Gleichung der Berührungssehne zu suchen.

Digitized by Google

33) Es ist der geometrische Ort aller Punkte zu finden, von denen aus zwei an die Ellipse gezogene Tangenten einen rechten Winkel bilden.

34) Es ist der geometrische Ort der Fußpunkte der Normalen, die von einem Brennpunkte der Ellipse an die Tangenten gezogen werden, zu bestimmen.

35) Es ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise zu suchen, welche die beiden Kreise

$$x^2 + y^2 = 36 \text{ und } (x-2)^2 + y^2 = 4 \text{ berühren.}$$

36) In einer Ellipse, deren Halbachsen:

$$a = 8,\ b = 5$$

sind, wird die Länge der gleichen konjugierten Durchmesser und der Winkel, welche dieselben einschließen, gesucht.

37) In den Durchschnittspunkten des Kreises:

$$x^2 + y^2 = 16$$

und der Ellipse:

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

sollen an jede Kurve Tangenten errichtet und der Winkel, den diese Tangenten miteinander einschließen, berechnet werden.

38) In den Durchschnittspunkten des Kreises und der Ellipse

$$x^2 + y^2 = 97$$

$$\left(\frac{x}{15}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$$

sollen an jede Kurve Tangenten errichtet und deren Winkel mit der X-Achse berechnet werden.

39) Wie lautet die Gleichung der den beiden Kurven

$$x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + 9y^2 = 9$$

gemeinschaftlichen Tangenten?

40) An die beiden Kurven

$$81x^2 + 400y^2 = 3600 \text{ und } 16x^2 + 25y^2 = 400$$

sind die gemeinsamen Tangenten zu ziehen und die Berührungspunkte sind zu bestimmen.

41) Über der großen Achse der Ellipse:

$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

wird ein Kreis beschrieben und an beide Kurven vom Punkte

$$x_1 = -7,\ y_1 = 0$$

Tangenten gezogen; der Winkel, den die beiden Tangenten miteinander einschließen, ist der Scheitelwinkel eines gleichschenkeligen Dreieckes mit den Schenkeln gleich 1; wie groß ist die Basis dieses Dreieckes?

Digitized by Google

42) Die Gleichungen einer Ellipse und eines Kreises seien gegeben:

$$9x^2 + 25y^2 = 225$$
$$x^2 + y^2 - 8x = -12.$$

In den Durchschnittspunkten beider werden an die Ellipse und den Kreis Tangenten gezogen, wie groß ist die Fläche des Viereckes, das von den Tangenten eingeschlossen wird?

43$_a$) Der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ist das größte Rechteck einzuschreiben. Wie groß ist dasselbe?

43$_b$) Einer Ellipse mit den Halbachsen a und b ist ein Rhombus von kleinster Fläche umgeschrieben. Es sind die Koordinaten der Berührungspunkte und die Fläche des Rhombus anzugeben.

44) Auf den Achsen eines rechtwinkeligen Koordinatensystems gleite eine Gerade von bestimmter Länge so, daß ihre Endpunkte beständig auf den Achsen bleiben. Es ist die Kurve analytisch zu bestimmen, welche ein in der gleitenden Geraden liegender Punkt beschreibt.

45) Welche Bahn beschreibt ein Punkt, der sich in der Ebene eines orthogonalen Achsensystems so bewegt, daß er von der Geraden:

$$x + y = \sqrt{2}$$

stets zweimal so weit absteht als von dem Punkte:

$$x = y = \sqrt{2}?$$

46) Eine Ellipse ist durch $f = 50\pi$ und durch eine Tangente $3x + 8y = 50$ gegeben, es ist die Gleichung der Ellipse aufzustellen.

47) Wie groß ist das vom Parameter und dem Bogen einer Ellipse begrenzte Segment, wenn die Gleichung der Ellipse:

$$16x^2 + 25y^2 = 400 \text{ ist?}$$

48) Wie groß ist das Ellipsensegment von

$$4x^2 + 9y^2 = 36,$$

wenn die Sehne den Abstand $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ vom Koordinatenanfangspunkt hat?

49) Die Gleichung einer Ellipse ist $x^2 + 4y^2 = 16$; wie groß ist jener Ellipsenausschnitt, dessen Sehne auf der großen Achse normal steht und von ihr ein Stück 2 abschneidet?

50) Der dritte Teil der größeren Wurzel von

$$\sqrt[3]{(x-3)^2} = 4\,(3 + \sqrt[3]{x-3})$$

gibt die große Halbachse einer Ellipse, deren lineare Exzentrizität $e = 48$ ist; wie groß ist der Durchmesser der Basis jenes gleichseitigen Kegels, dessen Mantelfläche gleich dem Flächeninhalte der Ellipse ist?

Digitized by Google

§ 31a.

1) *a*) $9(x-2)^2+16(y-3)^2=144$ stellt die Gleichung einer Ellipse vor, die ihren Mittelpunkt im ersten Quadranten hat, ($\xi=2$, $\eta=3$), mit den Halbachsen 4 und 3;
b) ist die Scheitelgleichung einer Ellipse, welche ihren Mittelpunkt auf der negativen Abszissenachse im Abstande 3 hat.

2$_a$) $e=4$, $\varepsilon=\frac{4}{5}$, $2p=\frac{18}{5}$, $y^2=\pm\frac{18x}{5}-\frac{9x^2}{25}$;

2$_b$) $\operatorname{tg} v=4\sqrt{3}$, $v=81^\circ\,47'\,13''$.

3$_a$) $x=\pm\frac{3}{5}\sqrt{5}$, $y=\pm\frac{4}{5}\sqrt{5}$.

3$_b$) 3·75 Millionen *km*.

4) $D=\frac{16}{5}\sqrt{2}$.

5) Die Ellipse hat ihren Mittelpunkt in der Ordinatenachse in der Entfernung + 3 vom Anfangspunkte der Koordinaten.
$x_1=-1{\cdot}970329$, $x_2=1{\cdot}370329$,
$y_1=2{\cdot}485165$, $y_2=0{\cdot}814835$.

6) $9(y-1)^2+4(x-3)^2=36$;
$x_1=0$, $y_1=1$; $x_2=3$, $y_2=3$.

7) $y=2x$, $y=-\frac{2x}{3}$; $97^\circ\,7'\,30{\cdot}06''$ ($97^\circ\,7'\,30''$).

8) Die Gerade ist eine Tangente der Ellipse im Punkte:
$$x=3,\quad y=\tfrac{16}{5}.$$

9$_a$) $y=\frac{3\sqrt{5}}{4}x\pm\frac{15}{4}$; $D=3{\cdot}841106$.

9$_b$) $x^2+y^2=180$, $x^2+y^2=145$.

10) $25x^2+100y^2=2500$.

11) $9x^2+25y^2=225$.
Die eine Tangente hat die Berührungskoordinaten $\eta=\frac{9}{5}$, $\xi=-4$, die andere $\eta=\frac{12}{5}$, $\xi=3$.

12) $100y^2+64x^2=6400$, $x_1=6$, $y_1=\frac{32}{5}$.

13) $x_1=\frac{3}{2}\sqrt{3}$, $y_1=1$; $y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+4\,(T)$; $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{5}{4}(N)$,
$T=\frac{1}{2}\sqrt{7}$, $S_t=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $N=\frac{1}{3}\sqrt{21}$, $S_n=\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

14) Die Länge der Subtangente ist 12.

15) Der Abstand der beiden parallelen Normalen beträgt $5\frac{79}{85}$.

16) $\operatorname{tg} v=+\frac{7}{2}$.

Digitized by Google

17) Die vier möglichen Tangenten sind:
$y = -\frac{4}{5}x + 5$, $y = \frac{4}{5}x - 5$, $y = \frac{4x}{5} + 5$, $y = -\frac{4x}{5} - 5$
und bei allen ist die Fläche $15\frac{5}{8}$ Flächeneinheiten.

18) $P_1 = \frac{a^2+e^2}{\sqrt{a^2+e^2}}$, $P_2 = \frac{a^2-e^2}{\sqrt{a^2+e^2}}$, $P_1 P_2 = b^2$.

19) Die Sehne $y = \frac{2x}{3} - 2$.
Die Tangierungen erfolgen in den Punkten:
$x = \pm\frac{25}{61}\sqrt{61} = \pm 3{\cdot}200922$, $y = \mp\frac{24}{61}\sqrt{61} = \mp 3{\cdot}072885$.
Die Tangenten sind $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\sqrt{61}$; $y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\sqrt{61}$.
Die Normalen sind:
$y = -\frac{3x}{2} + \frac{27}{122}\sqrt{61}$, $y = -\frac{3x}{2} - \frac{27}{122}\sqrt{61}$.

20$_a$) $y = -x + \sqrt{13}$, $x_1 = \frac{9}{13}\sqrt{13}$, $y_1 = \frac{4}{13}\sqrt{13}$.

20$_b$) $16x + 15y = 100$, $3x + 5y = 25$.

21) $y = \frac{x}{3}\sqrt{3} + \sqrt{3}\,(S)$; $y = \frac{x}{3}\sqrt{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{219}\,(T)$.

22) $\eta_{1,2} = \frac{9}{4}$, $\xi_{1,2} = \pm\frac{5}{4}\sqrt{7}$, $\eta_{3,4} = -\frac{9}{4}$, $\xi_{3,4} = \pm\frac{5}{4}\sqrt{7}$.
$y = \pm\frac{x}{5}\sqrt{7} \pm 4$, $T = \frac{9}{7}\sqrt{14}$.

23) $X = \pm 2{\cdot}569047$, $Y = \pm 1{\cdot}032796$,
$T = 1{\cdot}392621$ (vier Berührungspunkte, vier Tangenten).

24) Die Linie ist eine Tangente im Punkte: $x = 3$, $y = 3\frac{1}{5}$.
$61^0\,55'\,39''$ ($61^0\,55'\,38''$).

25) $b = \pm\sqrt{34}$.

26) $y = -\frac{1}{2}x + 5$, $y = -\frac{1}{2}x - 7$.

27$_a$) $f = \frac{\sqrt{3}}{3}(3a^2 + 2b^2 + 2b\sqrt{3a^2 + b^2})$.

27$_b$) $f = 2(a^2 + b^2)$.

28) Die Perpendikel sind $\frac{a^2b^2 - b^2x_1e}{\sqrt{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}}$ und $\frac{a^2b^2 + b^2x_1e}{\sqrt{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}}$.
$m_1 m_2 = \frac{a^4b^4 - b^4x_1^2e^2}{a^4y_1^2 + b^4x_1^2} = \frac{b^2(a^4b^2 - a^2b^2x_1^2 + b^4x_1^2)}{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}$
$= \frac{b^2(a^4y_1^2 + b^4x_1^2)}{a^4y_1^2 + b^4x_1^2} = b^2$.

29) Hat der Punkt M die Koordinaten ξ, η, so ist die Tangente $y = -\frac{b^2\xi}{a^2\eta}x + \frac{b^2}{\eta}$ und die vom Brennpunkte (e, o) darauf errichtete Normale $y = \frac{a^2\eta}{b^2\xi}x - \frac{a^2\eta}{b^2\xi}e$.

Digitized by Google

Die Koordinaten des Schnittpunktes beider sind:
$x_1 = \frac{a^2[b^4\xi + a^2\eta^2 e]}{a^4\eta^2 + b^4\xi^2}$, $y_1 = \frac{a^2b^2\eta\,[a^2 - \xi e]}{a^4\eta^2 + b^4\xi^2}$ und
$D = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = a.$

30) $F = \frac{2a^2 - b^2}{a}\sqrt{a^2 - b^2}.$

31) Die Berührung erfolgt in den Punkten:
$x = \frac{3}{2}$, $y = \pm\sqrt{3}$; $x = -\frac{3}{2}$, $y = \pm\sqrt{3}$, daher sind die vier Tangenten:
$y = \pm\frac{2\sqrt{3}}{9}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$; $y = \pm\frac{2\sqrt{3}}{9}x - \frac{4\sqrt{3}}{3}$; und die vier Normalen:
$y = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}x - \frac{5\sqrt{3}}{4}$; $y = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}x + \frac{5}{4}\sqrt{3}.$
Die Länge der Tangente: 4·8218254, der Normalen: 1·8559215, die Fläche: 4·4744646.

32) Die Berührung erfolgt in den Punkten:
$x_1 = 3$, $y_1 = \frac{12}{5}$; $x_2 = -4$, $y_2 = \frac{9}{5}$.
Die Tangenten sind:
$20y + 9x = 75$, $5y - 4x = 25$.
Die Sehne ist: $y = \frac{3x}{35} + \frac{15}{7}$.

33) Sind x_1 y_1 die Koordinaten eines Punktes des geometrischen Ortes, so ergibt sich $x_1^2 + y_1^2 = a^2 + b^2$.

34) Sind x_1, y_1 die Koordinaten eines Punktes des geometrischen Ortes, so $x_1^2 + y_1^2 = a^2$.

35) $\frac{(\xi - 1)^2}{16} + \frac{\eta^2}{15} = 1.$

36) Die Gleichungen der konjugierten Durchmesser sind $y = mx$, $y = -\frac{b^2x}{a^2m}$, die Längen der Durchmesser:
$2ab\sqrt{\frac{1 + m^2}{a^2m^2 + b^2}}$ und $2\sqrt{\frac{a^4m^2 + b^4}{a^2m^2 + b^2}}$, daraus folgt:
$m = \frac{b}{a}$, $D = \sqrt{2\,(a^2 + b^2)} = \sqrt{178} = 13{\cdot}3416641$;
$v = 64^\circ\,0'\,38{\cdot}8''$, $115^\circ\,59'\,21{\cdot}2''$ ($64^\circ\,0'\,40''$, $115^\circ\,59'\,20''$).

37) Die vier Tangenten der Ellipse sind ($x = \pm\frac{5}{4}\sqrt{7}$, $y = \pm\frac{9}{4}$):
$y = -\frac{x}{5}\sqrt{7} \pm 4$, $y = \frac{x}{5}\sqrt{7} \pm 4.$
Die vier Tangenten des Kreises sind:
$y = -\frac{5\sqrt{7}}{9}x \pm \frac{64}{9}$, $y = \frac{5\sqrt{7}}{9}x \pm \frac{64}{9}$; $\operatorname{tg} v = \frac{1}{5}\sqrt{7}$,
daher $v = 27^\circ\,53'\,8''$.

Digitized by Google

38) Die Berührung erfolgt in den Punkten $x = \pm 9$, $y = \pm 4$.
Die vier Tangenten an die Ellipse sind: $y = \pm \frac{x}{4} \pm \frac{25}{4}$,
an den Kreis: $y = \pm \frac{9}{4} x \pm \frac{97}{4}$.
Die Winkel der Ellipsentangente: $14^\circ\, 2'\, 10{\cdot}5''$, $165^\circ\, 57'\, 49{\cdot}5''$ ($14^\circ\, 2'\, 10''$, $165^\circ\, 57'\, 50''$),
der Kreistangente: $66^\circ\, 2'\, 15{\cdot}04''$, $113^\circ\, 57'\, 44{\cdot}96''$ ($66^\circ\, 2'\, 15''$, $113^\circ\, 57'\, 45''$).

39) $y = \pm \frac{x}{5} \sqrt{15} \pm \frac{4}{5} \sqrt{10}$.

40) Die gemeinsamen Tangenten sind $y = \pm \frac{3}{5} x \pm 5$; die Koordinaten der Berührungspunkte sind ($x = \pm 5\frac{1}{3}$, $y = \pm 1\frac{4}{5}$), ($x = \pm 3$, $y = \pm 3\frac{1}{5}$).

41) Die Tangenten an den Kreis sind:
$y = \frac{5\sqrt{6}}{12} x + \frac{35\sqrt{6}}{12}$, $y = -\frac{5\sqrt{6}}{12} x - \frac{35\sqrt{6}}{12}$,
an die Ellipse $y = \frac{x}{4} \sqrt{6} + \frac{7\sqrt{6}}{4}$, $y = -\frac{x}{4} \sqrt{6} - \frac{7\sqrt{6}}{4}$
$14^\circ\, 6'\, 9''$; $S = 0{\cdot}245515$.

42) Die Koordinaten der Schnittpunkte sind $x = \frac{15}{4}$, $y = \pm \frac{3}{4} \sqrt{7}$.
Die Tangenten sind $y = \mp \frac{9\sqrt{7}}{35} x \pm \frac{12}{7} \sqrt{7}$;
$y = \pm \frac{\sqrt{7}}{21} x \pm \frac{4\sqrt{7}}{7}$; $f = 37{\cdot}04052$ Flächeneinheiten.

43$_a$) $x = \frac{a}{2} \sqrt{2}$, $y = \frac{b}{2} \sqrt{2}$, $f = 2ab$.

43$_b$) Die Koordinaten der Berührungspunkte sind $x = \pm \frac{a}{2} \sqrt{2}$,
$y = \pm \frac{b}{2} \sqrt{2}$ und die Fläche des Rhombus ist $F = 4ab$.

44) Eine Ellipse mit den Achsen: $2a$, $2b$.

45) Behält man das gegebene Achsensystem bei, so erhält man:
$\xi^2 - \frac{2}{7} \xi\eta + \eta^2 - 2\xi \sqrt{2} - 2\eta \sqrt{2} + \frac{30}{7} = 0$,
somit die Gleichung einer Ellipse, da $4AC - B^2$ positiv ist.
Nimmt man die gegebene Linie als Ordinatenachse und die durch den Punkt $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$ darauf senkrecht gezogene Linie als Abszissenachse, so hat der gegebene Punkt die Koordinaten $x_1 = 1$, $y_1 = 0$ und man erhält:

$$\frac{\left(x - \frac{4}{3}\right)^2}{\frac{4}{9}} + \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1.$$

Digitized by Google

46) $\frac{225}{16}x^2 + \frac{1600}{9}y^2 = 2500$; $25x^2 + 100y^2 = 2500$.

47) $f = 8{\cdot}945868$ Flächeneinheiten.

48) $f = \frac{3}{2}(\pi - 2)$.

49) $f = \frac{8\pi}{3}$.

50) $r = 44{\cdot}8051$, $d = 89{\cdot}6102$.

§ 32. Die Hyperbel.

1) Es soll die Gleichung:
$$16x^2 - 25y^2 + 64x - 336 = 0$$
auf das orthogonale Achsensystem bezogen, konstruiert werden.

2) In welchen Punkten wird die durch die Gleichung:
$$9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 29 = 0$$
gegebene Kurve von der Geraden $x + y = 2$ geschnitten? Die Kurve und die Gerade sind zu konstruieren.

3) An die Hyperbel:
$$9x^2 - 16y^2 = 144$$
werden vom Punkte:
$$x_1 = 8,\ y_1 = 5\tfrac{1}{4}$$
die beiden Tangenten gezogen. Wie heißen die Gleichungen derselben und der Berührungssehne und wie lang ist die letztere?

4) An die Hyperbel $4x^2 - 9y^2 = 36$ sollen Tangenten gezogen werden, die mit $9y = 4\sqrt{3}x + 18$ parallel sind.

5) Eine Hyperbelasymptote sei $y = 2x$ und eine Hyperbeltangente $y = x - 3$; wie lautet die Gleichung der Hyperbel?

6) Die Gleichungen einer Hyperbel und einer Geraden sind:
$$y^2 - 2y - 2\tfrac{1}{4}x^2 = 8,\ 9y = -10x + 9;$$
man bestimme die Gleichungen jener Tangenten der Hyperbel, welche auf der gegebenen Geraden senkrecht stehen.

7) Es sei der Winkel α gegeben, welchen eine Tangente einer Hyperbel mit der Hauptachse bildet; man bestimme die Koordinaten des Berührungspunktes.
Speziell $a = 6{\cdot}5$, $b = 6$, $\alpha = 45^0$.

8) Vom Punkte $x = 3$, $y = 0$ ist an die Hyperbel:
$$x^2 - y^2 = 25$$
im ersten Quadranten eine Tangente zu ziehen und für den Berührungspunkt sind die vier Berührungsgrößen zu berechnen.

Digitized by Google

9) Eine Hyperbel ist durch die Asymptote $y = \frac{5x}{12}$ und durch $e = 13$ gegeben; es ist die Gleichung der Tangente im Endpunkte des Parameters aufzustellen.

10) Von einer Hyperbel kennt man eine Tangente $y = \frac{15x}{16} - \frac{9}{4}$ und die Exzentrizität $e = 5$; es sind die in den Endpunkten des Parameters errichteten Tangenten zu bestimmen und es ist die Fläche zu berechnen, welche von den letzteren Tangenten und dem Parameter begrenzt wird.

11) $y = \frac{5x}{6} - \frac{16}{5}$ sei im Punkte $x_1 = 10$, $y_1 = 3$ eine Tangente an die Hyperbel, wie lautet die Hyperbelgleichung?

12) Durch den Punkt $\xi = 12$, $\eta = 3$ soll zur Hyperbel $9x^2 - 16y^2 = 144$ eine Sehne so gelegt werden, daß sie im Punkte $\xi\eta$ halbiert wird. Wie lautet die Gleichung der Sehne?

13) Es ist der geometrische Ort des Durchschnittspunktes der Normalen aus einem Brennpunkte der Hyperbel

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

auf der in irgend einem Punkte errichteten Tangente mit der vom Zentrum nach dem Berührungspunkte gezogenen Geraden zu bestimmen.

14) Die Halbachsen einer Hyperbel seien a, b; unter welchem Winkel schneiden sich Hyperbel und Kreis, wenn ihre Mittelpunkte zusammenfallen und wenn der Durchmesser des letzteren der Nebenachse der ersteren gleich ist?

$$(a : b = 3 : 5).$$

15) Es ist die Gleichung jenes aus einem Punkte der Geraden $x = 1$ beschriebenen Kreises zu suchen, welcher die durch die Gleichung:

$$L = 9x^2 - 4y^2 + 72x + 135 = 0$$

gegebene Kurve in einem ihrer Schnittpunkte mit der Linie:

$$10^{x-1} = \sqrt[2y]{100^{xy-2}}$$

derart berührt, daß der Kreis und die Kurve L auf entgegengesetzten Seiten ihrer gemeinsamen Tangente liegen.

16) Es sei ein Kreis und ein außerhalb desselben liegender Punkt gegeben. Man soll die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises finden, welcher durch den gegebenen Punkt geht und den gegebenen Kreis von außen berührt.

17) Es ist der geometrische Ort zu suchen für die Fußpunkte der Normalen, die von einem Brennpunkte der Hyperbel an die Tangenten gezogen werden.

Digitized by Google

18) Der geometrische Ort der Spitzen aller Dreiecke ist zu bestimmen, welche dieselbe Grundlinie $2a$ haben, und bei denen die Differenz der beiden Scheitelseiten die konstante Größe $2d$ ist.

19) Es ist der geometrische Ort der Mittelpunkte jener Kreise zu suchen, welche die beiden Kreise:
$\alpha)$ $x^2 + y^2 = 9$, $(x-5)^2 + y^2 = 4$
$\beta)$ $x^2 + y^2 = 16$, $(x-5)^2 + y^2 = 1$
von außen berühren.

20) Auf einer Schießstätte ist die Scheibe $2a$ Meter vom Stande entfernt. Die Geschwindigkeit des Schalles ist c, jene der Gewehrkugel γ, und zwar ist γ größer als c. Es ist der geometrische Ort des Punktes in der Ebene der Schießstätte zu suchen, in dem man den Knall des Gewehres und das Aufschlagen der Kugel auf der Scheibe gleichzeitig vernimmt.

21) Das von den Asymptoten und einer Tangente der Hyperbel $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ gebildete Dreieck hat die Größe $f = ab$. Man erweise diese Behauptung.

22) Der zwischen den Asymptoten liegende Teil der Hyperbeltangente wird im Berührungspunkt halbiert. Man erweise diese Behauptung.

23) In jenen Punkten der Hyperbel $9x^2 - 16y^2 = 144$, in denen die Leitstrahlen aufeinander senkrecht stehen, werden an die Kurve Tangenten gelegt; wie groß ist der von denselben begrenzte Rhombus?

24) An die Kurve $8x^2 = 21y^2 + 11$ sind parallel zu $3y = 4x$ Sehnen zu ziehen, deren Länge 5 ist. Wie lauten die Gleichungen dieser Sehnen, welches sind die Koordinaten ihrer Endpunkte und welchen Flächeninhalt hat jenes Parallelogramm, dessen Gegenseiten diese beiden Sehnen sind?

§ 32a.

1) Eine Hyperbel: $16(x+2)^2 - 25y^2 = 400$.

2) $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$; $x_1 = 1$, $y_1 = 1$;
$x_2 = -\frac{19}{5}$, $y_2 = \frac{29}{5}$.

3) Die Tangenten sind: $16y = 13x - 20$, $16y = 15x - 36$,
die Sehne $7y = 6x - 12$, $D = \frac{8}{15}\sqrt{85}$.

4) $y = \frac{4\sqrt{3}}{9}x \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

5) $3y^2 - 12x^2 = 36$.

6) $y = \frac{9x}{10} + \frac{17}{5}$, $y = \frac{9x}{10} - \frac{7}{5}$.

Digitized by Google

7) $\xi = \pm \frac{a^2 \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - b^2}} = \pm 16{\cdot}9$, $\eta = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - b^2}} = \pm 14{\cdot}4$.

8) $y = \frac{5}{4}x - \frac{15}{4}$.

$T = \frac{4}{3}\sqrt{41}$, $S_t = \frac{16}{3}$, $N = \frac{5}{3}\sqrt{41}$, $S_n = \frac{25}{3}$.

9) $y = \frac{13x}{12} - 12$.

10) $y = \frac{5x}{4} - 4$, $y = -\frac{5x}{4} + 4$; $F = 4\frac{1}{20}$.

11) $x^2 - 4y^2 = 64$.

12) $y = \frac{9}{4}x - 24$.

13) Die zur Y-Achse parallele Gerade $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

14) Die Tangenten im Schnittpunkte:

$x_1 = \sqrt{\frac{2a^2b^2}{b^2+a^2}}$, $y_1 = b\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}}$ sind

$y = -x\sqrt{\frac{2a^2}{b^2-a^2}} + b\sqrt{\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}}$;

$y = \frac{bx}{a}\sqrt{\frac{2b^2}{b^2-a^2}} - b\sqrt{\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}}$.

$\operatorname{tg} v = \sqrt{\frac{2(b^2-a^2)}{a^2}}$; $v = 62^0\,3'\,41{\cdot}74''$ $(62^0\,3'\,42'')$.

15) Die Gerade $y = 2$ schneidet die Hyperbel:

$$\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 (x+4)^2 - y^2 = \left(\tfrac{3}{2}\right)^2$$

in den Punkten:

$$x_1 = -\tfrac{7}{8},\quad x_2 = -\tfrac{17}{8}.$$

Hier entspricht nur der Punkt x_2. Die Tangente für diesen Punkt ist $y = -\frac{15x}{8} - \frac{69}{8}$.

$$(x-1)^2 + (y - \tfrac{50}{9})^2 = \left(\tfrac{68}{9}\right)^2.$$

16) Ist die Verbindungslinie des gegebenen Punktes mit dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises $= 2a$ und liegt dieselbe in der Abszissenachse, die im Mittelpunkte dieser Verbindungslinie errichtete Senkrechte sei die Ordinatenachse, so ist, wenn ξ, η die Koordinaten des Mittelpunktes des gesuchten Kreises sind:

$$\varrho^2 = (\xi + a)^2 + \eta^2;\quad (\varrho + r)^2 = (\xi - a)^2 + \eta^2.$$

$$\xi^2(16a^2 - 4r^2) - 4r^2\eta^2 = 4a^2r^2 - r^4 \text{ oder:}$$

$$\frac{\xi^2}{\frac{r^2}{4}} - \frac{\eta^2}{a^2 - \frac{r^2}{4}} = 1.$$

Für $a > \frac{r}{2}$ ist der geometrische Ort eine Hyperbel.

Digitized by Google

Für $a = \frac{r}{2}$ ist $\eta = 0$ die Gleichung der Abszissenachse.

Für $a < \frac{r}{2}$ stellt obige Gleichung eine Ellipse vor.

17) Sind ξ, η die Koordinaten des geom. Ortes, so $\xi^2 + \eta^2 = a^2$.

18) Die Grundlinie $2a$ liege in der Abszissenachse und die in der Mitte von $2a$ errichtete Normale sei die Ordinatenachse

$$\sqrt{(a+\xi)^2+\eta^2} - \sqrt{(a-\xi)^2+\eta^2} = 2d \text{ und daraus}$$

$$\left(\frac{\xi}{d}\right)^2 - \left(\frac{\eta}{\sqrt{a^2-d^2}}\right)^2 = 1.$$

19) Sind ξ und η die Koordinaten des Mittelpunktes des gesuchten Kreises, so ergibt sich bei der Aufgabe α aus

$$\xi^2 + \eta^2 = (3+\varrho)^2,\ (\xi-5)^2 + \eta^2 = (2+\varrho)^2$$

und bei der Aufgabe β aus

$$\xi^2 + \eta^2 = (4+\varrho)^2,\ (\xi-5)^2 + \eta^2 = (1+\varrho)^2$$

durch Elimination von ϱ das erstemal

$$24\xi^2 - 120\xi - \eta^2 + 144 = 0 \text{ oder}$$

$$24\left(\xi - \tfrac{5}{2}\right)^2 - \eta^2 = 6$$

und das zweitemal

$$16\xi^2 - 80\xi - 9\eta^2 + 64 = 0 \text{ oder}$$

$$16\left(\xi - \tfrac{5}{2}\right)^2 - 9\eta^2 = 36,$$

somit in beiden Fällen die Gleichung einer Hyperbel.

20) $2a$ sei in der X-Achse und die in der Mitte von $2a$ errichtete Normale sei die Y-Achse. Die Zeit des Schalles vom Stand bis zum gesuchten Punkt muß gleich sein der Zeit der Kugel vom Stand bis zur Scheibe, vermehrt um die Zeit des Schalles von der Scheibe zum gesuchten Punkt.

$$x^2\left[\frac{a^2(\gamma^2-c^2)}{\gamma^2}\right] - y^2\left[\frac{a^2c^2}{\gamma^2}\right] = \frac{a^4c^2(\gamma^2-c^2)}{\gamma^4}.$$

23) $F = \frac{100}{17}\sqrt{34}$.

24) $y = \frac{4x}{3} \pm \frac{11}{3}$; $x_1 = -2$, $x_2 = -5$; $x_3 = 5$, $x_4 = 2$,

$y_1 = 1$, $y_2 = -3$; $y_3 = 3$, $y_4 = -1$.

$F = 22$ Flächeneinheiten.

§ 33. Die Parabel.

1) Ein Punkt der Parabel:

$$y^2 = 3x$$

hat die Ordinate:

$$y_1 = 6;$$

Digitized by Google

wie heißt die Gleichung der Geraden, welche die Parabel in diesem Punkte berührt? Welchen Winkel bildet sie mit der Abszissenachse?

2) Die Gleichung einer Parabeltangente ist:

$$y = 2 \cdot 5x + 1$$

wie lautet die Gleichung der Parabel?

3) Unweit einer Eisenbahn, welche einen parabolischen Bogen beschreibt, dessen Gleichung

$$y^2 = 150x$$

ist, läuft eine gerade Straße, deren Richtung durch $y = 5x + 40$ gegeben ist. Welcher Punkt der Eisenbahn liegt der Straße am nächsten und wie weit ist er von der letzten entfernt? (Längeneinheit = 1 *km*.)

4) Es sei die Gleichung einer Parabel:

$$y^2 = 3x$$

und ein Punkt M habe die Koordinaten:

$a)$ $x = +2$, $y = +3$, $b)$ $x = -2$, $y = +3$

man soll von M zur gegebenen Parabel Tangenten ziehen. Wie viele sind möglich und wie lauten die Gleichungen der möglichen Tangenten?

5) Eine Parabel hat die Gleichung:

$$y^2 - 20x - 8y + 16 = 0$$

und ein Punkt M_1 die Koordinaten:

$$x_1 = -3 \cdot 3, \; y_1 = 1 \cdot 5.$$

Es sind die Gleichungen der Tangenten durch M_1 an die Parabel und die Koordinaten der Berührungspunkte anzugeben.

6) In dem Punkte, dessen Abszisse 32 ist, zieht man an die Parabel

$$y^2 = 8x$$

eine Tangente und fällt vom Brennpunkte aus auf dieselbe eine Normale. Wie groß ist die Fläche des Dreieckes, das von dieser Tangente, Normalen und dem Radiusvektor zum Berührungspunkte begrenzt wird?

7$_a$) Wie heißen die Gleichungen der Tangenten, welche vom Punkte $x = -3$, $y = 1$ an die Parabel:

$$y^2 = 6x$$

gezogen werden können? Wie lang ist die Berührungssehne und welchen Winkel bildet sie mit der X-Achse?

7$_b$) An $y^2 = 6x$ sind Tangenten zu ziehen, welche vom Scheitelpunkte den Abstand 4 haben; wie lauten sie?

8) Von einem Orte, h Meter über dem Horizonte, bewegt sich ein Körper so, daß er in horizontaler Richtung eine gleichförmige

Digitized by Google

Geschwindigkeit von c und in vertikaler Richtung eine Beschleunigung von g Meter hat. Welche Bahn durchläuft der Körper? Nach welcher Zeit und in welcher horizontalen Entfernung trifft der Körper wieder in der Horizontalebene ein? Welche Richtung hat der Körper im Momente t_1?
Speziell $c = 600\,m$, $h = 20\,m$, $g = 9{\cdot}808\,m$, $t_1 = 1$ Sekunde.

9) Die Tangenten, welche man von einem Punkte der Leitlinie an die Parabel zieht, stehen aufeinander senkrecht. Man erweise diese Behauptung auf analytischem Wege.

10) Es ist der geometrische Ort aller Punkte zu suchen, von denen aus die zwei an die Parabel gezogenen Tangenten rechte Winkel bilden.

11) Man bestimme den geometrischen Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, die eine gegebene Gerade berühren und durch einen außerhalb der Geraden liegenden Punkt gehen.

12) Es ist der geometrische Ort der Spitzen aller Dreiecke zu suchen, welche dieselbe Grundlinie haben und bei denen der Abstand der Spitze von dem einen Endpunkte der Grundlinie gleich ist dem Abstande der Spitze von einer gegebenen Geraden.

13) Es ist die Gleichung für den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise abzuleiten, welche einen Halbkreis und den dazu gehörigen Durchmesser von der Größe $2p$ berühren.

14$_a$) Wie groß ist die Fläche des Dreieckes, das begrenzt wird von der X-Achse und den beiden Tangenten, die an

$$x^2 + 4x + y^2 = 9 \text{ und } y^2 = 4x$$

in einem Schnittpunkte gezogen werden?

14$_b$) Es ist der Winkel zu berechnen, unter welchem sich die Kurven:

$$x^2 + y^2 = 25, \quad y^2 = \tfrac{16}{3}x$$

schneiden.

15) In welchen Punkten und unter welchen Winkeln schneiden sich die Parabel und der Kreis:

$$y^2 = 2px, \quad \left(x - \tfrac{p}{2}\right)^2 + y^2 = p^2?$$

16) Die Gleichung eines Kreises ist:

$$x^2 + y^2 = 25,$$

durch den Punkt: $x_1 = 3$, $y_1 = 4$
geht eine Parabel, deren Scheitel im Mittelpunkte des Kreises liegt. Wie groß ist die von den beiden Bogen eingeschlossene Figur? Wie groß ist der Parameter der Parabel? Wie lauten die Tangenten an dem gemeinschaftlichen Punkte?

Digitized by Google

17) Zwei Kurven seien durch die Gleichungen

$$y^2 = \tfrac{9}{2}x,\ x^2 + 2x + y^2 = 17$$

gegeben, man berechne das kleinere zwischen denselben liegende Flächenstück, konstruiere und berechne die in den Durchschnittspunkten zu den Kurven gehörigen Tangenten.

18) An die Parabel:

$$y^2 = 4x$$

soll im Punkte:

$$x = 2\tfrac{1}{4}$$

eine Tangente errichtet werden, welche gleichzeitig in demselben Punkte die Tangente eines Kreises ist, der seinen Mittelpunkt in der positiven X-Achse hat. Wie lautet die Gleichung der gemeinschaftlichen Tangente und wie die Gleichung des Kreises?

19) Welche Kurven werden durch die Gleichungen

$$36x^2 = 2916 - 81x^2,\ y^2 - 8x = 0$$

dargestellt? Schneiden sich diese Kurven oder nicht? Im bejahenden Falle: wie groß ist die gemeinschaftliche Sehne und wie groß die Fläche, die von dieser Sehne und der zweiten Kurve begrenzt wird?

20) Eine Ellipse sei durch die Gleichung:

$$\left(\tfrac{x}{5}\right)^2 + \left(\tfrac{y}{4}\right)^2 = 1$$

gegeben; es sind die Koordinaten des Durchschnittspunktes mit einer Parabel zu berechnen, welche ihren Scheitel im Mittelpunkte der Ellipse hat, und deren Brennpunkt mit jenem Brennpunkte der Ellipse zusammenfällt, welcher auf der positiven Seite der Abszissenachse liegt; ferner ist zu bestimmen, unter welchem Winkel sich die beiden Kurven schneiden.

21) In den Schnittpunkten der Geraden und der Parabel:

$$x + y = 3,\ y^2 = 4x$$

werden Tangenten an die Parabel errichtet. Es ist der Flächeninhalt des Dreieckes zu bestimmen, welches von der gegebenen Geraden und den beiden Tangenten eingeschlossen ist.

22) An die Parabel:

$$y^2 = 8x$$

zieht man im Punkte:

$$x_1 = 2,\ y_1 = ?$$

eine Tangente; es ist das von der Ordinatenachse, dieser Tangente und dem zugehörigen Parabelbogen begrenzte Flächenstück zu berechnen.

Digitized by Google

23) Eine Gerade und eine Parabel schneiden sich:

$$a)\ 3y = 5x + 5,\quad y^2 = 20x$$

$$b)\ y = \frac{x}{2} + 1,\quad y^2 = 10x.$$

Es ist der Flächeninhalt des Segmentes der Parabel zu bestimmen.

24) Es ist die Gleichung der Sekante anzugeben, welche durch den Brennpunkt der Parabel $y^2 = 2px$ und einen Punkt der Leitlinie mit der Ordinate $\frac{3p}{4}$ geht; ferner sind die Koordinaten der Durchschnittspunkte uud der Flächeninhalt des Parabelsegmentes zu berechnen. Speziell $p = 2$.

25) Bei der Arrondierung wird von einem Acker, dessen Grenzlinie, soweit sie hier in Betracht kommt, ein parabolischer Bogen ist, ein Stück durch eine Gerade abgeschnitten, welche durch zwei, den Koordinaten $x_1 = 2{\cdot}4$, $y_1 = 12$; $x_2 = 0{\cdot}3375$, $y_2 = -4{\cdot}5$ entsprechende Punkte der Parabel geht. Wie lautet die Gleichung der Parabel, und wie groß ist das abgeschnittene Ackerstück? (Längeneinheit 1 *m*.)

26) Der Brennpunkt einer Parabel ist von der Leitlinie $2{\cdot}5$ Längeneinheiten entfernt; wie groß ist die Tangente, Subtangente, Normale, Subnormale, welche sich auf einen Punkt der Parabel, dessen Ordinate 5 ist, beziehen, wenn der Anfangspunkt der Koordinaten im Scheitel der Parabel und der Brennpunkt auf der positiven X-Achse liegt? Wie groß ist die Fläche des Segmentes, welches von der durch den Berührungspunkt der Tangente und den Brennpunkt gehenden Sekante abgeschnitten wird?

27) Ein gleichseitiges Dreieck hat einen Eckpunkt im Scheitel der Parabel, eine Seite a liegt auf der Achse und der gegenüberliegende Eckpunkt in der Kurve. Wie groß ist der Parameter der Parabel und die Fläche, welche zwischen der Kurve und den beiden Seiten des Dreieckes liegt, die nicht Sehnen sind? Beispiel: $a = 19{\cdot}3456$ *m*.

28$_a$) Man soll die Kurve $y^2 = 12x$ zeichnen, durch die Endpunkte der im Brennpunkte auf der Achse senkrechten Sehne Tangenten ziehen, den Durchschnittspunkt beider Tangenten bestimmen und die von ihnen und dem parabolischen Bogen eingeschlossene Figur berechnen.

28$_b$) Vom Punkte $x' = 3$, $y' = 5$ sollen an die Parabel $y^2 = 3x$ Tangenten gezogen werden. In den Tangierungspunkten sind Normale zu errichten und es ist der Inhalt der von den beiden

Digitized by Google

Normalen und dem Parabelbogen begrenzten Fläche zu bestimmen.

29) Wie groß ist die von der Parabel und dem Kreise

$$y^2 = 2x,\ (x-1)^2 + y^2 = 9$$

eingeschlossene Fläche?

30) Im Punkte $x = 4,\ y = 0$ wird ein Kreis errichtet, welcher

$$y = \frac{2x}{3}$$

derart in zwei Punkten berührt, daß er innerhalb der beiden Parabeläste liegt. Wo erfolgt die Berührung? Wie lautet die Gleichung des Kreises? Wie groß ist das von der Parabel und der Berührungssehne eingeschlossene Flächenstück?

31) Wie groß sind die beiden Flächenteile, in welche die Ellipse

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

durch die Parabel

$$y^2 = \frac{3x}{2}$$

zerlegt wird?

32) Die Gleichung einer Hyperbel lautet:

$$4x^2 - 9y^2 = 36.$$

Zwischen den Asymptoten wird auf der Seite der positiven x durch eine Doppelordinate ein gleichschenkeliges Dreieck abgeschnitten, welches 600 Quadratzentimeter Fläche hat. In einer Parabel, welche durch die Gleichung:

$$y^2 = 30x$$

bestimmt ist, wird für dieselbe Abszisse, welche in dem früheren Asymptotendreiecke als Höhe auftrat, durch eine Doppelordinate ein parabolisches Segment abgeschnitten, dessen Fläche zu berechnen ist.

33) Wenn die von den Linien:

$$2y^2 - 9x = 0,\ 4y + 7x - 4b = 0$$

begrenzte Fläche gleich 8 ist, wie groß ist dann b?

34) Durch den Scheitel der Parabel

$$y^2 = 2px$$

ist eine Sekante zu ziehen, welche die Parabel unter dem größten Winkel schneidet. Wie groß ist dieses Maximum?

Digitized by Google

§ 33a.

1) $y = \frac{1}{4}x + 3$; $\alpha = 14^0\,2'\,10{\cdot}48''$ $(14^0\,2'\,10'')$.

2) $y^2 = 10x$. 3) $6{\cdot}3738\ km$.

4) Es sind zwei Tangenten möglich.

a) $y = \frac{3 \mp \sqrt{3}}{4}x + \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$.

b) $y = -\frac{3 \mp \sqrt{15}}{4}x + \frac{3 \pm \sqrt{15}}{2}$.

5) Die Parabel ist $(y-4)^2 = 20x$;

$x_1 = \frac{9}{5}$, $y_1 = 10$; $x_2 = \frac{121}{20}$, $y_2 = -7$.

$y = \frac{5x}{3} + 7$; $y = -\frac{10x}{11} - \frac{3}{2}$.

6) Die Eckpunkte des Dreieckes sind:
(0, 8), (2, 0), (32, 16), daher $f = 136$.

7a) $y = -\frac{1 \mp \sqrt{19}}{6}x + \frac{1 \pm \sqrt{19}}{2}$.

$D = \frac{2}{3}\sqrt{190}$, $71^0\,33'\,54{\cdot}2''$ $(71^0\,33'\,54'')$.

7b) $y = \frac{x}{4}\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$, $y = -\frac{x}{4}\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$.

8) Die Parabel $y^2 = \frac{2c^2}{g}x = 73409{\cdot}462x$,

$Y = c\sqrt{\frac{2h}{g}} = 1211{\cdot}69\ m$, $T = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2{\cdot}0195$ Sekunden.

$\varphi = \text{arc tg}\left(\frac{c}{g\,t_1}\right) = 89^0\,3'\,48{\cdot}56''$ $(89^0\,3'\,48{\cdot}5'')$.

9) Ein Punkt der Leitlinie habe $x_1\ y_1$ zu Koordinaten und die Tangierung erfolge im Punkte ξ, η, so muß:
$y\eta = p\,(x + \xi)$ sein, daher $y_1\,\eta = p\,(x_1 + \xi)$ und $\eta^2 = 2p\xi$;
aus den beiden letzteren Gleichungen folgt:

$\eta = y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 2px_1}$ und da für die Leitlinie $x_1 = -\frac{p}{2}$, so

$\eta = y_1 \pm \sqrt{y_1^2 + p^2}$, und

$y(y_1 + \sqrt{y_1^2+p^2}) = px + p\xi_1$, $y(y_1 - \sqrt{y_1^2+p^2}) = px + p\xi_2$;

$\text{tg}\,\alpha_1 = \frac{p}{y_1 + \sqrt{y_1^2+p^2}}$, $\text{tg}\,\alpha_2 = \frac{p}{y_1 - \sqrt{y_1^2+p^2}}$, $\text{tg}\,\alpha_1\,\text{tg}\,\alpha_2 = -1$.

$\text{tg}\,v = \frac{\text{tg}\,\alpha_2 - \text{tg}\,\alpha_1}{1 + \text{tg}\,\alpha_1\,\text{tg}\,\alpha_2} = \infty$ oder $v = 90^0$.

10) Die Leitlinie ist der geometrische Ort.

11) Ist d der Abstand des gegebenen Punktes von der gegebenen Geraden, und nimmt man die Gerade als Y-Achse, den Abstand d in der X-Achse an, so erhält man $y^2 = 2d\left(x - \frac{d}{2}\right)$.

Digitized by Google

Ist der Mittelpunkt von d der Koordinatenanfangspunkt, so $y^2 = 2dx$.

12) Legt man die Grundlinie in die positive Abszissenachse vom Anfangspunkte an, so ist

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{\eta - a\xi - b}{\sqrt{1+a^2}}, \text{ somit}$$

$$\xi^2 + 2a\eta\xi + a^2\eta^2 - 2ab\xi + 2b\eta - b^2 = 0$$

und da $B^2 - 4AC = 0$, so ist der geometrische Ort eine Parabel. Oder zieht man vom Endpunkte der Grundlinie auf die gegebene Gerade ein Perpendikel, nimmt dieses als Abszissenachse und die Gerade als Ordinatenachse an, so

$$\xi = \sqrt{\eta^2 + (d - \xi)^2} \quad \eta^2 = 2d\left(\xi - \frac{d}{2}\right).$$

13) Nimmt man den Durchmesser als Ordinatenachse und die im Mittelpunkte darauf errichtete Senkrechte als Abszissenachse, so ist die Gleichung des geometrischen Ortes: $\eta^2 = 2p\left(\frac{p}{2} - \xi\right)$; ändert man die Richtung der X-Achse, so $\eta^2 = 2p\left(\xi - \frac{p}{2}\right)$, somit die Gleichung einer Parabel, die ihren Brennpunkt im Mittelpunkte des gegebenen Kreises hat, und deren Parameter gleich dem gegebenen Durchmesser ist.

14$_a$) $f = \frac{10}{3}$.

14$_b$) Der Kreis und die Parabel schneiden sich in den Punkten: $x = 3$, $y = \pm 4$. Die Tangenten sind:

$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$ uud $y = \frac{2}{3}x + 2$ oder

$y = \frac{3}{4}x - \frac{25}{4}$, $y = -\frac{2x}{3} - 2$.

$v = 70^0\,33'\,35{\cdot}9''$ oder $180^0 - v$ $(70^0\,33'\,36'')$.

15) $x = \frac{p}{2}$, $y = \pm p$; die Tangenten sind:

$y = x + \frac{p}{2}$, $y = -x - \frac{p}{2}$.

$y = +p$, $y = -p$; $v = 45^0$, $v_1 = 135^0$.

16) $\frac{16}{3}$; $y = \mp\frac{3}{4}x \pm \frac{25}{4}$, $y = \pm\frac{2}{3}x \pm 2$;
$f = 27{\cdot}18238$ $(27{\cdot}182)$ Flächeneinheiten.

17) $x = 2$, $y = \pm 3$; die Tangenten an die Parabel sind
$y = \frac{3x}{4} + \frac{3}{2}$, $y = -\frac{3x}{4} - \frac{3}{2}$;

Digitized by Google

Die Tangenten an den Kreis $(x+1)^2+y^2=18$ sind:
$y=-x+5$, $y=x-5$;
$f=13\cdot137167$ Flächeneinheiten.

18) $y=\frac{2x}{3}+\frac{5}{2}$; $(x-4\frac{1}{4})^2+y^2=13$.

19) $S=10\cdot922157$;
$F=27\cdot144637$ Flächeneinheiten.

20) Die Parabel: $y^2=12x$.
$x=1\cdot25$; $y=\pm\sqrt{15}=\pm3\cdot8729833$.
Die Tangenten sind: $y=\pm\frac{4\sqrt{15}}{75}x\mp\frac{16\sqrt{15}}{15}$;
$y=\pm\frac{2\sqrt{15}}{5}x\pm\frac{1}{2}\sqrt{15}$.
$v_1=68^0\,49'\,43\cdot3''$ $(68^0\,49'\,44'')$,
$v_2=111^0\,10'\,16\cdot7''$ $(111^0\,10'\,16'')$.

21) Die Tangenten sind: $y=x+1$ und $y=-\frac{x}{3}-3$, $f=32$.

22) Die Tangenten sind: $y=x+2$. $y=-x-2$; eine kleine Fläche $\frac{2}{3}$, beide zusammen $\frac{4}{3}$.

23) *a)* $f=4\frac{4}{15}$, *b)* $95\cdot405568$ Flächeneinheiten.
Allgemein $f=\frac{1}{6}(x_2y_2-x_1y_1)+\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)=\frac{1}{12p}(y_2-y_1)^3$.

24) $y=-\frac{3x}{4}+\frac{3p}{8}=-\frac{3x}{4}+\frac{3}{4}$;
$x_1=\frac{p}{18}$, $y_1=\frac{p}{3}$, $x_2=\frac{9p}{2}$, $y_2=-3p$;
$f=3\frac{7}{18}p^2=12\frac{28}{81}$ Flächeneinheiten.

25) $y^2=60x$; $f=12\cdot478125\ m^2$.

26) $y^2=5x$, $y=\frac{x}{2}+\frac{5}{2}$ (T), $y=-2x+15$ (N).
$T=5\sqrt{5}$, $S_t=10$, $N=\frac{5}{2}\sqrt{5}$, $S_n=2\cdot5$;
Sekante: $y=\frac{4x}{3}-\frac{5}{3}$; $f=8\frac{58}{384}$ Flächeneinheiten.

27) Sind x und y die Koordinaten des Eckpunktes in der Kurve, so muß $y^2=2px$ sein, und da y die Höhe ist, so
$x=\frac{a}{2}$, $y=\frac{a}{2}\sqrt{3}$, $2p=\frac{3a}{2}=29\cdot0184\ m$;
$f=\frac{7a^2\sqrt{3}}{24}=189\cdot0652\ m^2$ $(189\cdot07)$.

28a) $x=-3$, $y=0$; $f=12$ Flächeneinheiten.

28b) $f=434\frac{4}{9}$ Flächeneinheiten.

Digitized by Google

29) $f = 12 \cdot 85938$ Flächeneinheiten.

30) $x = \frac{11}{3}$, $y = \pm 1 \cdot 5634719$;
$(x-4)^2 + y^2 = \frac{23}{9}$;
$f = 7 \cdot 6436406$ Flächeneinheiten.

31) $\frac{8\pi}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} = 9 \cdot 53228$ und $\frac{16\pi}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} = 15 \cdot 60046$ Flächeneinheiten.

32) $f = 1200\ cm^2$.

33) $b = \frac{20}{7}$.

34) $\operatorname{tg} v = \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

Digitized by Google

AUFLÖSUNGEN

ZU DEN

MATURITÄTSFRAGEN AUS DER MATHEMATIK.

ZUM GEBRAUCHE

FÜR DIE

OBERSTEN KLASSEN DER GYMNASIEN UND REALSCHULEN

ZUSAMMENGESTELLT

VON

Dr. FRANZ WALLENTIN,

K. K. REGIERUNGSRAT, REALSCHUL-DIREKTOR i. R.

FÜNFTE AUFLAGE.

WIEN 1906.

VERLAG VON KARL GEROLDS SOHN.

I., BARBARAGASSE 2.

Digitized by Google

BUCHDRUCKEREI CARL GEROLD'S SOHN IN WIEN.

Digitized by Google

P-21-27 4 RJ

Berichtigung.

Es soll

Seite 26, Z. 13 v. o., $\frac{2^{\frac{1}{x}}}{3}$ statt $\frac{5^{\frac{1}{x}}}{3}$,

„ 57, „ 14 v. o., $= -1$ statt $= 1$,

„ 128, „ 1 v. o., $\frac{s - s_1}{1 - s_1}$ statt $\frac{s - s_1}{s - s_1}$,

„ 128, „ 6 v. u., $\frac{2R^2 H \sqrt{2}}{3}$ statt $\frac{2R^2 H \sqrt{2}}{2}$,

„ 130, „ 11 v. u., $\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$ statt $\sqrt{\frac{4}{3}}$,

„ 189, „ 7 v. o., $\frac{416}{87}$ statt $\frac{116}{87}$,

„ 210, „ 5 v. u., $\frac{a^2}{\sqrt{a^4 \eta^2 + b^4 \xi^2}}$ statt $\frac{a^2}{a^4 \eta^2 + b^4 \xi^2}$,

„ 217, „ 9 v. u., $-\frac{2}{7} \xi \eta + \eta^2$ statt $+\frac{2}{7} \xi \eta - \eta^2$,

„ 221, „ 11 v. o., $4^1/_{20}$ statt $7 \cdot 2$

stehen.

Digitized by Google

Digitized by Google

Vorwort.

Einem von vielen und beachtenswerten Seiten geäußerten Wunsche entspricht der Unterzeichnete mit der Herausgabe dieses Buches, dem die zweite Auflage der „Maturitätsfragen“ zugrunde gelegt ist.

Es soll dem Schüler nur ein Führer beim Rechnen sein, nicht aber dessen geistige Tätigkeit überflüssig machen. Aus dem Grunde bringt es von den einzelnen Lösungen nur so viel, als zur genaueren Orientierung über den Gang der Rechnung notwendig ist. In den Fällen, daß Aufgaben mehrere Lösungen zulassen, wurden meistens nur jene aufgenommen, welche der Fassungskraft der Schüler am nächsten liegen und sich am besten dem regelmäßigen Gange anschließen.

Mit Rücksicht auf die Bestimmung der „Maturitätsfragen“ wurde es auch unterlassen, an einzelne Aufgaben weitergehende theoretische Erörterungen anzuknüpfen.

Zum Schlusse fühlt sich der Verfasser verpflichtet, der Verlagshandlung für die nette Ausstattung des Buches seinen besten Dank auszusprechen.

Wien, im Juli 1886.

Dieser Ausgabe der „Auflösungen“ ist die achte Auflage der „Maturitätsfragen“ *) zugrunde gelegt.

Wien, im August 1906.

Dr. Franz Wallentin.

---

*) Maturitätsfragen aus der Mathematik, achte Auflage. Wien, Karl Gerolds Sohn, 1905.

Digitized by Google

Digitized by Google

Inhalt.

I. Abschnitt.

Arithmetik.

Seite

§ 1—2. Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten 1
§ 3—4. Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten . . . 3
§ 5—6. Gleichungen des zweiten Grades mit einer Unbekannten 8
§ 7—8. Gleichungen des zweiten Grades mit mehreren Unbekannten . . . 17
§ 9. Unbestimmte Gleichungen 29
§ 10. Arithmetische Progressionen 32
§ 11. Geometrische Progressionen 35
§ 12. Zinseszinsen- und Rentenrechnung 41
§ 13. Kombinationslehre und binomischer Lehrsatz 54
§ 14. Wurzeln und Logarithmen 58

II. Abschnitt.

Geometrie.

Planimetrie.

§ 15. Konstruktionsaufgaben 60
§ 16. Regelmäßige Polygone 64
§ 17. Rechnungsaufgaben aus der Planimetrie 66

Trigonometrie.

§ 18. Goniometrie und goniometrische Gleichungen 67
§ 19. Rechtwinkliges Dreieck 74
§ 20. Schiefwinkliges Dreieck 81
§ 21. Viereck 107
§ 22. Sphärische Trigonometrie 113

Digitized by Google

Stereometrie.

Seite

§ 23. Prisma 122
§ 24. Zylinder 125
§ 25. Pyramide 128
§ 26. Kegel 133
§ 27. Kugel 148
§ 28. Regelmäßige Körper 165

Analytische Geometrie.

§ 29. Gerade Linie 170
§ 30. Kreis 182
§ 31. Ellipse 200
§ 32. Hyperbel 218
§ 33. Parabel 225

Digitized by Google

I. Abschnitt.

Arithmetik.

§. 1. Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten.

1) $^8/_3 + \frac{25}{3(3x-8)} + \frac{112x+96x^2}{49} + \frac{49+576x^3}{49(7-6x)} = 0.$

$\frac{24x-39}{3(3x-8)} + \frac{49+784x}{49(7-6x)} = 0, \quad \frac{8x-13}{3x-8} + \frac{1+16x}{7-6x} = 0,$

$x = 11.$

2) $\frac{6x-16}{9x^2} + \frac{72x^2+162x^3+27x^4+128}{9x^2(8+3x)} = 3+x,$

$\frac{10+18x+3x^2}{8+3x} = 3+x; \; x = 14.$

3) $x = {}^{55}/_{19}.$ 4) $\sqrt{x} = {}^{35}/_{12}, \quad x = {}^{1225}/_{144}.$

5) $\sqrt{x-7} + \sqrt{x-2} = \sqrt{x-10} + \sqrt{x+5}$

$\sqrt{x^2-9x+14} = 2 + \sqrt{x^2-5x-50}; \; x = 11.$

6) $x = -{}^{11593}/_{2184}.$

7) $a^{x-3} + 1 = b a^{x-1} - b; \; \frac{a^x}{a^3} - \frac{a^x b}{a} = -(b+1),$

$a^x \frac{1-a^2 b}{a^3} = -(b+1); \; a^x = \frac{a^3(b+1)}{a^2 b - 1}; \; x = \log\left[\frac{a^3(b+1)}{a^2 b-1}\right] : \log a.$

8) $a^x \cdot a^b + b^x \cdot b^a = c b^x, \; \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{c-b^a}{a^b}; \; x = \log\left(\frac{c-b^a}{a^b}\right) : \log\left(\frac{a}{b}\right).$

9) $4^x \cdot 16 + 2^x \cdot 16 = 2^x \cdot 24.$

$4^x \cdot 16 = 2^x \cdot 8, \quad ({}^4/_2)^x = {}^1/_2, \quad 2^x = {}^1/_2; \quad x = -1.$

10) $({}^2/_3)^2 \cdot ({}^3/_4)^3 \, ({}^2/_3 \cdot {}^3/_4)^{\frac{1}{x}} = ({}^4/_5)^4 \, ({}^4/_5)^{\frac{1}{x}}$

$({}^8/_5)^{\frac{1}{x}} = {}^4/_9 \cdot {}^{27}/_{64} : {}^{256}/_{625} = {}^{1875}/_{4096};$

$\frac{1}{x}(\log 8 - \log 5) = \log 1875 - \log 4096$

$x = \frac{\log 8 - \log 5}{\log 1875 - \log 4096} = -0{\cdot}60149.$

Digitized by Google

11) $^1/_3 . {}^4/_9 \, (^2/_3)^{\frac{1}{x}} . {}^{27}/_{64} . (^3/_4)^{\frac{1}{x}} = \frac{5^5}{2^5 . 4^5} . \frac{4^4}{5^4} . (^4/_5)^{\frac{1}{x}}$;

$(^1/_2)^{\frac{1}{x}} = {}^5/_8 . (^4/_5)^{\frac{1}{x}}$; $(^5/_8)^{\frac{1}{x}} = {}^5/_8$, $x = 1$.

12) $3 . 4^x + 27 . 9^x = 24 . 4^x - {}^9/_2 \, 9^x$.

$^{63}/_2 . 9^x = 21 . 4^x$, $(^9/_4)^x = {}^3/_2 = (^3/_2)^{2x} = (^2/_3)^{-2x}$; $x = -\,^1/_2$.

13) $3 . 3^{2x} - {}^1/_4 \, 2^{3x} = 25 . 3^{2x} - 25 . 2^{3x}$; $(^9/_8)^x = {}^9/_8$; $x = 1$.

14) $3 . 3^{4x} - \frac{2^{3x}}{32} = \frac{2^{3x}}{2} - 3^{4x}$

$4 . 3^{4x} = {}^{17}/_{32} . 2^{3x}$, $\left(\frac{3^4}{2^5}\right)^x = {}^{17}/_{128} = (^{81}/_8)^x$, $x = -\,0{\cdot}87205$.

15) $\frac{4^{2x}}{16} - \frac{5^{2x}}{5} = \frac{4^{3x}}{36} - \frac{5^{2x}}{9}$; $x = 1$.

16) $3^x + 3 . 3^x + 9 . 3^x + 27 . 3^x = 4^x + 4 . 4^x + 16 . 4^x$.

$40 . 3^x = 21 . 4^x$, $(^4/_3)^x = {}^{40}/_{21}$, $x = 2{\cdot}239824$.

17) $31 . 5^x = 13 . 3^x$, $x = -\,1{\cdot}701242$.

18) $x = 1$.

19) $\sqrt[5]{x-2} . \sqrt[6]{x-2} = \frac{\sqrt[6]{11} . \sqrt[10]{0{\cdot}82791} . \sqrt[4]{0{\cdot}023} . \sqrt[3]{2{\cdot}7}}{\sqrt[8]{0{\cdot}2} . \sqrt[8]{7}} = \sqrt[30]{(x-2)^{11}}$.

Nun ist der Log. des Bruches zu bestimmen, derselbe ist $0{\cdot}9673693 - 1$, daher $^{11}/_{30} \log (x-2) = 0{\cdot}9673693 - 1$.
$\log (x-2) = 0{\cdot}9110072 - 1$, $x - 2 = 0{\cdot}814718$, $x = 2{\cdot}814718$.

20) Da $10^{\log (2x)} = 2^{\log (2x)} . 5^{\log (2x)}$ ist, so geht die gegebene Gleichung über in

$5^{\log x} + 2 . 5^{\log (2x)} = 5^{\log x} + 2 . 5^{\log 2} . 5^{\log x} = 25$ und
$5^{\log x} (1 + 2 . 5^{\log 2}) = 25$; $5^{\log x} = 5{\cdot}88694$.
$x = 10^{1{\cdot}101463} = 12{\cdot}6317$.

21) Mit Beachtung desselben Umstandes wie in Nr. 20 erhält man
$5^{\log x} + 2^{-\log 2x} . 2^{\log 2x} . 5^{\log 2x} = 5^{\log x} + 5^{\log 2x} = 25$.
$5^{\log x} (1 + 5^{\log 2}) = 25$, $x = 10^{1{\cdot}4007584} = 25{\cdot}1625$.

22) $(3x-10) \log 2 + (x+2) \log 3 - 3 (x-4) \log 2 - (7-x) \log 2 - (7-x) \log 3 = 2 (x-2) \log 3 - \log 3$.

$(x-5) \log 2 = 0$. $x = 5$,

oder $\frac{2^{3x-10} \, 3^{x+2}}{2^{3x-12} \, 27^{-x} . 37^{-x}} = {}^1/_3 . 3^{2x-4}$; $2^{x-5} = 1$, $x = 5$.

23) $\log (x+2)(x+3) = \log x (x-1)$, da $\log a + \log b = \log ab$.
$(x+2)(x+3) = x (x-1)$. $x = -\,1$.

Digitized by Google

24) $3 \log (x-1) = 2 \log (x+1) + \log (x-5)$.
$(x-1)^3 = (x+1)^2 (x-5)$, $x = -{}^1/_3$.

25) Setzt man $3^{4x} + 1 = y$, so ist $\sqrt{y} + \sqrt{y+1} = 5$ aufzulösen.
$y = {}^{144}/_{25}$, $3^{4x} = {}^{119}/_{25}$, $x = 0{\cdot}35505$.

§ 2.

1) $x - \left(\frac{x}{2} + 30\right) - \left[{}^1/_2\, x - {}^1/_2 \left(\frac{x}{2} + 30\right) + 30\right] = 20$.
$x = 260$; das erstemal 160, das zweitemal 80 Hektoliter.

2) A legt in der Sekunde x, B aber $(x + {}^2/_3)$ Meter zurück, A bewegt sich 12, B aber 10 Minuten, daher
$720x + 160 = 600\,(x + {}^2/_3)$; $x = 2\ m$; $x + {}^2/_3 = 2{}^2/_3\ m$.

3) N macht per Sekunde x und M $(x + {}^3/_2)$ Meter, daher M in 650 Sekunden $650\,(x + {}^3/_2)$ und N $650x$; folglich, da die Leistung des M den ganzen Weg vorstellt:
$${}^3/_4 \,.\, 650\,(x + {}^3/_2) = 650x - 325.$$
M hat 8, N $6{}^1/_2$ Meter Geschwindigkeit; die Entfernung ist 5200 Meter.

4) $\frac{4x}{5} = y$, $y - 12 = z$, $u = 4y$, $\frac{5u}{6} = x + y + z + 17$; 75, 60, 48, 240 Liter.

5) 1 Krone, welche die Ware kostet, steigt durch den Zoll auf $(1 + {}^8/_{100})$, und eine Krone, die die Ware samt dem Zoll kostet, steigt durch den 20% Nutzen auf $(1 + {}^8/_{100})\,(1 + {}^{20}/_{100})$; kostet daher ein Kilogramm x K, so ist
$x\,(1 + {}^8/_{100})\,(1 + {}^{20}/_{100}) - 4{\cdot}992 = 4{\cdot}992 - x\,(1 + {}^{20}/_{100})$.
$x = 4\ K,\ 5\ K\ 18{\cdot}4\ h$.

6) $x\,(1 + {}^{15}/_{100})\,(1 + {}^{25}/_{100}) - x = 1{}^3/_4$; $x = 4\ K$,
B verkaufte ein Meter um $5\ K\ 75\ h$.

7) *a)* Auf ein Liter des ersten, des zweiten Gefäßes kommen ${}^2/_5$, ${}^{18}/_{25}$ Liter Spiritus, somit
${}^2/_5\, x + (15 - x)\ {}^{18}/_{25} = 15\,.\,{}^9/_{15} = 9$; $x = 5{}^5/_8$ Liter; $9{}^3/_8$ Liter.
b) ${}^{25}/_{55}\, x + (15 - x)\ {}^{18}/_{25} = 9$; $x = 6{}^{57}/_{73}$ Liter; $8{}^{16}/_{73}$ Liter.

§ 3. Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

1) Man erhält $4y + 17x = 437$ und $3y - 17x = -297$; $x = 21$, $y = 20$.

Digitized by Google

2) Die erste Gleichung gibt $2x + y = 4$; $x = 1$, $y = 2$.

3) Die erste Gleichung gibt $2x - y = 1$, bei der zweiten beachte man, daß

$50y^2 - 65y - 7 = (10y + 1)(5y - 7)$ ist; $x = 3$, $y = 5$.

4) Die beiden Gleichungen geben folgende:

$x = y\frac{2a+b}{a+2b}$, $x - y = a - b$; $x = 2a + b$, $y = a + 2b$.

5) Setzt man den Wert von xy^2 aus der zweiten Gleichung in die erste ein, so erhält man

$$x = \frac{3}{1+y}$$

und dieser Wert gibt, in die zweite Gleichung gesetzt:

$$y = 2, \text{ daher } x = 1.$$

6) Bringt man die Brüche weg, so folgt $x^{10} - y^{10} = a$, $x^5 - y^5 = b$.

$(x^5 + y^5)(x^5 - y^5) = a$, somit $x^5 + y^5 = \frac{a}{b}$ und $x^5 - y^5 = b$.

$x = \sqrt[5]{\frac{a+b^2}{2b}}$, $y = \sqrt[5]{\frac{a-b^2}{2b}}$; da $\sqrt[5]{1}$ fünf verschiedene Wurzeln hat, so stellt sowohl x wie y fünf verschiedene Wurzeln vor.

7) $x = 20$, $y = 30$, $z = 40$. 8) $x = 62$, $y = 46$, $z = 34$.

9) Man betrachte $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ als Unbekannte; $x = 3/2$, $y = 3/4$, $z = 5/6$.

10) $x = a^2 + ab + b^2$, $y = a^2 - ab + b^2$, $z = a^2 + b^2$.

11) Durch Wegschaffen der Nenner erhält man:

$a(1 - b)x - (1 + b)y + 2z = 0$

$2ax - 2y + 3z = 3b$

$3abx - 2by - 5z = -4b$

daraus $ax(1 + 3b) - y(1 - 3b) = 6b$

$ax(10 + 9b) - y(10 + 6b) = 3b$

$$x = \frac{1}{a}, \quad y = 1, \quad z = b.$$

12) Aus der ersten Gleichung folgt

$3^{2\sqrt{2x+y}} = 3^{6x-y}$, somit $2\sqrt{2x + y} = 6x - y$;

aus der zweiten Gleichung folgt:

$5^{\frac{3}{5x-y}} = \frac{4^{\frac{2}{y}} \cdot 5^{\frac{2}{y}}}{4^{\frac{2}{y}}}$, somit $\frac{3}{5x-y} = \frac{2}{y}$.

$x = 1$, $y = 2$.

Digitized by Google

13) $m^{\frac{x}{3}} \cdot m^{\frac{y}{7}} = m^7$, $m^{\frac{x}{4}} : m^{\frac{2y}{3}} = \frac{1}{m^{11}}$;

$\frac{x}{3} + \frac{y}{7} = 7$, $\frac{x}{4} - \frac{2y}{3} = -11$; $x = 12$, $y = 21$.

14) Da $y = 7 - x$, so

$x \log 5 + (7 - x) \log 8 = \log 512000$, $x = 3$, $y = 4$,

oder: $5^x \cdot 8^{7-x} = 512000$;

$(5/8)^x = \frac{512.1000}{8^7} = \frac{1000}{8^4} = \frac{125}{8^3} = (5/8)^3$; $x = 3$.

15) $5^x \cdot 3^y = 5^3 \cdot 3^2$, $3^x \cdot 5^y = 5^2 \cdot 3^3$, $\left(\frac{5}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^y = \frac{5}{3}$; $\left(\frac{5}{3}\right)^{x-y} = \frac{5}{3}$

somit $x - y = 1$; $x = 3$, $y = 2$;

oder multipliziert man beide Gleichungen miteinander, so erhält man

$15^x \cdot 15^y = 15^{x+y} = 15^5$, daher $x + y = 5$.

16) $m^{\frac{x-5}{3}} : m^{\frac{y-3}{5}} = m^0$, $m^{\frac{3x-1}{4}} \cdot m^{\frac{5y-1}{3}} = m^{16}$.

$\frac{x-5}{3} - \frac{y-3}{5} = 0$, $\frac{3x-1}{4} + \frac{5y-1}{3} = 16$;

$x = 917/127$; $y = 851/127$.

17) $y \log x = \log 243 = 5 \log 3$,

$\frac{1}{y} \log 1024 = 2 \log \frac{2x}{3} = 2(\log 2 + \log x - \log 3) = \frac{10}{y} \log 2$,

oder $\frac{5}{y} \log 2 = \log 2 + \frac{5 \log 3}{y} - \log 3$;

$\frac{5}{y}(\log 2 - \log 3) = (\log 2 - \log 3)$, $y = 5$, $x = 3$.

18) Aus der zweiten Gleichung folgt: $\frac{5}{x} = 4 - \frac{12}{y}$; logarithmiert man die erste Gleichung und benützt $\frac{5}{x} = 4 - \frac{12}{y}$, so erhält man

$\frac{4}{y}[7 \log 3 + \log 2] = 7 \log 3 + \log 2$, $y = 4$, $x = 5$,

oder $2.9^{4 - \frac{12}{y}} = 3.6^{\frac{4}{y}}$, $\frac{2.9^4}{3} = 6^{\frac{4}{y}} \cdot 9^{\frac{12}{y}} = (2^4 \cdot 3^{28})^{\frac{1}{y}} = 2.3^7)^{\frac{4}{y}}$

und da $\frac{2.9^4}{3} = 2.3^7$ ist, so ist $\frac{4}{y} = 1$, $y = 4$, $x = 5$.

19) Logarithmisch zu lösen oder

$2/3 . 3^{\frac{10}{x}} = 2^{\frac{4}{y}} \cdot 3^{\frac{4}{y}}$; $2^{\frac{10}{x} + \frac{24}{y}} = 2^8$, daraus $\frac{10}{x} = 8 - \frac{24}{y}$.

$2/3 . 3^{8 - \frac{24}{y}} = 2^{\frac{4}{y}} \cdot 3^{\frac{4}{y}}$, $2.3^7 = (2.3^7)^{\frac{4}{y}}$, $\frac{4}{y} = 1$, $y = 4$, $x = 5$.

Digitized by Google

20) $2^{\log x} \cdot 3^{2-\log x} = \sqrt{54}$, wegen $\log y = 2 - \log x$.

$(^2/_3)^{\log x} = {}^1/_9\sqrt{54} = \sqrt{{}^{54}/_{81}} = \sqrt{{}^3/_8} = (^2/_3)^{1/2}$; $\log x = {}^1/_2$,

$x = \sqrt{10} = 3{\cdot}16228$, $y = \sqrt{1000} = 31{\cdot}62278$.

21) Die zweite Gleichung gibt $\log y = 3 - \log x$, daher geht die erste Gleichung über in

$$2^{\log x} \cdot 3^{3-\log x} = 12.$$

$\frac{2^{\log x}}{3^{\log x}} = \frac{12}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$, $\log x = 2$, $x = 100$, $y = 10$.

22) Die erste Gleichung gibt $2^3 \cdot 3^y \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{xy} = 3^3 \cdot 2^y$

oder $\left(\frac{2}{3}\right)^{xy} = \left(\frac{2}{3}\right)^{y-3}$

und aus der zweiten Gleichung folgt

$7 \cdot 5^x = 5^{\frac{1}{y}} + 2 \cdot 5^x$, oder $5^{x+1} = 5^{\frac{1}{y}}$.

$x = -0{\cdot}5$, $y = 2$.

§ 4.

1) $\frac{27 + 34x}{(3+4x)(6+7x)} = \frac{A}{3+4x} + \frac{B}{6+7x}$, daraus

$A(6 + 7x) + B(3 + 4x) = 27 + 34x$,

$2A + B = 9$, $7A + 4B = 34$; $A = 2$, $B = 5$.

2) $A = 3$, $B = 9$; aus $\frac{3}{2+5x} = {}^1/_3 \frac{9}{10+x}$ folgt $x = 2$.

3) $x = 3$, $y = 5$.

4) Da 37 Dekagramm 5 Dekagr. verlieren, so verliert ein Dekagr. $^5/_{37}$ und x Dekagr. $\frac{5x}{37}$, somit $\frac{5x}{37} + \frac{2y}{23} = 14$, $x + y = 120$; $x = 74$ Dekagr. Zinn, $y = 46$ Dekagr. Blei.

5) $\begin{matrix} mx + my = d \\ nx - ny = d \end{matrix}$ $x = \frac{m+n}{2mn}d$, $y = \frac{n-m}{2mn}d$.

6) $x + y + z = 11$, $100x + 10y + z = 100y + 10x + z$,

$100x + 10y + z + 18 = 100x + 10z + y$; 335.

7) $\frac{x}{5} + \frac{y}{6} + \frac{z}{7} = 9$; $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} + 1^1/_2 = \frac{z}{2}$, $y = \frac{x+z}{2}$;

$x = 15$, $y = 18$, $z = 21$.

8) Bezeichnet man den Inhalt des Reservoirs mit 1, so liefern die drei Röhren in einer Stunde $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$, daher:

Digitized by Google

$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)8=1; \frac{1}{x}:\frac{1}{y}=6:5;\ \frac{1}{x}:\frac{1}{z}=3:2;$

$x=20,\ y=24,\ z=30.$

9) $(x+50)\frac{y}{5}+\frac{xy}{4}=870,\ (x+50)\frac{y-1}{5}+\frac{x(y+1)}{4}=875.$

Die zweite Gleich. ist auch $(x+50)\frac{y}{5}-\frac{x+50}{5}+\frac{xy}{4}+\frac{x}{4}=875$

daher $870-\frac{x+50}{5}+\frac{x}{4}=875,\ x=300,\ y=6.$

Von der ersten Sorte 350 Kilogr., je 5 zu 6 *K*.
Von der zweiten Sorte 300 Kilogr., je 4 zu 6 *K*.

10) $xy+(20-x)z=52$ setzt man nun xy aus der dritten Gleichung in die erste, so $z=2$; addiert man die beiden ersten Gleich., so $y+z=5$.
$xz+(20-x)y=48$
$xy-12=xz$

$x=12,\ y=3,\ z=2.$

Von der ersten Sorte 12 Kilogr., à 3 *K*.
Von der zweiten Sorte 8 Kilogr., à 2 *K*.

11) x + 13 Männer, x Frauen, y *K* ein Mann, z *K* eine Frau.

$(x+13)y+xz=540,..\alpha$
$(2x+13)z=485,.....\beta$
$(2x+13)y=582,.....\gamma$

$\frac{\gamma}{\beta}$ gibt $y=\frac{6z}{5}$,

β gibt auch $x=\frac{485}{2z}-{}^{13}/_{2}$.

Diese beiden Werte sind nun in α einzusetzen

$x=42,\ y=6,\ z=5.$

12) $\alpha:\beta:\gamma:\delta=1:3:5:7$; $\alpha+\beta+\gamma+\delta=s$ ist das einfache Gewicht, daher $(3^3/_8+1)\ s={}^{35}/_8\ s$ das Gewicht der verbundenen Legierung.

${}^{35}/_8\ s=\alpha'+\beta'+\gamma'+\delta'$ und $\alpha':\beta':\gamma':\delta'=3:4:5:6$,

${}^{35}/_8\ s:18=\alpha':3,\ \alpha'=\frac{35s}{48};\ s:16=\alpha:1,\ \alpha=\frac{s}{16}$.

$X=\alpha'-\alpha=({}^{35}/_{48}-{}^{1}/_{16})\ s=\frac{2s}{3}$, ebenso $Y=\beta'-\beta=\frac{113s}{144}$,

$Z=\gamma'-\gamma=\frac{130s}{144}$, $U=\delta'-\delta=\frac{147s}{144}$, daher

$X:Y:Z:U=96:113:130:147.$

13) A und B haben die Geschwindigkeiten x und y, und B brauche z Sekunden.

$x:y=4:5\ .....\alpha$
$x(z+405)=yz.....\beta$
$(x+1+y+{}^{1}/_{2})\ 675=yz..\gamma$

Aus α folgt $y=\frac{5x}{4}$, dies in β eingesetzt, gibt $z=1620$, mit diesen beiden Werten gibt γ $x=2\ m$, $y=2{}^{1}/_{2}\ m$.

A braucht $33^3/_4$, B aber 27 Minuten; die Entfernung beträgt 4050 Meter.

Digitized by Google

14) Ist x die Geschwindigkeit des A, y die des B und z die Zeit des A vom Zusammentreffen an, so ist

$$8x = 8y + 8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \alpha$$
$$(y + 1)\ (z + {}^{16}/_{11}) + 8y = (8 + z)\,x \ldots \beta$$
$$(8 + z + {}^{16}/_{11})\ (y + {}^{1}/_{2}) = (8 + z)\ x \ldots \gamma.$$

Setzt man $x = y + 1$ aus α in β ein, so $y = 4{}^{1}/_{2}$, $x = 5{}^{1}/_{2}$ Kilometer, aus γ folgt nun $z = 6{}^{6}/_{11}$; die Entfernung beträgt 80 Kilometer.

15) Während A einen Schritt macht, macht B ${}^{5}/_{6}$, während A aber durch einen Schritt um 1 vorwärts kommt, kommt B durch einen Schritt um ${}^{10}/_{9}$ fort, daher kommt A in derselben Zeit um 1 weiter, in welcher B um ${}^{25}/_{27} = {}^{5}/_{6} . {}^{10}/_{9}$ weiter kommt, oder einem Schritt des A entspricht der Zeit und Größe nach ${}^{25}/_{27}$ eines Schrittes von B, daher, wenn A in der Stunde x Schritte macht,

$$xy = (y + 1)\ \tfrac{25x}{27} \ldots\ldots \alpha.$$

B macht $(y + 1)\ \frac{5x}{6}$ Schritte, daher A $(y + 1)\ \frac{5x}{6} + 3600$ und diese müssen gleich xy sein, somit

$$(y + 1)\ \tfrac{5x}{6} + 3600 = xy \ldots\ldots \beta.$$

Aus α folgt $y = 12{}^{1}/_{2}$ Stunden, aus β folgt dann $x = 2880$ Schritte, somit $y_1 = 13{}^{1}/_{2}$, $x_1 = {}^{5}/_{6} . 2880 = 2400$.

$$12{}^{1}/_{2} . 2880 = 13{}^{1}/_{2} . 2400 + 3600.$$

§ 5. Gleichungen des zweiten Grades mit einer Unbekannten.

1) $x = \frac{3a \pm \sqrt{3\,(4b - a^2)}}{6}$; $x_1 = 25$, $x_2 = 5$.

2) $x_1 = a + b$, $x_2 = -6a$.

3) Transponiert man das vierte Glied der linken Seite und reduziert:

$$\frac{2x\,(x-2)^2 - 2\,(x-2)^2 + 2\,(4 - 3x)}{x\,(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 16x + 31}{x^2 - 7x + 12},$$

$$\frac{2x^2 - 10x + 10}{x^2 - 4x + 4} = \frac{2x^2 - 16x + 31}{x^2 - 7x + 12};\quad x^2 - 2x - 4 = 0.$$

$$x_1 = 3 \cdot 236068,\quad x_2 = -1 \cdot 236068.$$

4) Bringt man die Gleichung auf den gemeinschaftlichen Nenner $(x - 1)^2\,(x - 4)$, so:

$$(x - 3)^2\ (x - 1)^2 - 21x\ (x - 4) = 9$$

oder $\quad (x^2 - 4x + 3)^2 - 21\ (x^2 - 4x + 3) = -54.$

Setzt man nun $y = x^2 - 4x + 3$, so $y^2 - 21y + 54 = 0$,

$y_1 = 18$, $y_2 = 3$; $\quad x^2 - 4x + 3 = 18$, $\quad x^2 - 4x + 3 = 3$.

Digitized by Google

$$x_1 = 6 \cdot 3588989, \quad x_3 = 4,$$
$$x_2 = -2 \cdot 3588989, \quad x_4 = 0.$$

5) Man ergänze das zweite Glied zu 8 $(x^2 + 2x + 3)$ und führe ξ für $x^2 + 2x + 3$ ein, $\xi^2 - 8\xi = 513$; $\xi_1 = 27$, $\xi_2 = -19$.
$x_1 = 4$, $x_2 = -6$, $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{-21} = -1 \pm 4 \cdot 582576\, i$.

6) $x(x+3) = \xi$; $\xi = \sqrt{346 + 3\xi} - 2$, $\xi_1 = 18$, $\xi_2 = -19$.
$x_1 = 3$, $x_2 = -6$, $x_{3,4} = -1 \cdot 5 \pm 4 \cdot 092676\, i$.

7) $x_1 = 5a$, $x_2 = -a$, $x_3 = 0$.

8) Für $\frac{5}{x^2}$ setze man y; $x = \pm \frac{2}{7}$.

9) $x - 21\sqrt{x} + 98 = (\sqrt{x} - 7)(\sqrt{x} - 14) = 0$; $x_1 = 49$, $x_2 = 196$.
Oder man setze $\frac{\sqrt{x}}{21 - \sqrt{x}} = y$.

10) $x_1 = 7$, $x_2 = -11\frac{42}{47}$, wo x_1 der vorgelegten Gleichung, x_1 und x_2 der abgeleiteten rationalen Gleichung $47x^2 + 230x = 3913$ entsprechen.

11) $x_1 = 15$, $x_2 = -10$; **12)** $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{4}{11}$,
wo x_1 den vorgelegten Gleichungen, x_1 und x_2 den abgeleiteten rationalen Gleichungen $x^2 - 5x = 150$, $11x^2 - 29x = 12$ genügen.

13) $x_1 = 25$, $x_2 = 49$; **14)** $x_1 = 93$, $x_2 = 7$.

15) $x_1 = 2a$, $x_2 = -2a$, $x_3 = 0$.

16) Man setze $x^2 - 8x + 31 = \xi$, so erhält man $\sqrt{\xi} = 20 - \xi$;
$\xi_1 = 16$, $\xi_2 = 25$; $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, $x_3 = 7 \cdot 1622777$,
$x_4 = 0 \cdot 8377223$.

17) Der Zähler ist durch den Nenner teilbar, $x_1 = a$, $x_2 = b$.

18) $x = \frac{b \pm \sqrt{b(b-2a)}}{2}$.

19) $\sqrt{\frac{a}{b} - x} - \sqrt{\frac{a}{b} + x} = \sqrt{8x} - \sqrt{\frac{2a}{b} - 8x}$.
Durch das Quadrieren erhält man
$\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - x^2} = \sqrt{\frac{16ax}{b} - 64x^2}$, somit $63x^2 - \frac{16ax}{b} + \frac{a^2}{b^2} = 0$
und $x_1 = \frac{a}{7b}$, $x_2 = \frac{a}{9b}$.

20) $\frac{2x + \sqrt{x}}{2x - \sqrt{x}} = \xi$; $\xi^2 - \frac{52\xi}{15} + 3 = 0$; $\xi_1 = \frac{9}{5}$, $\xi_2 = \frac{5}{3}$.
$x_1 = \frac{49}{16}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$, $x_4 = 0$.

21) Rational gemacht: $x^4 - 42x^2 + 425 = 0$.
$x_{1,2} = \pm 5$, $x_{3,4} = \pm \sqrt{17} = \pm 4 \cdot 1231056$.

Digitized by Google

22) Multipliziert man die Gleichung mit $\sqrt{2}$, so erhält man

$$\sqrt{2(x-2)} + 2\sqrt{x-3} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}, \text{ somit}$$

$$\sqrt{2(x-2)} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-3}$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}, \quad x_1 = 3{\cdot}236068, \quad x_2 = -1{\cdot}236068.$$

23) Hebt man zunächst $2x$ heraus, so erhält man

$$2x\,(2\sqrt{7x-5} - \sqrt{4x-3} - 5\sqrt{3x-8}) = 0$$

$2\sqrt{7x-5} - \sqrt{4x-3} = 5\sqrt{3x-8}$ gibt, rational gemacht,

$$1401\,x^2 - 14566\,x + 31089 = 0.$$

$$x_1 = 7^{556}/_{1401}, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 0.$$

24) Durch das Rationalmachen erhält man

$$1065x^2 - 11792x + 26176 = 0.$$

$$x_1 = 8, \quad x_2 = {}^{3272}/_{1065}, \quad x_3 = 0.$$

25) $\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x+1}} = 1 + {}^1/_2(\sqrt{3x} - 1)$; $\dfrac{2(\sqrt{3x}+1)(\sqrt{3x}-1)}{\sqrt{3x+1}} = \sqrt{3x}+1.$

$$(\sqrt{3x}+1)\left[\frac{2(\sqrt{3x}-1)}{\sqrt{3x+1}} - 1\right] = 0; \quad 2(\sqrt{3x}-1) = \sqrt{3x+1}.$$

$$\sqrt{3x} = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}; \quad x_1 = 1{\cdot}635778, \quad x_2 = 0{\cdot}0679255.$$

$$\sqrt{3x} + 1 = 0, \quad x_3 = {}^1/_3.$$

26) $\sqrt{\dfrac{1+fg^2x}{1-fgx}} = \xi$, $\xi^2 - 2\xi = 3$; $x_1 = \dfrac{8}{fg(9+g)}$, $x_2 = 0$.

27) $\dfrac{3x^2+3}{x+3} = (2{\cdot}6390159)^{10/7} = 4.$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{31}}{3}, \quad x_1 = 2{\cdot}522588, \quad x_2 = -1{\cdot}1892548.$$

28) $(x + \sqrt{x})^2 = \xi$, $\xi^2 - \xi = 159600$, $\xi_1 = 400$, $\xi_2 = -399$.

$$x + \sqrt{x} = \pm 20, \sqrt{x_1} = 4, \sqrt{x_2} = -5, \sqrt{x_{3,4}} = \frac{-1 \pm \sqrt{-79}}{2}.$$

$$x_1 = 16, \quad x_2 = 25, \quad x_{3,4} = \frac{-39 \pm \sqrt{-79}}{2},$$

$$x + \sqrt{x} = \pm\sqrt{-399}$$

$$\sqrt{x_{5,6}} = -{}^1/_2 \pm \sqrt{{}^1/_4 + \sqrt{-399}},$$

$$x_{5,6} = \{-{}^1/_2 \pm \sqrt{{}^1/_4 + \sqrt{-399}}\}^2,$$

$$\sqrt{x_{7,8}} = -{}^1/_2 \pm \sqrt{{}^1/_4 - \sqrt{-399}},$$

$$x_{7,8} = \{-{}^1/_2 \pm \sqrt{{}^1/_4 - \sqrt{-399}}\}^2.$$

Digitized by Google

29) Ordnet man die Gleichung, so erhält man

$$\sqrt[3]{x^2} + {}^9/_2\sqrt[3]{x} + {}^{19}/_5 = 0,$$

und daraus ergibt sich

$$\sqrt[3]{x_{1,2}} = -{}^9/_4 \pm \sqrt{{}^{101}/_{80}}; \quad \sqrt[3]{x_1} = -1{\cdot}12639,$$

$$\sqrt[3]{x_2} = -3{\cdot}37361$$

und $x_1 = -1{\cdot}42911, \quad x_2 = -38{\cdot}39589.$

30) Erhebt man beide Teile zur dritten Potenz, so erhält man:

$$\sqrt[3]{(x+a)^2(x-a)} + \sqrt[3]{(x+a)(x-a)^2} = 0$$

$$\sqrt[3]{(x+a)(x-a)}\,[\sqrt[3]{x+a} + \sqrt[3]{x-a}] =$$

$$\sqrt[3]{2x}\;\sqrt[3]{(x+a)(x-a)} = 0.$$

$$\sqrt[3]{(x+a)(x-a)} = 0, \quad x_1 = a, \quad x_2 = -a.$$

$$\sqrt[3]{2x} = 0, \quad x_3 = 0.$$

31) Kubiert man die gegebene Gleichung, so erhält man

$$\sqrt[3]{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})}\,[\sqrt[3]{x-\sqrt{2}} - \sqrt[3]{x+\sqrt{2}}] = 0.$$

Nun ist $\sqrt[3]{x+\sqrt{2}} - \sqrt[3]{x-\sqrt{2}} = \sqrt{2},$

daher $\sqrt[3]{(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})} = 0,$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{2} = \pm 1{\cdot}4142136.$$

32) Durch das Kubieren erhält man:

$$56 = \sqrt[3]{(x+84{\cdot}5)(x-84{\cdot}5)}\,[\sqrt[3]{x+84{\cdot}5} - \sqrt[3]{x-84{\cdot}5}].$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist aber gleich 1, somit

$$56 = \sqrt[3]{(x+84{\cdot}5)(x-84{\cdot}5)}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{182756{\cdot}25} = \pm 427{\cdot}5.$$

33) $\sqrt[4]{\frac{x-40}{x+40}} = \xi, \quad 3\xi^2 - 10\xi + 3 = 0, \quad \xi_1 = 3, \quad \xi_2 = {}^1/_3.$

$$\frac{x-40}{x+40} = 81; \quad \frac{x-40}{x+40} = {}^1/_{81}; \quad x = \pm 41.$$

34) $\xi - \frac{1}{\xi} + {}^5/_6 = 0, \xi_1 = {}^2/_3, \xi_2 = -{}^3/_2; x_1 = 81, x_2 = (-10)^4 = 10000.$

35) $\sqrt[5]{\frac{5-x}{3+x}} = \xi, \quad \xi^2 - 4\xi + 1 = 0, \quad \xi = 2 \pm \sqrt{3}.$

$$\frac{5-x}{3+x} = (2+\sqrt{3})^5, \quad \frac{5-x}{3+x} = (2-\sqrt{3})^5.$$

$$x_1 = 4{\cdot}988965, \quad x_2 = -2{\cdot}988965.$$

Digitized by Google

36) $3(x^4+1)-16x(x^2+1)+26x^2=0$. Dividiert man nun die Gleichung durch x^2, so $3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-16\left(x+\frac{1}{x}\right)+26=0$ und setzt $x+\frac{1}{x}=y$, also $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$, so $3y^2-16y+20=0$, $y_1=10/3$, $y_2=2$.

$x+\frac{1}{x}=y_1$, $x+\frac{1}{x}=y_2$, $x_1=3$, $x_2=1/3$, $x_{3,4}=1$.

37) $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0$, $x_1=-1$, $x_2=-1$, $x_3=-2$, $x_4=-1/2$.

38) $x_5=1$, $2x^4-x^3-6x^2-x+2=0$,
daher $x_5=1$,
$x_1=-1$, $x_2=-1$,
$x_3=2$, $x_4=1/2$.

39) Die Substitution von $y=x+\frac{1}{x}$ gibt:
$y^3+3y^2+3y+1=0$, $(y+1)^3=0$, $y=-1$.
$x_{1,3,5}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $x_{2,4,6}=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.

40) $8.2^{4x}-54.2^{3x}+101.2^{2x}-54.2^x+8=0$.
Setzt man $2^x=y$, so
$8y^4-54y^3+101y^2-54y+8=0$.
Daraus $y_1=4$, $y_2=1/4$, $y_3=2$, $y_4=1/2$
somit $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=1$, $x_4=-1$.

41) Setzt man $\operatorname{tg} x=y$, so $y^4+5/6\,y^3-6\,1/3\,y^2+5/6\,y+1=0$, und daraus $\operatorname{tg} x_1=2$, $\operatorname{tg} x_2=1/2$, $\operatorname{tg} x_3=-3$, $\operatorname{tg} x_4=-1/3$.

42) $\log 2x=2\log(4x-15)=\log[(4x-15)^2]$, $2x=(4x-15)^2$, $x_1=9/2$, $x_2=25/8$.

43) Man setze $\log x=y$; $x_1=10^2=100$, $x_2=10^3=1000$.

44) $\log[(3x-4)^2\,.\,(x-8)^2]=4$; $(3x-4)^2\,.\,(x-8)^2=10^4$
$(3x-4)(x-8)=\pm 10^2$,
$3x^2-28x=68$, $3x^2-28x=-132$.
$x_1=34/3$, $x_2=-2$
$x_{3,4}=\frac{14\pm\sqrt{-200}}{3}$.

45) $x(x+2)^2=(x+1)^3$, $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, $x_1=0{\cdot}618034$, $x_2=-1{\cdot}618034$.

Digitized by Google

46) $3.4^{x+2} = 4.3^3 . 3^{\frac{2}{x}}$; $4 . 4^x = 3^2 . 3^{\frac{2}{x}}$

$(2.2^x)^2 = (3.3^{\frac{1}{x}})^2$, $2.2^x = 3.3^{\frac{1}{x}}$

$x^2 \log 2 + x \log 2 = x \log 3 + \log 3$ und

$(x+1)(x \log 2 - \log 3) = 0.$

$x_1 = -1$, $x_2 = \frac{\log 3}{\log 2} = 1{\cdot}584962.$

47) Schafft man den Nenner weg, so

$(a+b)^{2x-1} + (a-b)(a+b)^{x-1} = a$ oder

$(a+b)^{2x} + (a-b)(a+b)^x = a(a+b)$, $(a+b)^x = \xi$,

$\xi^2 + (a-b)\xi = a(a+b)$,

$x_{1,2} = \frac{\log {}^1/_2 [(b-a) \pm \sqrt{5a^2 + 2ab + b^2}]}{\log (a+b)}.$

48) $({}^5/_2)^x = \xi$, $\xi^2 - {}^{15}/_2 \xi + {}^{25}/_2 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1{\cdot}756471$ $(1{\cdot}7565)$.

49) $\sqrt[2x]{12} = \xi$, $\frac{3\xi^2}{60+\xi} = 6$, $x_1 = 0{\cdot}5$, $x_2 = 0{\cdot}5395906$.

50) Schafft man den Nenner fort, so

$(a+b)^{2x}(a-b)^{2x} - 2(a+b)^{x+1}.(a-b)^x + a(a+2b) = 0$,

$(a^2-b^2)^{2x} - 2(a+b)(a^2-b^2)^x + a(a+2b) = 0$,

$\xi^2 - 2(a+b)\xi + a(a+2b) = 0$, $\xi_1 = a+2b$, $\xi_2 = a$.

$x_1 = \frac{\log (a+2b)}{\log (a^2-b^2)}$, $x_2 = \frac{\log a}{\log (a^2-b^2)}$.

51) $3^{4x} + 1 = \xi$, $2.3^{4x} + 3 = 2(3^{4x}+1) + 1 = 2\xi + 1$.

$\sqrt{\xi} + \sqrt{2\xi + 1} = 5$, $\xi_1 = 144$, $\xi_2 = 4$.

$3^{4x} + 1 = 144$, $3^{4x} + 1 = 4$.

$x_1 = \frac{\log 143}{4 \log 3} = 1{\cdot}1293439$, $x_2 = 0{\cdot}25$.

52) $3\sqrt[x+1]{8} = 6^{x-1}$

$\log 3 + \frac{1}{x+1} \log 8 = (x-1) \log 6$, $(x+1) \log 3 + 3 \log 2 =$

$(x^2-1) \log 2 + (x^2-1) \log 3$.

$(x^2-4) \log 2 + (x^2-x-2) \log 3 = 0$.

$(x-2)[(x+2) \log 2 + (x+1) \log 3] = 0$.

$x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{2 \log 2 + \log 3}{\log 2 + \log 3} = -1{\cdot}38685.$

53) $\log \sqrt[3]{12x(3x-1) + 5(x-6)} = {}^1/_3 \log (x-1) + \log \sqrt[3]{100}$

$36x^2 - 7x - 30 = 100(x-1)$; $x_1 = 2$, $x_2 = {}^{35}/_{36}$.

54) $10^{(3-x)(4-x)} = y$, $3y^2 - 400y + 10000 = 0$.

$y_1 = 10^2$, $(3-x)(4-x) = 2$, $x_1 = 5$, $x_2 = 2$.

$y_2 = {}^{100}/_3$, $(3-x)(4-x) = 1{\cdot}5228787$,

$x_3 = 4{\cdot}8314949$, $x_4 = 2{\cdot}1685051$.

Digitized by Google

55) Logarithmiert man und setzt $\log x = y$, so $y^4 - 5y^2 + 4 = 0$.
$x_1 = 100$, $x_2 = {}^1/_{100}$, $x_3 = 10$, $x_4 = {}^1/_{10}$.

56) $(y^2 - 5y)(y + 4) = 0$;
$x_1 = 1$, $x_2 = {}^1/_{10000}$, $x_3 = 10^{\sqrt{5}}$, $x_4 = \frac{1}{10^{\sqrt{5}}}$.

57) Wenn man logarithmiert, so $[\log(2x+1) - 3]\log(2x+1) = -2$,
$\log(2x+1) = y$, $(y-3)\,y = -2$, $x_1 = 49 \cdot 5$, $x_2 = 4 \cdot 5$.

58) Setzt man $\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{\log x}{2}} = y$, so $y^2 - 5y = 24$,

$\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{\log x}{2}} = 8$, $\left(\frac{1}{x}\right)^{-\log x} = 64$, $-\log x \,.\, \log\left(\frac{1}{x}\right) = (\log x)^2$
$= \log 64$,

$\log x = \pm\sqrt{\log 64}$,

$x_{1,2} = 10^{\pm\sqrt{\log 64}}$,

$\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{\log x}{2}} = -3$, $(\log x)^2 = \log 9$,

$x_{3,4} = 10^{\pm\sqrt{\log 9}}$,

$x_1 = 22 \cdot 077$, $x_2 = 9 \cdot 481$, $x_3 = \frac{1}{x_1}$, $x_4 = \frac{1}{x_2}$.

§ 6.

1) Ein Kilogramm der einen Ware kostet x *K*, der anderen $x + {}^1/_2$ *K*, daher

$\frac{8^3/_4}{x} - 2 = \frac{8^3/_4}{x + {}^1/_2}$, $x_1 = {}^5/_4$; $x_2 = -{}^7/_4$ ist unbrauchbar.

Von der einen Sorte ${}^5/_4$, von der anderen ${}^7/_4$ *K*.

2) *A K* Kapital, $x\,\%$.

$\left(A + \frac{Ax}{100}\right) - \left(A + \frac{Ax}{100}\right)\frac{x}{100} = \frac{3A}{4}$, $x^2 = 2500$, $x = 50\,\%$.

3) Die Lichtquelle *A* hat in der Entfernung r die Intensität $\frac{1}{4r^2\pi}$, die Lichtquelle *B* in der Entfernung *R* die Intensität $\frac{2}{4R^2\pi}$, beide sollen gleich sein, somit $\frac{1}{r^2} = \frac{2}{R^2}$, da $R = a - r$ ist, so

$2r^2 = a^2 - 2ar + r^2$ und $r^2 + 2ar - a^2 = 0$, $r = -a \pm a\sqrt{2}$,

$a - r = a(2 \mp \sqrt{2})$, für $a = 40\,m$ ist:

$r_1 = 16 \cdot 5685\,m$, $r_2 = -96 \cdot 5685$, $a - r_1 = 23 \cdot 4315$,
$a - r_2 = 136 \cdot 5685$.

Digitized by Google

Im ersten Falle liegt der Ort zwischen A und B, im letzteren Falle vor A.

4) Ist die Stärke von A 3, so ist sie von B 5, daher

$\frac{3}{4r^2\pi} = \frac{5}{4R^2\pi}$ oder $3R^2 = 5r^2$, $R = a - r$, somit

$$r^2 + 3ar - \frac{3a^2}{2} = 0, \; r = \frac{-3a \pm a\sqrt{15}}{2}, \; a - r = \frac{5a \mp a\sqrt{15}}{2},$$

für $a = 7500\,m$, $r_1 = 3273 \cdot 6874\,m$, $r_2 = -25773 \cdot 6874\,m$,

$a - r_1 = 4226 \cdot 3126\,m$, $a - r_2 = 33273 \cdot 6874\,m$.

5) Das Volumen des Diamanten sei 1, das eine Stück x, so ist, wenn k den Preis eines Volumteiles bezeichnet:

$$k.1^2 : k\,[x^2 + (1-x)^2] = 1000 : 800$$

und daraus $x^2 - x + {}^1/_{10} = 0$, daher $x = \frac{5 \pm \sqrt{15}}{10}$,

somit sind die Teile x und $1 - x$ ihrer Größe nach

0·88729833 und 0·11270167

oder das eine Stück ist 7·8729833mal so groß als das andere.

Der Schaden ist am größten, wenn der Diamant in zwei gleiche Teile zerbricht, dann beträgt er 500 K.

6) $\frac{60}{x} - 1 = \frac{60}{35 - x}$. Die erste Partie hatte 15 Meter à 4 K, die zweite Partie 20 Meter à 3 K; die andere Wurzel ist unbrauchbar.

7) Sei die Grundzahl x, so kann 356 auch geschrieben werden $3x^2 + 5x + 6$ und dies muß gleich 188 sein; $x = 7$.

Die andere Wurzel $-{}^{26}/_{3}$ ist unbrauchbar.

$188 : 125 = 1 + {}^{63}/_{125}$, $63 : 25 = 2 + {}^{13}/_{25}$, $13 : 5 = 2{}^{3}/_{5}$.

somit im Fünfer-Systeme 1223.

8) $(a + b)\frac{h}{2} = F$, $a = 60$, $b = h = x$. $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 8F}}{2}$

$x_1 = 40\,m$. Die andere Wurzel $x_2 = -100$ ist unbrauchbar.

9) Ist α eine Wurzel, so muß $\alpha^3 + p\alpha + q = 0$ und $x^3 + px + q$ durch $x - \alpha$ teilbar sein.

$$\frac{x^3 + px + q}{x - \alpha} = x^2 + \alpha x + (\alpha^2 + p) = 0. \; x = \frac{-\alpha \pm \sqrt{-4p - 3\alpha^2}}{2}.$$

$$\frac{x^3 - 15x - 126}{x - 6} = x^2 + 6x + 21 = 0, \text{ daher } x_1 = 6,$$

$$x_{2,3} = -3 \pm 2\sqrt{-3}.$$

10) Das erstemal werden x Liter entnommen, daher enthält dann ein Liter der Mischung nur $\frac{30 - x}{30}$ Spiritus, das zweite Mal werden

Digitized by Google

$(x + 5)$ Liter entnommen; da nun in 30 Liter der Mischung 20 Liter Spiritus sein sollen, so müssen 10 Liter entnommen worden sein, also

$$x + \frac{30 - x}{30}(x + 5) = 10, \quad x = 2{\cdot}877856,$$

indem von $\sqrt{2425}$ nur der negative Wert zulässig ist.

11) $(123 + 239x)^2 + (239 - 123x)^2 = 850^2$, $x = \pm 3$, d. h. vor oder nach 3 Minuten vom Beginne der Bewegung an gerechnet.

12) $(100 - 8x)^2 + (100 - 6x)^2 = c^2$.
Nimmt man c als bekannt an, so

$$x^2 - 28x = \frac{c^2}{100} - 200 \text{ und}$$

$$x = 14 \pm \sqrt{196 + \frac{c^2}{100} - 200};$$

da x reell sein muß, so kann $196 + \frac{c^2}{100}$ keinen kleineren Wert als 200 annehmen, also $196 + \frac{c^2}{100} = 200$.

$$c = 20, \quad x = 14.$$

In 14 Sekunden beträgt sonach die Entfernung das Minimum von 20 m.

13) $\frac{84000}{x - 2} = \frac{84000}{x} + 3500$; $x = 8$.

14) Nimmt er von der einen Sorte $(20 - x)$ und von der anderen x Meter, so kostet ein Meter bezüglich $^3/_{10}(20 - x)$ K, $\frac{x}{4}K$ und es ist sonach $^3/_{10}(20 - x)^2 + \frac{x^2}{4} = 67{\cdot}8$.

Von der einen Sorte 14 Meter à 4 K 20 h, oder $4^2/_{11}$ Meter à 1 K $25^5/_{11}$ h.

Von der anderen Sorte 6 Meter à 1 K 50 h, oder $15^9/_{11}$ Meter à 3 K $95^6/_{11}$ h.

15) $(x + {}^3/_4)\frac{x}{2} = 4\sqrt{3}$, $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 512\sqrt{3}}}{8}$.

Die Basis ist 4·11626 Meter, die Höhe 3·36626 Meter und ein Schenkel ist 3·94558 Meter.

16) Die beiden Parallelseiten sind x, $x + 3$, die Höhe ist $\frac{2x + 3}{2}$.

$$(x + x + 3)\frac{2x + 3}{4} = 2x^2 - 7{\cdot}75, \quad x_1 = 5;$$

die Wurzel $x_2 = -2$ ist unbrauchbar. Die beiden Parallelen sind 5 und 8 m, die Höhe 6·5 m.

Digitized by Google

17) Die beiden Parallelseiten sind x und $x+2$, daher der Schenkel $x+1$ und die Höhe $h = \sqrt{(x+1)^2 - \left(\frac{x}{2}+1-\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{(x+1)^2-1} = \sqrt{x^2+2x}$, somit

$$\frac{x+2+x}{2}\sqrt{x^2=2x} = 18,\quad (x+1)\sqrt{x+1)^2-1} = y\sqrt{y^2-1} = 18.$$

$y^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1297}}{2}$, nur das positive Vorzeichen ist brauchbar.

$y = 4 \cdot 30197$. Die beiden Parallelseiten betragen $5 \cdot 30197$ *m*. $3 \cdot 30197$ *m* und ein Schenkel beträgt $4 \cdot 30197$ *m*.

18) $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$. Setzt man $x = y + z$, so erhält man $y^3 + y^2(3z+A) + y(3z^2+2Az+B) + (z^3+Az^2+Bz+C) = 0$. Soll nun das Glied mit y^2 fehlen, so muß $z = -\frac{A}{3}$ sein, also hier in dem speziellen Falle

a) $z = 3$, *b)* $z = 4$; die Substitution *a)* $x = y + 3$

b) $x = y + 4$ ergibt:

a) $y^3 - y = 0$, *b)* $y^3 - 4y = 0$ mit den Wurzeln

a) $y_1 = 0$, $y_2 = +1$, $y_3 = -1$, *b)* $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = -2$, daher $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$; $x_1 = 4$, $x_2 = 6$, $x_3 = 2$.

19) Da A $x-8$ Minuten zu einer Meile braucht und im ganzen 10 Stunden geht, so ist die Entfernung von A bis C $\frac{10.60}{x-8}$, da B x Minuten zu einer Meile braucht, so ist die Entfernung von B bis C $\frac{10.60}{x}$ und die Differenz der beiden Entfernungen beträgt $\frac{15}{4}$ Meilen,

somit $\frac{10.60}{x-8} - \frac{10.60}{x} = \frac{15}{4}$.

Der eine Bote braucht 32, der andere 40 Minuten zu einer Meile und B ist von C 15 Meilen entfernt.

§ 7. Gleichungen des zweiten Grades mit mehreren Unbekannten.

1) $x_1 = 5$, $y_1 = -2$; $x_2 = 2$, $y_2 = 1$.

2) $x_1 = 12$, $y_1 = 2$; $x_2 = 10$, $y_2 = 4$.

3) Aus $x + y = 13$ folgt $x - 5 = 8 - y$. Dadurch geht die erste Gleichung über in

$$\frac{x-3}{x-5} - \frac{x-5}{x-3} = \frac{16}{15};\ x_1 = 8,\ y_1 = 5,\ x_2 = 3\tfrac{3}{4},\ y_2 = 9\tfrac{1}{4}.$$

Digitized by Google

4) Aus der zweiten Gleichung folgt $x - 1 = -2(y+1)$.
$x_1 = 5,\ y_1 = -3;\quad x_2 = -3,\ y_2 = 1.$

5) $x_1 = 4,\ y_1 = 5;\ x_2 = -{}^5/_2,\ y_2 = -4{}^3/_4.$

6) $y = \frac{48}{x},\ x^6 - 1792x^3 + 110592 = 0.$

$$x^3{}_1 = 1728,\quad x_1 = 12\sqrt[3]{1},\quad x^3{}_2 = 64,\quad x_2 = 4\sqrt[3]{1}.$$

Da nun $\sqrt[3]{1}$ die drei Wurzeln, $1, -{}^1/_2(1-\sqrt{-3}), -{}^1/_2(1+\sqrt{-3})$ hat, so

$$\begin{aligned} x_1 &= 12, & y_1 &= 4,\\ x_2 &= 4, & y_2 &= 12,\\ x_3 &= -6(1-\sqrt{-3}), & y_3 &= -2(1+\sqrt{-3}),\\ x_4 &= -6(1+\sqrt{-3}), & y_4 &= -2(1-\sqrt{-3}),\\ x_5 &= y_4, & y_5 &= x_4,\\ x_6 &= y_3, & y_6 &= x_3. \end{aligned}$$

7) Man substituiert entweder den Wert für y aus der zweiten Gleichung in die erste, oder man bildet zwei neue Gleichungen dadurch, daß man die zweite Gleichung zur ersten addiert und daß man die zweite Gleichung mit (-3) multipliziert und dann zur ersten Gleichung addiert.

$$x_{1,2} = \pm\frac{1}{a-b} = y_{3,4},\ x_{3,4} = \pm\frac{1}{a+b} = y_{1,2}.$$

8) $x_1 = 60 = y_2,\ x_2 = 12 = y_1.$

9) $x_1 = 4 = y_2,\ x_2 = 9 = y_1.$

10) $x_1 = 4 = y_2,\ x_2 = 64 = y_1.$

11) $\frac{1}{\sqrt{x+2}} = \xi,\quad \frac{1}{\sqrt{y-2}} = \eta,\ \xi+\eta = {}^3/_2,\ \xi\eta = {}^1/_2.$
$x_1 = -1,\ y_1 = 6;\quad x_2 = 2,\ y_2 = 3.$

12) Quadriert man die zweite Gleichung, so erhält man $2\sqrt{xy} = 9576$, verbindet man diese Gleichung subtraktiv mit der ersten, so $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \pm 27$; nun sind aus dieser Gleichung und aus $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 141$, $\sqrt{x}$ und $\sqrt{y}$ zu bestimmen.
$x_1 = 7056 = y_2,\ x_2 = 3249 = y_1.$

13) Aus der ersten Gleichung folgt $4\sqrt{xy} = \pm 24$, quadriert man die zweite Gleichung und verbindet damit subtraktiv die vorstehende Gleichung, so erhält man $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \pm 1, \sqrt{x} - \sqrt{y} = \pm 7$, welche mit $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ aufzulösen sind.
$x_1 = 9,\ y_1 = 4,\ x_2 = 4,\ y_2 = 9,\ x_3 = 36,\ y_3 = 1,$
$x_4 = 1,\ y_4 = 36,$
und zwar entsprechen die beiden ersten Systeme, wenn beide

Digitized by Google

Wurzeln positiv, die beiden letzteren Systeme, wenn die eine Wurzel im positiven, die andere im negativen Sinne genommen wird; alle vier Systeme entsprechen aber den rationalen Gleichungen: $x^2 + y^2 - 2xy - 50x - 50y + 625 = 0$, $xy = 36$.

14) $x_1 = {}^1/_8$, $y_1 = {}^5/_8$; $x_2 = {}^1/_8$, $y_2 = {}^3/_8$.

15) Durch Addition der beiden Gleichungen folgt $x + y + 6 = 10\sqrt{x}$ und durch Quadrieren der aus der zweiten folgenden Gleichung $\sqrt{3y} = 3\,(6 - 5\sqrt{x})$ ergibt sich $y = 108 - 180\sqrt{x} + 75x$, welcher Wert in $x + y + 6 = 10\sqrt{x}$ einzusetzen ist und $2x - 5\sqrt{x} + 3 = 0$ ergibt.

$x_1 = {}^9/_4$, $y_1 = {}^{27}/_4$; $x_2 = 1$, $y_2 = 3$.

$x_1\ y_1$ genügen, wenn $\sqrt{3y}$ im negativen Sinne genommen wird.

16) $\sqrt[3]{x} = \xi$, $\sqrt[3]{y} = \eta$; $x_1 = 1000 = y_2$; $x_2 = 8 = y_1$.

17) Aus der zweiten Gleichung folgt $y^{1/3} = x - x^{1/2}$, somit $y^{2/3} = x^2 - 2x^{3/2} + x$, dieser Wert ist nun in die erste Gl. einzusetzen.

$x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = 4$, $y_2 = 8$, $x_3 = 1$, $y_3 = 8$.

18) $\frac{x}{y} = \xi$, $\xi^2 + 4\xi = {}^{85}/_9$, $\xi_1 = {}^5/_3$, $\xi_2 = -{}^{17}/_3$; mit jeder dieser beiden Gleichungen ist nun $x - y = 2$ zu verbinden.

$x_1 = 5$, $y_1 = 3$, $x_2 = 1{\cdot}7$, $y_2 = -0{\cdot}3$.

19) Der ersten Gleichung kann man auch die Form

$(x^2 + 4y + 28) - 48 = 2\sqrt{x^2 + 4y + 28}$ geben,

$\sqrt{x^2 + 4y + 28} = 1 \pm 7$,

somit $x^2 + 4y + 28 = 64$, $x^2 + 4y + 28 = 36$,

$3x - 2y = 2$, $3x - 2y = 2$.

$x_1 = 4$, $y_1 = 5$; $x_2 = -10$, $y_2 = -16$,

$x_{3,4} = -3 \pm \sqrt{21}$, $y_{3,4} = \frac{-11 \pm 3\sqrt{21}}{2}$.

20) $(x^2 + 3y + 5) + 4\sqrt{x^2 + 3y + 5} = 60$; $\xi^2 + 4\xi = 60$,

$\xi_1 = 6$, $\xi_2 = -10$.

$x_1 = 5$, $y_1 = 2$; $x_2 = -{}^{53}/_7$, $y_2 = -{}^{430}/_{49}$.

$x_{3,4} = \frac{-9 \pm 4\sqrt{317}}{7}$, $y_{3,4} = \frac{-166 \pm 24\sqrt{317}}{49}$.

21) $\sqrt{6\,(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \xi$; $\xi = 9 - \frac{\xi^2}{12}$; $\xi_1 = 6$, $\xi_2 = -18$.

$x - y = (\sqrt{x} + \sqrt{y})\,(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 12$, somit

$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2$, $\sqrt{x} - \sqrt{y} = {}^2/_9$,

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 6$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 54$.

$x_1 = 16$, $y_1 = 4$; $x_2 = {}^{59536}/_{81}$, $y_2 = {}^{58564}/_{81}$.

Digitized by Google

22) Man substituiere $y = xt$ und dividiere die eine Gleichung durch die andere.

$225\,t^2 - 348\,t + 64 = 0,\ t_1 = {}^4/_3,\ t_2 = {}^{16}/_{75},$

oder man addiere beide Gleichungen;

$2x + 3y = \pm 18.$

$x_1 = 3,\ y_1 = 4,\ x_2 = {}^{75}/_{11},\ y_2 = {}^{16}/_{11};\ x_3 = -3,$

$y_3 = -4,\ x_4 = -{}^{75}/_{11},\ y_4 = -{}^{16}/_{11}.$

23) Man multipliziert die zweite Gleichung mit 4 und verbindet sie additiv und subtraktiv mit der ersten Gleichung;

$y = xt;$ oder $x = \frac{28-y^2}{y}$ gibt $4y^4 - 113y^2 + 784 = 0,$

$x_{1,2} = \pm 3;\ y_{1,2} = \pm 4,\ x_{3,4} = \pm {}^9/_2,\ y_{3,4} = \pm {}^7/_2.$

24) $x_{1,2} = \pm 5;\ y_{1,2} = \pm 3,\ x_{3,4} = \pm {}^{81}/_{39}\sqrt{39} = \pm 4{\cdot}963973;$

$y_{3,4} = \pm {}^{19}/_{39}\sqrt{39} = \pm 3{\cdot}042435.$

25) Am einfachsten mit der Substitution $y = xt$ oder $xy(x^2+y^2) = 300;$ $xy = \pm 12,$ somit $x^2 + y^2 = \pm 25$ und $2xy = \pm 24.$ Verbindet man nun beide Gleichungen additiv und subtraktiv, so erhält man vier quadratische Gleichungssysteme.

$x_{1,2} = \pm 3,\ y_{1,2} = \pm 4,\ x_{3,4} = \pm 3\,i,\ y_{3,4} = \pm 4\,i.$

$x_{5,6} = \pm 4,\ y_{5,6} = \pm 3,\ x_{7,8} = \pm 4\,i,\ y_{7,8} = \pm 3\,i.$

26) Geordnet erhält man $2x^2 + 2xy + 3y^2 = 15,\ x^2 - 2xy + 2y^2 = 2.$ Für $x = yt$ ergibt sich $t_1 = 2,\ t_2 = {}^{12}/_{11},$ somit

$x_1 = 2,\ y_1 = 1,\ x_2 = -2,\ y_2 = -1;$

$x_{3,4} = \pm {}^{12}/_{61}\sqrt{61} = \pm 1{\cdot}536443,$

$y_{3,4} = \pm {}^{11}/_{61}\sqrt{61} = \pm 1{\cdot}408406.$

27) Die zweite Gleichung gibt $x^2 - 4x = -5y$ und dadurch erhält man aus der ersten Gleichung $y_{1,2} = -1,\ y_{3,4} = 12,$ daher

$x_1 = -1,\ x_2 = 5,\ x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{-56}.$

28) $x + 2\sqrt{xy} + y = \sqrt{x} + \sqrt{y} + 42;\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = \xi,\ \xi^2 - \xi = 42,$

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 7,\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = -6.$

$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1,\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1.$

$x_1 = 16,\ y_1 = 9,\ x_2 = {}^{25}/_4,\ y_2 = {}^{49}/_4.$

29) Die erste Gleichung gibt zunächst $\frac{10x - 7y}{x} = \frac{10x}{x+y},\ 7y^2 = 3xy$ daraus $y = 0$ und $x = \frac{7y}{3},$ mit diesen folgt aus der zweiten Gleichung:

$x_{1,2} = {}^7/_9\,(1 \pm 2\sqrt{-2}),\ y_{1,2} = {}^1/_3\,(1 \pm 2\sqrt{-2});$

$x_3 = -1,\ y_3 = 0.$

Digitized by Google

30) $\sqrt{\frac{3x}{x+y}} = \xi$, $\xi + \frac{1}{\xi} = 2$; $\xi = 1$. Daraus $y = 2x$.
$x_1 = 6$, $y_1 = 12$; $x_2 = -4^1/_2$, $y_2 = -9$.

31) $x + y = \eta$, $\eta + \sqrt{\eta} = 30$, $x + y = 25$ und $x + y = 36$.
$(x^3 + y^3) : (x + y) = x^2 - xy + y^2$, somit $x^2 - xy + y^2 = 325$,
$x^2 - xy + y^2 = {}^{8125}/_{36}$, $x + y = 25$, $x + y = 36$,
$x_1 = 20 = y_2$, $x_2 = 5 = y_1$, $x_{3,4} = \frac{324 \pm \sqrt{-10617}}{18} = y_{4,3}$.

32) Die erste Gleichung gibt $3x(7x - 3y) = 0$.
$x_1 = 0$, $y_1 = 1$, $x_2 = 3$, $y_2 = 7$; $x_3 = {}^1/_3$, $y_3 = {}^7/_9$.

33) Multipliziert man die erste Gleichung mit $x - y$, so
$(x^2 - y^2) - \sqrt{x^2 - y^2} = 306$, $\xi^2 - \xi = 306$; $\xi_1 = 18$, $\xi_2 = -17$,
$x_{1,2} = \pm 30$, $y_{1,2} = \pm 24$; $x_{3,4} = \pm\sqrt{882 \cdot 5} = \pm 29 \cdot 706902$,
$y_{3,4} = \pm\sqrt{593 \cdot 5} = \pm 24 \cdot 361855$.

34) Setzt man die aus der ersten Gleichung für $\sqrt{x - y}$ erhaltenen Werte in die zweite Gleichung ein, so erhält man auch zwei Werte für $\sqrt{x + y}$.
$x_1 = {}^{13}/_2$, $y_1 = {}^5/_2$; $x_2 = {}^{293}/_{18}$, $y_2 = {}^{285}/_{18}$.

35) Aus $x^2 + y^2 + 3xy = 19$ folgt $x^2 + y^2 + 2xy = 19 - xy$
somit $x + y = \pm\sqrt{19 - xy}$;
und aus $x + y + 2xy = 10$ folgt $x + y = 10 - 2xy$, somit
$(10 - 2xy)^2 = 19 - xy$ und daraus

$$(xy)_1 = \frac{27}{4},\ (xy)_2 = 3.$$

Setzt man diese Werte in die zweite Gleichung ein, so erhält man

$$x + y = -\frac{7}{2},\ x + y = 4$$

und nun sind $x + y = -\frac{7}{2}$, $xy = \frac{27}{4}$; $x + y = 4$, $xy = 3$ aufzulösen.

Oder man ersetzt in $(x + y)^2 = 19 - xy$ das xy durch den aus der zweiten Gleichung folgenden Wert $xy = \frac{10 - (x+y)}{2}$, wodurch man $2(x + y)^2 - (x + y) = 28$ erhält.
$x_1 = y_2 = 3$, $x_2 = y_1 = 1$; $x_{3,4} = y_{4,3} = {}^1/_4$, $(-7 \pm i\sqrt{59})$.

36) Addiert man beide Gleichungen, so erhält man:
$(x - 2y)^2 - 2(x - 2y) = 35$, daraus läßt sich $x - 2y$ bestimmen
$x_1 = 5$, $y_1 = 5$; $x_2 = 3$, $y_2 = 4$; $x_{3,4} = 4 \pm \sqrt{-71}$.
$y_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{-71}}{2}$.

Digitized by Google

37) Addiert man beide Gleichungen, so erhält man
$3(x+y)^2+5(x+y)=100$,
$x_1=2,\ y_1=3;\ x_2=-\frac{1}{3},\ y_2=5\frac{1}{3};$
$x_3=5{\cdot}394644,\ y_3=-12{\cdot}061311,$
$x_4=-3{\cdot}727977,\ y_4=-2{\cdot}938689.$

38) Zieht man die zweite Gleichung von der ersten ab, so
$(x+2y)^2-6(x+2y)=-8.$
$x_1=2,\ y_1=1;\ x_2=-2,\ y_2=3;\ x_3=-6{\cdot}165525,$
$y_3=4{\cdot}082763,\ x_4=18{\cdot}165525,\ y_4=-8{\cdot}082763.$

39) Aus der zweiten Gleichung folgt $3xy=57(x+y)-633.$
Addiert man hiezu die erste Gleichung, so
$(x+y)^2-57(x+y)=-572.$
$x_1=9,\ y_1=4;\ x_2=4,\ y_2=9;\ x_{3,4}=22\pm\sqrt{-141}=y_{4,3}.$

40) Quadriert man die zweite Gleichung und multipliziert mit dem Nenner x, so erhält man $(x+y)+\sqrt{x+y}=30.$
$x_1=16=y_2,\ x_2=9=y_1;\ x_{3,4}=18\pm\sqrt{-155{\cdot}5}=y_{4,3}.$

41) Addiert man beide Gleichungen, so erhält man:
$2xy+10(x-y)=x^2+y^2+16,\ (x-y)^2-10(x-y)+16=0.$
$x_1=9\frac{1}{3},\ y_1=\frac{4}{3};\ x_2=4,\ y_2=-4;\ x_3=4,\ y_3=2;$
$x_4=-\frac{2}{3};\ y_4=-\frac{8}{3}.$

42) Erhebt man die zweite Gleichung zur 4ten Potenz und verbindet man damit die erste Gleichung, so:
$$690=2xy[2(x^2-2xy+y^2)+xy]$$
und wegen $x^2-2xy+y^2=4$
$345=xy(8+xy),\ xy=15$ und $xy=-23;$
aus diesen beiden Gleichungen und aus $x-y=2$ sind nun x und y zu bestimmen. Oder: Man setze $x=m+n,\ y=m-n,$ dann ist
$x^4+y^4=2m^4+12m^2n^2+2n^4=706$ und
$x-y=2n=2,$ daher $n=1$ und $m^4+6m^2=352$
$m_{1,2}=\pm 4,\ m_{3,4}=\pm\sqrt{-22}.$
die Wurzeln sind sonach:
$x_1=5,\ y_1=3;\ x_2=-3,\ y_2=-5;$
$x_{3,4}=1\pm\sqrt{-22},\ y_{3,4}=-1\pm\sqrt{-22}.$

43) Man multipliziere die zweite Gleichung mit 2 und subtrahiere dann die erste Gleichung: $5(x-y)^2-(x-y)=22.$
$x_1=4{\cdot}8,\ y_1=2{\cdot}6;\ x_2=-2{\cdot}6,\ y_2=-4{\cdot}8;$
$x_3=3,\ y_3=5;\ x_4=-5,\ y_4=-3.$

Digitized by Google

44) Bestimmt man zunächst aus der zweiten Gleichung $(x - {}^9/_2)^2 = 4\,(y - {}^{25}/_4)^2$ die Unbekannte x, so ergibt sich $x_1 = 17 - 2y$; $x_2 = 2y - 8$; diese Werte sind nun in die erste Gleichung einzusetzen.

$$x_1 = 4,\ y_1 = 6;\ x_2 = 2,\ y_2 = 5;\ x_3 = 1,\ y_3 = 8,$$
$$x_4 = 3,\ y_4 = 7.$$

45) Dividiert man die erste Gleichung durch die zweite:

$$\frac{\sqrt{x}\,(x\sqrt{x} + y\sqrt{y})}{\sqrt{y}\,(y\sqrt{y} + x\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = {}^2/_3,\ \sqrt{y} = {}^3/_2\sqrt{x},$$

nun setzt man diesen Wert in die erste Gleichung ein.

$$x_{1,2} = \pm 4,\ y_{1,2} = \pm 9.$$

46) Man bestimme aus der ersten Gleichung zunächst: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

$$x_1 = 6,\ y_1 = 2;\ x_2 = -2,\ y_2 = -6;\ x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{{}^{28}/_{19}},$$
$$y_{3,4} = -2 \pm \sqrt{{}^{28}/_{19}}.$$

47) Man bestimmt aus der zweiten Gleichung $\sqrt{12x + 12y - 11} = \xi$.

$12x + 12y - 11 = 25$ und $12x + 12y - 11 = 9$

und setzt die sich etwa für y daraus ergebenden Werte in die erste Gleichung ein. Kubiert man dann die erste Gleichung, so erhält man das erstemal

$$3\sqrt[3]{(6x+2)\,(14-6x)}\,[\sqrt[3]{6x+2} + \sqrt[3]{14-6x}] = 48$$

sonach $\sqrt[3]{(6x+2)\,(14-6x)} = 4,\ x_{1,2} = 1,\ y_{1,2} = 2$

und das anderemal

$$3\sqrt[3]{(6x+2)\,(6-6x)}\,[\sqrt[3]{6x+2} + \sqrt[3]{6-6x}] = 56,$$

also $\sqrt[3]{(6x+2)\,(6-6x)} = {}^{14}/_3;\ x_{3,4} = {}^1/_{27}\,(9 \pm \sqrt{-1734}) =$
$= {}^1/_{27}\,(9 \pm 41{\cdot}641326\,i),$

$y_{3,4} = {}^1/_{27}\,(36 \mp \sqrt{-1734}) = {}^1/_{28}\,(36 \mp 41{\cdot}641326\,i).$

48) Aus der ersten und dritten Gleichung bestimmt man zunächst y.

$$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{-1140},\ y_{1,2} = 34,\ z_{1,2} = x_{2,1}.$$
$$x_3 = 32 = z_4,\ y_{3,4} = 8,\ x_4 = 2 = z_3.$$

49) Setzt man den Wert von z aus der ersten Gleichung in die zweite und dritte ein, so $3y^2 - 2xy = 7$, $10y^2 - 18xy + 9x^2 = 10$, nun setzt man $x = yt$.

$$x_{1,2} = \pm {}^4/_{13}\sqrt{13},\ y_{1,2} = \pm {}^7/_{13}\sqrt{13},\ z_{1,2} = \mp {}^9/_{13}\sqrt{13}$$
$$x_{3,4} = \pm {}^{10}/_3,\qquad y_{3,4} = \pm 3,\qquad z_{3,4} = \pm 1.$$

Digitized by Google

50) Dividiert man die zweite und dritte Gleichung durch die erste, so erhält man

$\frac{x^2+z^2}{x^2+y^2}=2, \quad \frac{y^2+z^2}{x^2+y^2}={}^{13}/_{5}.$

Aus diesen Gleichungen folgt y^2-4x^2, $z^2=9x^2$, somit $y=\pm 2x$, $z=\pm 3x$ und $yz=+6x^2$, $yz=-6x^2$.

Mit diesen Werten geht die erste Gleichung über in

$\frac{5x^2}{6x^2}={}^{5}/_{12}, \quad \frac{5x^2}{-6x^2}={}^{5}/_{12}$, somit

$x=+2, \quad x=-2.$

Für $x=+2$ ist wegen $yz=+6x^2$, $y_1=+4$, $z_1=+6$,
$y_2=-4$, $z_2=-6$.

Für $x=-2$ ist wegen $yz=-6x^2$, $y_3=+4$, $z_3=-6$,
$y_4=-4$, $z_4=+6$.

Die Wurzeln sind demnach

$x_1=2$	$x_2=2$	$x_3=-2$	$x_4=-2$
$y_1=4$	$y_2=-4$	$y_3=4$	$y_4=-4$
$z_1=6$	$z_2=-6$	$z_3=-6$	$z_4=+6.$

51) $x+y+z=18..\alpha$, $xz=6y-1..\beta$, $x^2+z^2=2(y^2+1)..\gamma$.
$\gamma+2\beta$ gibt $(x+z)^2=2y^2+12y$, aus α folgt $x+z=18-y$, somit $(18-y)^2=2y^2+12y$; $y_1=6$, $y_2=-54$, daher sind die beiden Systeme $x+z=12$, $xz=35$ und $x+z=72$, $xz=-325$ aufzulösen.

$x_1=7$, $y_1=6$, $z_1=5$; $x_2=5$, $y_2=6$, $z_2=7$;

$x_{3,4}=36\pm\sqrt{1621}$, $y_{3,4}=-54$, $z_{3,4}=x_{4,3}$.

$x_3=76\cdot 261644$, $x_4=-4\cdot 26144$; $z_3=x_4$, $z_4=x_2$.

52) Addiert man die zweite und dritte Gleichung und subtrahiert von der Summe die erste Gleichung, so erhält man

$x^4-x^2=240$, $x_{1,2}=\pm 4$; $x_{3,4}=\pm i\sqrt{15}$;

$y_{1,2}=\pm 2$; $y_{3,4}=\pm\sqrt{35}$;

$z_1=\sqrt[4]{1}$, $z_2=2\sqrt[4]{2}$.

Da aber $\sqrt[4]{1}$ und $\sqrt[4]{2}$ vier Wurzeln haben, so ist auch jeder der angeführten Werte von x und y eine doppelte Wurzel.

53) Man subtrahiere die zweite Gleichung von der ersten und bestimme aus der dritten etwa z.

$x_{1,2}-4$, $y_{1,2}=\pm 5$, $z_{1,2}=6$; $x_{3,4}=-{}^{20}/_{13}$,
$y_{3,4}=\pm{}^{47}/_{13}$, $z_{3,4}=-{}^{102}/_{13}$.

54) Aus der ersten und dritten Gleichung folgt:

$$xz+yz=z(x+y)=5,$$

Digitized by Google

die zweite Gleichung gibt $x + y = 6 - z$, somit $z^2 - 6z + 5 = 0$ und $z_1 = 5$, $z_2 = 1$. Dadurch geht $z(x + y) = 5$ über in $x + y = 1$ und $x + y = 5$ und man hat die beiden Systeme

$$x + y = 1,\ xy = 6;\ x + y = 5,\ xy = 6$$

aufzulösen.

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-23}}{2},\ y_{1,2} = x_{2,1},\ z_{1,2} = 5;\ x_3 = 3 = y_4,$$
$$x_4 = 2 = y_3,\ z_{3,4} = 1.$$

55) Aus $x : y : z = 2 : 3 : 5$ folgt $y = \frac{3x}{2}$, $z = \frac{5x}{2}$. Mit diesen Werten ergibt sich aus $7x + 5y = 8u - 9$ nun $u = \frac{29x + 18}{16}$ und die erste Gleichung geht über in

$$3273x^2 + 1044x = 124092.$$

$x_1 = 6$, $y_1 = 9$, $z_1 = 15$, $u_1 = 12$.

$x_2 = -{}^{6894}/_{1091}, y_2 = -{}^{10341}/_{1091}, z_2 = -{}^{17235}/_{1091}, u_2 = -{}^{11268}/_{1091}$.

56) Aus der dritten und vierten Gleichung folgt $y = 14 - x$ und $u = 6 - z$; setzt man diese Werte in die zwei ersten Gleichungen ein und addiert dann dieselben, so erhält man $x^2 - 14x + 48 = 0$.

$x_{1,2} = 8$, $y_{1,2} = 6$, $z_1 = 4$, $z_2 = 0$, $u_1 = 2$, $u_2 = 6$.

$x_{3,4} = 6$, $y_{4,4} = 8$, $z_3 = 6$, $z_4 = 2$, $u_3 = 0$, $u_4 = 4$.

57) Man kann aus den Gleichungen 2, 3 und 4 u, y und z durch x ausdrücken und in die erste Gleichung einsetzen; man erhält

$$1089x_3 - 16690x^2 + 62001 = 0,$$

$x_{1,2} = \pm 3$, $y_{1,2} = \pm 4$, $z_{1,2} = \pm 5$, $u_{1,2} = \pm 6$,

$x_{3,4} = \pm {}^{83}/_{33}, y_{3,4} = \pm {}^{332}/_{99}, z_{3,4} = \pm {}^{415}/_{99}, u_{3,4} = \pm {}^{706}/_{99}$.

58) $x_1 = 4$, $y_1 = 1$; $x_2 = 1{\cdot}584963$, $y_2 = 2{\cdot}523719$.

59) $\frac{x+1}{x-1} \log y = 4 \log 2$, $x \log y = 6 \log 2$, daher $\frac{x+1}{x(x-1)} = {}^2/_3$.

$x_1 = 3$, $x_2 = -{}^1/_2$ und daraus folgt $y_1 = 4$, $y_2 = {}^1/_{4096}$.

60) Die erste Gleichung gibt $10^{4(x+2)} = 10^{4x^2}$, somit $4x^2 = 4(x + 2)$, die zweite Gleichung gibt $x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 = 16$, somit $4xy = 16$.

$x_1 = 2$, $y_1 = 2$; $x_2 = -1$, $y_2 = -4$.

61) $3^{y+2} = 9^{\frac{8-x}{x+1}} = 3^{\frac{16-2x}{x+1}}$, daher $\frac{16-2x}{x+1} = y + 2$,

$2^{y+2} = 8^{\frac{8^1/_2 - x}{x-1}} = 2^{\frac{10-3x}{x-1}}$, daher $\frac{10-3x}{x-1} = y + 2$ und

$x_1 = 2$, $y_1 = 2$

$x_2 = -13$, $y_2 = -{}^{11}/_2$.

Digitized by Google

62) $s^{\frac{y}{x+y}} \cdot r^{\frac{x}{x+y}} = \frac{r^{\frac{8}{15}} \cdot s^{\frac{1}{x}}}{r^{\frac{1}{x}}}$, $r^{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}} = r^{\frac{8}{15}}$ und $r^{\frac{7+y}{x}} = r^2$,

daher $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = {}^8/_{15}$ und $\frac{7+y}{x} = 2$.

$x_1 = 5,\ y_1 = 3,\ x_2 = {}^{21}/_{16},\ y_2 = -{}^{35}/_8$.

63) Setzt man $x^{\frac{1}{y-1}} = s$, so erhält man aus der ersten Gleichung $s_1 = 100,\ s_2 = {}^1/_{10}$, somit $x_1 = 10^{2(y-1)},\ x_2 = \frac{1}{10^{y-1}}$.

Aus der zweiten Gleichung folgt

$x = 100.10^{y-1} = 10^{y+1}$,

somit hat man $10^{y+1} = 10^{2(y-1)}$ und $10^{y+1} = \frac{1}{10^{y-1}}$;

$y_1 = 3,\ x_1 = 10000;\ y_2 = 0,\ x_2 = 10$.

64) Aus $3^y = \sqrt[x]{243}$ folgt $3^{xy} = 243 = 3^5$, somit ist $xy = 5$, dadurch geht die erste Gleichung über in

$3^x . 2^{\frac{5}{x}} = 2.3^5,\ \frac{2^{\frac{5}{x}}}{3^5} = \frac{2}{3^x},\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}^5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}^x}$ . . *a*)

somit $x_1 = 5$ oder $\frac{5}{3}^{\frac{1}{x}} = 1$ und $x_2 = \frac{\log 2}{\log 3}$

$y_1 = 1,\ y_2 = \frac{5 \log 3}{\log 2}$.

Denn beide Teile der Gleichung *a*) sind einander gleich, wenn entweder die Exponenten gleich sind oder die Basis 1 ist.

Oder: $x \log 3 + y \log 2 = \log 486$

$y \log 3 = \frac{1}{x} \log 243$.

Bestimmt man nun y aus der zweiten Gleichung und setzt den Wert in der ersten ein, so erhält man für x eine quadratische Gleichung.

65) $5^{\log x} = \xi,\ 3^{\log y} = \eta;\ \xi + \eta = 32,\ \xi\eta = 135$.

$x_1 = 111{\cdot}64046,\ y_1 = 29{\cdot}17248;\ x_2 = 10,\ y_2 = 1000$.

66) $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{y}} = \xi,\ 4\xi^2 - 11\xi + 6 = 0;\ \xi_1 = 2,\ \xi_2 = {}^3/_4$.

$\frac{1}{x} = 2^y,\ -\log x = y \log 2;\ x_1 = 0{\cdot}137609,\ y_1 = 2{\cdot}861353$.

$x_2 = 1{\cdot}667728,\ y_2 = 1{\cdot}777875$.

Digitized by Google

§ 8.

1) Ist x die Länge und y die Breite, so

$$xy = \frac{8x}{9} \cdot \frac{19y}{20} = 10{\cdot}08; \quad \frac{2x}{9} + \frac{2y}{20} = 8{\cdot}16.$$

$$x_1 = 35{\cdot}908, \; y_1 = 1{\cdot}804, \; x_2 = 0{\cdot}812, \; y_2 = 79{\cdot}8.$$

2) x Arbeiter zu y K Lohn.

$$xy = 65, \; (x-7)(y-0{\cdot}4) = 39{\cdot}6.$$

$x_1 = 25$, $y_1 = 2{\cdot}6$; $x_2 = 35^1/_2$ ist unbrauchbar.

3) Da $I = \frac{C.P}{100}$, so $\frac{xy}{100} = 600$, $\frac{(x-2000)(y-1)}{100} = 400$,

das erste Haus kostet 12000 K (5%) oder 10000 K (6%), das zweite 10000 K (4%) oder 8000 K (5%).

4) $\frac{1800xy}{100} = 360$, $\frac{1800(x-1)(y+1)}{100} = 360$, wo x die Prozente und y die Zeit bedeutet.

$x_1 = 5$, $y_1 = 4$, d. h. der Zinsfuß war anfangs 1·05 und die Zeit 4 Jahre; das andere System ist unbrauchbar.

5) $6x^2 + 6y^2 = 61{\cdot}5$, $x + y = 4{\cdot}5$.

$x_1 = {}^5/_2$, $y_1 = 2$, $x_2 = 2$, $y_2 = {}^5/_2$, daher $x^3{}_1 = {}^{125}/_8$, $y^3{}_1 = 8$, $x^3{}_2 = 8$, $y^3{}_2 = {}^{125}/_8$.

6) $x^2 + (x+9)^2 = y^2 + (y+13)^2$ oder $x(x+9) - y(y+13) = 44$ und $x(x+9) + y(y+13) = 180$ sind aufzulösen.

Die Katheten des einen Dreiecks sind 7 und 16, die des anderen 4 und 17 Zentimeter lang.

7) $(x^2 + y^2) - (x+y) = d$; $xy + (x+y) = s$; multipliziert man die zweite Gleichung mit 2 und addiert sie zur ersten, so kann man $x + y = \frac{-1 \pm \sqrt{8s+4d+1}}{2}$ erhalten. Setzt man $\frac{-1+\sqrt{8s+4d+1}}{2} = m$ und $\frac{-1-\sqrt{8s+4d+1}}{2} = n$, so ist $y = m - x$, $y = n - x$ und die zweite gegebene Gleichung geht über in $x^2 - mx = m - s$, $x^2 - nx = n - s$, daher

$$x_{1,2} = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} + m - s} = y_{2,1},$$

$$x_{3,4} = \frac{n}{2} \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} + n - s} = y_{4,3}.$$

Für die speziellen Werte $d = 54$, $s = 39$ ergibt sich

$$x_1 = 7, \; y_1 = 4, \; x_2 = 4, \; y_2 = 7;$$

$$x_{3,4} = -6 \pm \sqrt{-15} = y_{4,3}.$$

Digitized by Google

8) $\frac{x+3}{y+5} = {}^2/_3$, $\frac{x+9}{y+5} = \frac{y}{x}$; $x_1 = 3$, $y_1 = 4$, $x_2 = -{}^3/_5$, $y_2 = -{}^7/_5$, somit entspricht nur das erste System der Aufgabe.

9) $10x + y = 10y + x + 27$, $x^2 + y^2 + 2 = 7(x + y)$, $x_1 = 8$, $y_1 = 5$, $x_2 = 2$, $y_2 = -1$. Der Aufgabe entspricht nur das erste System, somit ist 85 die gesuchte Zahl.

10) A braucht allein x und B y Tage, zusammen brauchen sie $(x - n)$ Tage, daher ist, wenn die ganze Arbeit mit 1 bezeichnet wird

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x-n) = 1,\ x + y = 2m \text{ und daraus } x = \sqrt{2mn}.$$

Es braucht sonach A allein $\sqrt{2mn}$, B allein $2m - \sqrt{2mn}$ Tage und zusammen brauchen sie $\sqrt{2mn} - n$ Tage.

Speziell braucht A 16, B 24 Tage und zusammen $9^3/_5$ Tage.

11) M braucht bis zum Zusammentreffen x Sekunden und macht in einer Sekunde y Meter. N braucht $x - 3$ Sekunden und macht in einer Sekunde $y + 3$ Meter, daher

$$xy : (x - 3)(y + 3) = 25 : 27.$$
$$(x + 9)y = (x - 3)(y - 2) + 234.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $x = -6y + 120$, dieser Wert ist nun in die erste Gleichung einzusetzen.

M hat sich 30 Sekunden mit der Geschwindigkeit von 15 m, N 27 Sekunden mit der Geschwindigkeit von 18 m bewegt; die Entfernung ist 936 m. Das zweite Wurzelsystem ist unbrauchbar.

12) $F\Delta = 48$; $f_1 : f_2 = 7 : 9$, $f_1 + f_2 = 48$, $f_1 = 21$, $f_2 = 27$.

$$\frac{x+12}{2}\, y = 27,\quad \frac{x(8-y)}{3} = 21;$$

der Abstand beträgt 2·708497 und die parallele Gerade 7·937254 Meter.

13) $x : y = y : z$, $x + z = 2y + 8$, $3x = z + 4$.

$x_1 = 18$, $y_1 = 30$, $z_1 = 50$; $[x_2 = 2,\ y_2 = -2,\ z_2 = 2]$.

14) $x : y = y : z$, $x + y + z = 126$, $xyz = 13824$.

Da $y^2 = xz$ ist, so ist $y^3 = 13824$ und $y = 24\sqrt[3]{1}$. Die eine reelle Wurzel von $\sqrt[3]{1}$ ist 1, daher $y = 24$ und für diesen Wert erhält man

$$x_1 = 96,\ z_1 = 6,\ x_2 = 6,\ z_2 = 96.$$

Digitized by Google

15) $x + y + z = 28$, $x : y = y : z$, $y(x + z) = 160$.
$y_1 = 20$, $y_2 = 8$. Nur $y_2 = 8$ ergibt für x und z reelle Werte.
$16 : 8 = 8 : 4$, $4 : 8 = 8 : 16$.

16) $x + y + z = 48$, $\frac{x + \frac{z}{2}}{130} = \frac{y + \frac{z}{2}}{110}$, dazu kommt als dritte Gleichung die Beziehung zwischen Katheten und Hypothenuse $x^2 + y^2 = z^2$.
$x = 16$, $y = 12$, $z = 20$ Längeneinheiten; das andere Wurzelsystem ist unbrauchbar.

17) $x^2 + y^2 + z^2 = 104$, $y^2 = 2xz + 4$,
$100x + 10y + z = 594 = 100z + 10y + x$, $x_1 = 8$, $y_1 = 6$, $z_1 = 2$; 862; $x_2 = -2$, $y_2 = -6$, $z_2 = -8$; -268.

18) $x + y + z = 14$, $2y = xz - 1$, $x^2 + z^2 - 50 = 2y^2$. Aus der zweiten und dritten Gleichung folgt $(x + z)^2 = 2y^2 + 4y + 52$. Setzt man nun in diese Gleichung $(x + z)^2 = (14 - y)^2$ aus der ersten Gleichung ein, so $y^2 + 32y = 144$, $y = 4$; die andere Wurzel ist unbrauchbar.

$x = 9$ oder 1, $z = 1$ oder 9.

a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*
1	2	3	4	5	6	7	8	9,

somit Ida (Adi).

19) Ist x ein Schenkel, so ist $x_1 = \frac{5b}{6}$, $x_2 = \frac{b}{2}$; x_2 ist hier nicht zu brauchen, da für diesen Fall das Dreieck in eine Gerade übergeht.

$x_1 = \frac{5b}{6}$ gibt $b = s\sqrt{3}$, $h = \frac{4s\sqrt{3}}{6}$, $x = \frac{5s\sqrt{3}}{6}$.

$$h : x : b = 4 : 5 : 6.$$

§ 9. Unbestimmte Gleichungen.

1) Nach der Eulerschen Methode $x = 7n + 9$, $y = 1 - 5n$.
Nun muß $^1/_5 > n > -^9/_7$ sein, also $n = 0$ und -1.
$x_1 = 9$, $y_1 = 1$, $x_2 = 2$, $y_2 = 6$.

2) $x = 4 + 12n$, $y = 7n - 2$, $n = 1 + r$, $x = 16 + 12r$, $y = 5 + 7r$. r kann nur die Werte 1 und 0 annehmen, daher
$x_1 = 16$, $y_1 = 5$; $x_2 = 28$, $y_2 = 12$.

3) $^{128}/_{117} = \frac{x}{9} + \frac{y}{13}$, $13x + 9y = 128$; $x = 9m - 4$, $y = 20 - 13m$; setzt man $m = 1 - n$, so

Digitized by Google

$x = 5 - 9n$, $y = 7 + 13n$, da aber x und y positiv sein müssen, so

$^5/_9 > n > -^7/_{13}$, $n = 0$. $x = 5$, $y = 7$.

4) $\frac{z}{9} = a$, $\frac{z}{13} = b + {}^4/_{13}$; $9a = 13b + 4$, $a = 13n - 1$,

$z = 117n - 9$.

Aus $99 < 117n - 9 < 1000$ folgt, daß n nur die Werte 1, 2...8 annehmen kann, somit $z = 108, 225, 342, 459, 576, 693, 810, 927$.

5) $19x + 21y = 1000$. $x = 46 + 21n$, $y = 6 - 19n$; $n = 0, -1, -2$.

$x = 46, 25, 4$, $y = 6, 25, 44$.

6) $6x + 3 \cdot 25y = 50 \cdot 5 \cdot 78$ oder $24x + 13y = 1156$.

$x = 13n - 6$ (Buchenholz), $y = 100 - 24n$ (Fichtenholz).

Wegen $^{100}/_{24} > n > {}^6/_{13}$ kann n nur 4, 3, 2, 1 bedeuten.

$x = 46, 33, 20, 7$,

$y = 4, 28, 52, 76$, somit entsprechen $x = 46$ und $y = 4$.

7) $800x + 750y = 650 \cdot 25$, $16x + 15y = 325$; $x = 10 - 15n$, $y = 11 + 16n$. Da die Legierung nur 25 Kilogramm betragen soll, so kann n keinen anderen Wert als 0 haben; somit $x = 10$, $y = 11$ und 4 Kilogramm Kupfer.

8) $10x + 5y + z = 768$, $y = 2x + 2z$, daraus

$20x + 11z = 768$; $x = 1 + 11n$, $y = 138 - 18n$,

$z = 68 - 20n$.

Da $^{68}/_{20} > n > -{}^1/_{11}$, so $n = 0, 1, 2, 3$ und

x (10 K):	1	12	23	34
y (5 K):	138	120	102	84
z (1 K):	68	48	28	8.

9) $10x + 11y + 14z = 3829$, $z = x + 3$.

$x = 11n - 4$, $y = 353 - 24n$, $z = 11n - 1$.

Aus $10(11n - 4) > 800$ und $14(11n - 1) > 800$,

$11(353 - 24n) > 800$ folgt $n = 11, 10, 9, 8$, somit

x =	117,	106,	95,	84	oder 1. Faß 1170, 1060, 950, 840,
y =	89,	113,	137,	161	2. Faß 979, 1243, 1507, 1771,
z =	120,	109,	98,	87	3. Faß 1680, 1526, 1372, 1218.

10) Eliminiert man aus beiden Gleichungen eine Unbekannte, etwa z, so $49x - 23y = 715$, setzt man die sich daraus ergebenden Werte von x und y etwa in die erste Gleichung ein, so erhält man

$x = 16 + 23n$, $y = 3 + 49n$, $z = 5 + 53n$.

Digitized by Google

11) Eliminiert man x, so $84y - 91z = 35$, $y = 13a - 5$, $z = 12a - 5$, setzt man diese Werte in die zweite Gleichung ein, so

$$x = 6a + 2 + \frac{a+2}{3}, \quad a = 3b - 2.$$

$x = 19b - 10$, $y = 39b - 31$, $z = 36b - 29$, oder da $b > 1$ sein muß, $b = 1 + n$, $x = 9 + 19n$, $y = 8 + 39n$, $z = 7 + 36n$.

12) Eliminiert man y: $71x - 52z = 199$, setzt man die sich ergebenden Werte $x = 5 + 52a$, $z = 3 + 71a$ in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$y = 4 + 73a + \frac{3a}{5}, \text{ für } a = 5n \text{ ist dann}$$

$x = 5 + 260n$, $y = 4 + 368n$, $z = 3 + 355n$, wo $n = 0, 1, 2$;
$x = 5, 265, 525$, $y = 4, 372, 740$, $z = 3, 358, 713$.

13) $\frac{z}{4} = a + {}^3/_4$, $\frac{z}{9} = b + {}^3/_9$, $\frac{z}{7} = c$; aus $4a = 9b$ folgt $b = 4p$.

$a = 9p$, $7c = 4a + 3 = 36p + 3$, $\frac{p+3}{7} = r$, $p = 7r - 4$.

$z = 252r - 105 = 147 + 252n$, wo $n = 0, 1, 2, 3$, daher
147, 399, 651, 903.

14) $x + y + z = 24$, $7x + 9y + 3z = 148$.
$x = 19 - 3n$, $y = 2n$, $z = 5 + n$, wo $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
$x = 16, 13, 10, 7, 4, 1$,
$y = 2, 4, 6, 8, 10, 12$,
$z = 6, 7, 8, 9, 10, 11$.

15) $x + y + z = 100$, $100x + 40y + 24z = 6400$.
$x = 4n$, $y = 250 - 19n$, $z = 15n - 150$, n kann nur 12 sein.
$x = 48$, $y = 22$, $z = 30$.

16) $x + y + z = 120$, $10x + 13y + 18z = 1600$. Eliminiert man aus beiden Gleichungen z, so erhält man $8x + 5y = 560$, sonach $x = 5n$, $y = 112 - 8n$, $z = 3n + 8$, da $14 > n > 0$, so kann n die Werte 1, 2,..13 annehmen.

17) $\frac{Z}{11} = a + {}^2/_{11}$, $\frac{Z}{13} = b + {}^{12}/_{13}$, $\frac{Z}{19} = c + {}^{18}/_{19}$.
Aus $11a + 2 = 13b + 12$ folgt $a = 13p - 5$.
$19c + 18 = 143p - 53$ gibt $c = 143n + 64$, somit
$Z = 2717n + 1234$,
da $n = 0, 1$, so Z 1234, 3951.

18) ${}^{674}/_{385} = \frac{x}{5} + \frac{y}{7} + \frac{z}{11}$, da $385 = 5.7.11$.
$x + y + z = 14$; $x = 2 - 10n$, $y = 21n + 5$,
$z = 7 - 11n$, $n = 0$. ${}^{674}/_{385} = {}^2/_5 + {}^5/_7 + {}^7/_{11}$.

Digitized by Google

19) $^{848}/_{1001} = \frac{x}{7} + \frac{y}{11} + \frac{z}{13}$, $x + y + z = 9$.

$x = 1 - 7n$, $y = 6 + 33n$, $z = 2 - 26n$, $n = 0$

$^{848}/_{1001} = {}^{1}/_{7} + {}^{6}/_{11} + {}^{2}/_{13}$.

20) $\frac{a+1}{19} = x + {}^{18}/_{19}$, $\frac{a+9}{28} = y + {}^{12}/_{28}$, $\frac{a+3}{15} = z + {}^{7}/_{15}$.

$a = 19x + 17 = 28y + 3 = 15z + 4$.

$19x = 28y - 14$, $x = 2y - 1 - 5\,\frac{2y-1}{19}$

$\frac{2y-1}{19} = r$, $y = 9r + \frac{r+1}{2}$, $\frac{r+1}{2} = s$, $r = 2s - 1$, somit

$y = 19s - 9$ und

$28\,(19s - 9) + 3 = 15z + 4$, daraus

$z = 35s - 17 + \frac{7s+2}{15}$, $\frac{7s+2}{15} = t$, $s = 2t + \frac{t-2}{7}$,

$\frac{t-2}{7} = n$, $t = 7n + 2$, $z = 532n + 125$ und

$a = 7980n + 1879$,

der Grenzen wegen kann n nur 0 sein, also

$a = 1879$.

§ 10. Arithmetische Progressionen.

1) $[2a + {}^{1}/_{2}\,(n-1)]\,n = 162$, $4a + {}^{1}/_{2}\,(4n+6) = 124 - 81 = 43$. Aus der zweiten Gleichung erhält man $2a = 20 - n$, somit geht die erste Gleichung über in $n^2 - 39n + 324 = 0$.

$n_1 = 27$, $n_2 = 12$, $a_1 = -\,{}^{7}/_{2}$, $a_2 = 4$.

Den Bedingungen der Aufgabe entspricht nur $n = 12$ und $a = 4$.

2) Es sind a und n zu bestimmen aus $z = a + (n-1)\,d$, $S = (a + z)\,\frac{n}{2}$.

$$n = \frac{(2z+d) \pm \sqrt{(2z+d)^2 - 8dS}}{2d},\quad a = \frac{d \mp \sqrt{(2z+d)^2 - 8dS}}{2},$$

$n = 42$, $a = 7$. Der andere Wert von $n = 43 \cdot 8$ ist unbrauchbar, da n nur eine ganze Zahl sein kann.

3) $13\,(2a + 25d) = 728$, $a + 4d = 11$.

$d = 2$, $a = 3$. Das 26. Glied beträgt 53 und das 21. Glied der Reihe ist 43.

4) $S_{20} = 10\,(4 + 19.3) = 610$. Die Summe der eingeschalteten Glieder ist 609 und mit dem ersten Gliede 2 und dem letzten 5 ist sie 616.

Digitized by Google

$\frac{n}{2}[4 + (n-1)\,d_1] = 616$, $2 + (n-1)\,d_1 = 5$; $n = 176$ und $n_1 = n - 2 = 174$, $d_1 = {}^3/_{175}$, die Reihe ist:

2), $2^3/_{175}$, $2^6/_{175}$, $\ldots 4^{172}/_{175}$, (5.

5) $a + (a+d) + (a+2d) = 21$; $(2a+d) : (2a+3d) = 3 : 4$. Die drei Zahlen sind 5, 7, 9.

6) $4a + 20d = -12$, $2a + 12d = -7$, somit $a = -{}^1/_2$, $d = -{}^1/_2$.
$\frac{n}{20}[2a + (n-1)\,d] = a + nd$, $n = 20$, daher das 21. Glied.

7) $3a + 3d = 36$, $3a^2 + 6ad + 5d^2 = 482$; 7, 12, 17; 17, 12, 7.

8) $2a + 8d = 28$, $(a+2d)\,(a+9d) = 232$; $d_1 = 3$, $a_1 = 2$, $d_2 = {}^6/_5$, $a_2 = 9^1/_5$.

9) $2a + 8d = 46$, $(a+d) : (a+5d) = 2 : 7$, $d = 5$, $a = 3$.
$\frac{n}{2}(5n + 1) = 1575$; $n = 25$; $n = -{}^{126}/_5$ ist unbrauchbar.

10) $2a + 3d = s$, $(a+d)\,(a+2d) = p$, oder bezeichnet man das 2. Glied mit b, so $2b + d = s$, $b\,(b+d) = p$; $b = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$.

$d = \pm\sqrt{s^2 - 4p}$, $a = \frac{s \mp 3\sqrt{s^2-4p}}{2}$, $S_5 = {}^5/_2[s \pm \sqrt{s^2 - 4p}]$.

$d = \pm 14$, $a_1 = -13$, $a_2 = 29$; $S_5 = 75$, $S'_5 = 5$.

11) $2a + 8d = 18$, $(a+5d)^2 = 121$.
$d_1 = 2$, $d_2 = -20$, $a_1 = 1$, $a_2 = 89$. $S_{10} = 100$, $S'_{10} = -10$.

12) *a*) $5x = 10$, $(x-2d)\,(x-d)\,x\,(x+d)\,(x+2d) = 1440$.
Da $x = 2$, so $d^4 - 5d^2 = 176$ und $d^2 = \frac{5 \pm 27}{2}$, $d = \pm 4$, $d = \pm i\sqrt{11}$, es genügen daher vier Reihen:

$-6, -2, 2, 6, 10$; $2 - 2\sqrt{-11}$, $2 - \sqrt{-11}$, 2, $2 + \sqrt{-11}$, $2 + 2\sqrt{-11}$,

$10, 6, 2, -2, -6$; $2 + 2\sqrt{-11}$, $2 + \sqrt{-11}$, 2, $2 - \sqrt{-11}$, $2 - 2\sqrt{-11}$.

b) Sei das vierte Glied x, so
$(x-3d)\,(x-d)\,(x+d)\,(x+3d) = 105$ und
$x - 3d + x + 3d = 8$,
daraus $x = 4$ und $9d^4 - 160d^2 + 151 = 0$.

$d_{1,2} = \pm {}^1/_3\sqrt{151}$, $d_{3,4} = \pm 1$.

$a = x - 3d$,

$a_{1,2} = 4 \mp \sqrt{151}$; $a_{3,4} = 4 \mp 3$.

13) $(a+13d)\,a = 276$, $(a+6d)\,(a+7d) = 1326$.

Digitized by Google

Zieht man die erste Gleichung von der zweiten ab, so erhält man $d = \pm 5$, mit diesen Werten von d erhält man aus der ersten Gleichung $a^2 + 65a = 276$, $a^2 - 65a = 276$, $a_1 = 4$, $a_2 = -69$, $a_3 = 69$, $a_4 = -4$, somit vier Reihen:

$$4,\quad 9,\quad 14\ldots\quad 69;\quad -69,\quad -64,\ldots\quad -4;$$
$$-4,\quad -9,\quad -14\ldots\quad -69;\quad 69,\quad 64,\ldots\quad 4.$$

14) $2\,(4a + 6d) = 4a + 22d$.

$a\,(a + 2d) - 10 = 5\,(a + 6d)$, $d_1 = 4$, $d_2 = -\frac{2}{9}$, $a_1 = 10$, $a_2 = -\frac{5}{9}$.

$$10,\ 14,\ldots 38;\quad -\tfrac{5}{9},\ -\tfrac{7}{9}\ldots -\tfrac{19}{9}.$$

15) $2a + 7d = 41$, $a\,(a + 7d) = 114$.

$a_1 = 38$, $a_2 = 3$, $d_1 = -5$, $d_2 = 5$.

38) $37\frac{1}{6}$, $36\frac{2}{6}$, ... (33, 3) $3\frac{5}{6}$, $4\frac{4}{6}$. ... (8.

16) $(x + 3d)\,(x + 10d) = 18\frac{1}{2}$, $a + 5d = 6$.

$d_1 = \frac{5}{21}$, $d_2 = -\frac{7}{10}$, $a_1 = -6\frac{1}{2}$, $a_2 = 9\frac{1}{2}$.

$\delta_1 = \frac{1}{4}$, $S_{55} = 0$; $\delta_2 = -\frac{7}{100}$, $S_{55} = 407{\cdot}04$.

17) $2a + 17d = 204$, $2a + 11d = 228$, $a = 136$, $d = -4$.

$\frac{n}{2}\,[2a + (n - 1)\,d] = n\,(138 - 2n) = 1368$, $n = 12$;

136 *K*, 92 *K*.

$n = 57$ ist unbrauchbar, da dabei negative Einlagen resultieren.

18) $\frac{100a + 10\,(a + d) + (a + 2d)}{3a + 3d} = 26$,

$100a + 10\,(a + d) + (a + 2d) + 396 =$

$100\,(a + 2d) + 10\,(a + d) + a$.

$a = 4$, $d = 2$, 468.

19) $(a + 2d) + (a + 13d) = 32$, $(a + 6d) + (a + 24d) = 20$.

$d = -\frac{4}{5}$, $a = 22$, $S_{25} = 310$; $20\frac{2}{5}$, $17\frac{1}{5}$, $11\frac{3}{5}$, $2\frac{4}{5}$.

20) $S_1 + S_2 = 870 = \frac{n}{2}\,(165 - 5n) + \frac{n-3}{2}\,(56 + 6n)$,

$n = 9$, somit nach 9 Tagen, der erste macht 540, der zweite 330 Kilometer; $n = -212$ ist unbrauchbar.

21) $\frac{n}{2}\,[22 - (n - 1)] = \frac{n - 3}{2}\,[20 + (n - 4)]$.

$n = 8$, $AB = 60\,m$.

22) $s = a + (n - 1)\,d$, daher $a = s - (n - 1)\,d$.

$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2s - d(n-1)] = \frac{n}{2}\,[18 - \frac{2}{3}(n-1)]$.

$n\,(54 - 2n + 2) = 64.6 = 384$.

$n = 12$, $a = \frac{5}{3}$; $n = 16$ ist nicht brauchbar, da es $a = -1$ ergibt.

Digitized by Google

23) $S = \frac{gt^2}{2} = (4 \cdot 5 - t).333$, wo $g = 9 \cdot 808\, m$ = Akzeleration der Schwere.

$t = 4 \cdot 23577$, daher $0 \cdot 26423 \times 333 = 87 \cdot 988\, m$.

$t_1 = 5 \cdot 97409$; $0 \cdot 52591 \times 332 \cdot 8 = 175 \cdot 025\, m$.

24) $S_1 = \frac{x}{2}[80 - 4\,(x-1)]$; $S_2 = \frac{x-2}{2}[66 + 5\,(x-3)]$.

$S_1 + S_2 = 342$.

$x^2 + 125x = 786$; $x_1 = 6$; x_2 ist unbrauchbar.

Somit 6 Tage nach Abgang des A und 180 Kilometer von P entfernt.

25) $ct + \frac{gt^2}{2} + c't - \frac{g't^2}{2} = d$.

$t^2(g - g') + 2(c + c')t = 2d$; diese Gl. ist nach t aufzulösen.

$t = \frac{-(c+c') \pm \sqrt{(c+c')^2 + 2d(g-g')}}{g-g'}$, doch ist nur das obere Zeichen zulässig, $t = 10$ Sekunden, A hat $700\, m$ zurückgelegt.

§ 11. Geometrische Progressionen.

1) a, q, S sind gegeben, s und n sind aus $S = a\frac{q^n - 1}{q - 1}$ und $S = \frac{qs - a}{q - 1}$ zu bestimmen.

$$n = \frac{\log[S(q-1)+a] - \log a}{\log q}, \quad s = \frac{S(q-1)+a}{q}.$$

Ist s bekannt, so kann man n auch leicht aus $s = a\,q^{n-1}$ finden.

$$n = 5,\ s = \frac{81}{16}.$$

2) $q = {}^1/_2$, $s = {}^3/_8$, $S = {}^{1533}/_8$, a und n sind zu bestimmen.

$a = sq - S(q-1) = 96$,

$n = \frac{\log s - \log[sq - S(q-1)]}{\log q} + 1 = 9$.

Ist a bekannt, so kann man n leicht aus $s = a\,q^{n-1}$ finden, z. B.

${}^3/_8 = 96\,({}^1/_2)^{n-1}$, $\frac{1}{2^8} = ({}^1/_2)^{n-1} = ({}^1/_2)^8$, $n - 1 = 8$, $n = 9$.

3) q ist $-\left(\frac{a}{b}\right)^2$ und da $b > a$, so ist die Reihe fallend, also

$$S = \frac{\frac{a}{b}}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{ab}{a^2 + b^2};\ S_4 = \frac{a}{b^7}(a^4 + b^4)(b^2 - a^2).$$

Digitized by Google

4) $\frac{a^2}{b}(1+x-x^2-x^3)=\frac{a^2}{b}(1+x)(1-x^2)$;

$\frac{a^2}{b}(1+x)(1-x^2).q^4=\frac{b^3(1-x)}{a^2(1+x)^3}$.

$q^4=\frac{b^4}{a^4(1+x)^4}$, $q=\frac{b}{a(1+x)}$ und die Reihe ist:

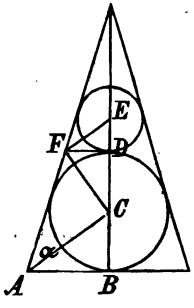
$\frac{a^2}{b}(1+x)(1-x^2)$, $a(1-x^2)$, $b(1-x)$, $\frac{b^2(1-x)}{a(1+x)}$, $\frac{b^3(1-x)}{a^2(1+x)^2}$.

$S=a\frac{q^5-1}{q-1}=\frac{(1-x)[b^5-a^5(1+x)^5]}{a^2b(1+x)^2[b-a(1+x)]}$.

Da eigentlich $q=\frac{b}{a(1+x)}\sqrt[4]{1}$ ist und $\sqrt[4]{1}$ vier verschiedene Wurzeln $1, -1, +i, -i$ hat, so gibt es vier verschiedene Reihen.

5) $^5/_{32}+^5/_2+2^5/_{16}=4^{27}/_{32}=\frac{qz-a}{q-1}=\frac{\frac{5}{2}q-\frac{5}{32}}{q-1}$; daraus folgt $q=2$ und wegen $\frac{5}{2}=q^{n-1}.\frac{5}{32}$ ist $n=5$, somit sind drei Glieder, und zwar $^5/_{16}$, $^5/_8$, $^5/_4$ einzuschalten.

Fig. 1.



6) Bezeichnet man CD mit ϱ_1 und DE mit ϱ_2, so ist $f=\pi\varrho_1^2+\pi\varrho_2^2+\ldots\ldots$

da $< DFA=180-\alpha$ ist, so $BC=\varrho_1=a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

$\varrho_2=DF\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\varrho_1=DF\operatorname{tg}\frac{180-\alpha}{2}=\frac{DF}{tg\frac{\alpha}{2}}$

somit $\frac{\varrho_2}{\varrho_1}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\varrho_3}{\varrho_2}=tg^2\frac{\alpha}{2}$,

$\varrho_2=\varrho_1\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=a\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}$.

$\varrho_3=a\operatorname{tg}^5\frac{\alpha}{2}$

$$f=\pi a^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\left[1+\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^8\frac{\alpha}{2}+\ldots\right]=$$

$$\pi a^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\frac{1}{1-tg^4\frac{\alpha}{2}}=\pi a^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2})(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2})}=$$

$$\frac{\pi a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pi a^2\sin^2\alpha}{4\cos\alpha}=\frac{\pi a^2}{4}\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha.$$

Oder $AB:FD=h:(h-2\varrho_1)$

$a:a_1=1:\left(1-\frac{2\varrho_1}{h}\right)$, $a_1=a\left(1-\frac{2\varrho_1}{h}\right)$.

Digitized by Google

$$a_1 = a\left(1 - \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}\right) = a\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}, \text{ da } \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\alpha} = 1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2},$$

daher $\varrho_2 = a_1 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = a\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}$,

$$\varrho_3 = a_2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = a\operatorname{tg}^5\frac{\alpha}{2}.$$

7) $a + aq + aq^2 = 13$; $a^2q^2 = 9$; aus der zweiten Gleichung folgt $aq = \pm 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 9$, $q_1 = 3$, $q_2 = {}^1/_3$; $a_{3,4} = 8 \pm \sqrt{55}$, $q_{3,4} = \frac{-8 \pm \sqrt{55}}{3}$, daher sind die drei Zahlen

1, 3, 9; 9, 3, 1; $8 \pm \sqrt{55}$, -3, $8 \mp \sqrt{55}$.

8) $a + aq + aq^2 = 155 \ldots \alpha$ $\quad \frac{\alpha}{\beta}$ $\quad \frac{q^2+q+1}{q^2-1} = {}^{31}/_{24}$.
$aq^2 - 120 = a \ldots \beta$

$q_1 = 5$, $q_2 = -{}^{11}/_7$, $a_1 = 5$, $a_2 = {}^{245}/_3$.

5, 25, 125; ${}^{245}/_3$, $-{}^{385}/_3$, ${}^{605}/_3$.

$5, \pm 5\sqrt{5}, 25, \pm 25\sqrt{5}, 125$; ${}^{245}/_3$, $\pm i\,{}^{245}/_3\sqrt{{}^{11}/_7}$, $-{}^{385}/_3$, $\mp i\,{}^{385}/_3\sqrt{{}^{11}/_7}$, ${}^{605}/_3$.

9) $a + aq^2 = {}^5/_2\, aq$.

$100aq^2 + 10aq + a - 297 = 100a + 10aq + aq^2$; 421, -124.

10) $(aq^2 - aq) : (aq - a) = 6 : 1 \ldots \alpha$,
$a + aq + aq^2 = 63 \ldots \beta$.

Aus α erhält man $q_1 = 2$, $q_2 = -3$, daher $a_1 = a_2 = 9$.

9, 18, 36, 72, ...; 9, -27, 81, -243, ...

11) $a + aq^2 = 4097 \ldots \alpha$ $\quad \frac{\alpha}{\beta}$ $\quad \frac{1+q^2}{q(1+q)} = \frac{q^2-q+1}{q} = {}^{4097}/_{272} = {}^{241}/_{16}$.
$aq + aq^2 = 272 \ldots \beta$

$q_1 = 16$, $q_2 = {}^1/_{16}$ und damit $a_1 = 1$, $a_2 = 4096$.

1, 16, 256, 4096; 4096, 256, 16, 1.

12) $a + aq + aq^2 = 28 \ldots \alpha$ $\quad$ Aus α: $a + aq^2 = 28 - aq$,
$aq(a + aq^2) = 160 \ldots \beta$ dadurch geht β über in

$$a^2q^2 - 28aq + 160 = 0,$$

$$aq = 20, \quad aq = 8.$$

$a_1 = 16$, $a_2 = 4$, $a_{3,4} = 4(1 \mp \sqrt{-24})$; $q_1 = {}^1/_2$, $q_2 = 2$,

$$q_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{-24}}{5}.$$

16, 8, 4; 4, 8, 16; $4(1 \mp \sqrt{-24})$, 20, $4(1 \pm \sqrt{-24})$.

13) $a.aq^2 = 100$, $aq + aq^2 = 50$; aus $a^2q^3 = 100$ folgt $aq = \pm 10$,
$a_1 = {}^5/_2$, $a_2 = {}^5/_3$; $q_1 = 4$, $q_2 = -6$.

${}^5/_2$, 10, 40, 160, 640, ...; ${}^5/_3$, -10, 60, -360, 2160, ...

14) $a + z = -2920 \ldots \alpha$, $az = 11664 \ldots \beta$, $S = -4372$.

Aus α und β ergibt sich $z_1 = -4$, $z_2 = -2916$, $a_1 = -2916$,

Digitized by Google

$a_2 = -4$. $S = \frac{qz-a}{q-1} = -4372$ gibt $q_1 = {}^1/_3$, $q_2 = 3$ und $z = aq^{n-1}$ gibt für z_1, a_1, q_1, oder für z_2, a_2, q_2 $n = 7$.

15) $a + aq^2 + aq^4 = 1092 \ldots \alpha$,
$aq + aq^3 \quad = 272 \ldots \beta$.
$\frac{\alpha}{\beta}$ gibt $\frac{1+q^2+q^4}{q+q^3} = \frac{1092}{272} = \frac{273}{68}$, daher
$68q^4 - 273q^3 + 68q^2 - 273q + 68 = 0$.
$68\left(q^2 + \frac{1}{q^2}\right) - 273\left(q + \frac{1}{q}\right) + 68 = 0$.
$q_1 = 4$, $q_2 = {}^1/_4$, $q_{3,4} = {}^1/_{17}(-2 \pm \sqrt{-285})$.
$a_1 = 4$, $a_2 = 1024$, $a_{3,4} = 1124 \mp 16\sqrt{-285}$.

16) $a = 1$, $q = {}^1/_2$; man dividiere die eine Gleichung durch die andere.

17) $(a + aq^2) : (aq + aq^2) = 3 : 2 \ldots \alpha$.
$aq^2 = aq + 72 \quad \ldots \beta$.
α gibt $2(q^2 - q + 1) = 3q$, $q_1 = 2$, $q_2 = {}^1/_2$, daher $a_1 = 12$, $a_2 = -192$.

18) $a \quad + aq^2 = 1085 \ldots \alpha$
$aq + aq^2 = 210 \ldots \beta$
$\frac{\alpha}{\beta} \quad \frac{q^2-q+1}{q} = {}^{31}/_6$; $q_1 = 6$, $q_2 = {}^1/_6$.
$a_1 = 5$, $a_2 = 1080$.

19) $a(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5) = 189 \ldots \alpha \quad \frac{\beta}{\alpha} q^6 = 64$.
$aq^6(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5) = 12096 \ldots \beta$
Die beiden reellen Wurzeln sind ± 2, damit ist $a_1 = 3$, $a_2 = -9$.
3, 6, 12, 24, ...; -9, 18, -36, 72, -144, ...
Außer diesen beiden Reihen gibt es noch vier andere, die den vier anderen Wurzeln von $q = \sqrt[6]{64}$ entsprechen.

20) $a + aq^3 = aq + aq^4 + {}^{91}/_{128} \ldots \alpha$,
$aq^2 + aq^5 = {}^{819}/_{512} \quad \ldots \beta$ oder
$a(1 + q^3) = aq(1 + q^3) + {}^{91}/_{128}$, $aq^2(1 + q^3) = {}^{819}/_{512}$,
$\frac{aq^2}{a-aq} = {}^{819}/_{512} \cdot {}^{128}/_{91} = {}^9/_4 = \frac{q^2}{1-q}$, $q_1 = {}^3/_4$, $q_2 = -3$, $a_1 = 2$,
$a_2 = -{}^7/_{1024}$.

21) $aq^4 = q$, $aq + aq^2 = {}^{10}/_9$; $q(aq^3 - 1) = 0$, $a = \frac{1}{q^3}$.
$a_1 = {}^8/_{27}$, $a_2 = -{}^{125}/_{27}$, $q_1 = {}^3/_2$, $q_2 = -{}^3/_5$;
$a_{10} = {}^{729}/_{64}$, $a'_{10} = {}^{729}/_{15625}$, $S = {}^{58025}/_{1728}$, $S' = -{}^{1213822}/_{421875}$.

22) $aq + ap = 10 \ldots \alpha$. $aq^2 + 10 = ap^2 \ldots \beta$.
$aq^3 + 38 = ap^3 \ldots \gamma$.

Digitized by Google

$\frac{\beta}{\alpha}$ gibt $p = q + 1$, $\frac{\gamma}{\beta}$ gibt $\frac{p^2 + pq + q^2}{p + q} = {}^{19}/_{5}$.
$q_1 = 2$, $q_2 = -{}^{7}/_{15}$; $p_1 = 3$, $p_2 = {}^{8}/_{15}$; $a_1 = 2$, $a_2 = 150$.

23) $a + aq + aq^2 = {}^{57}/_{8}$, $a + aq = aq^2 + {}^{33}/_{8}$.
Dividiert man die eine Gleichung durch die andere, so $q_1 = {}^{2}/_{3}$, $q_2 = -{}^{2}/_{5}$, $a_1 = {}^{27}/_{8}$, $a_2 = {}^{75}/_{8}$.
${}^{27}/_{8}$, ${}^{27}/_{8}\sqrt[3]{{}^{2}/_{3}}$, ${}^{27}/_{8}\sqrt[3]{{}^{4}/_{9}}$, ${}^{9}/_{4}$; ${}^{75}/_{8}$, ${}^{75}/_{8}\sqrt[3]{-{}^{2}/_{5}}$, ${}^{75}/_{8}\sqrt[3]{{}^{4}/_{25}}$, $-{}^{15}/_{4}$.

24) $q_1 = {}^{3}/_{4}$, $q_2 = -7$, q_2 ist unbrauchbar, da es negative Anteile ergeben würde;
$a = 6400$, $aq = 4800$; $aq^2 = 3600$, $aq^3 = 2700$, $aq^4 = 2025$, zusammen 19525 *K*.

25) $4q = 4 + d$, $4q^2 = {}^{25}/_{16}(4 + 2d)$; $q_1 = {}^{5}/_{2}$, $q_2 = {}^{5}/_{8}$; $d_1 = 6$, $d_2 = -{}^{3}/_{2}$.

Arithmetisch.	4,	10,	16...;		4,	${}^{5}/_{2}$,	1, ...
Geometrisch.	4,	10,	25...;		4,	${}^{5}/_{2}$,	${}^{25}/_{16}$,...

Allgemein: $d = a\left[n - 1 \pm \sqrt{n(n-1)}\right]$, $q = n \pm \sqrt{n(n-1)}$;
daher a, $a\left[n \pm \sqrt{n(n-1)}\right]$, $a\left[2n - 1 \pm 2\sqrt{n(n-1)}\right]$,...
a, $a\left[n \pm \sqrt{n(n-1)}\right]$, $a\left[2n^2 - n \pm 2n\sqrt{n(n-1)}\right]$,...

26) $a + b = 27$, $(a + d) + bq = 39$, $(a + 2d) + bq^2 = 87$, $3a + 3d = 36$.

Arithmetisch.	18,	12,	6;	-54,	12,	78.
Geometrisch.	9,	27,	81;	81,	27,	9.

27) $q_1 = 4$, $q_2 = -5$; $d_1 = 9$, $d_2 = -18$.
Arithmetisch. 1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64;
1, -17, -35, -53, -71, -89, -107, -125.
Geometrisch. 1, 4, 16, 64; 1, -5, 25, -125.

28) $(a + 8)q = a + d$, $(a + 8)q^2 = a + 2d$, $3a + 3d + 8 = 26$.
Arithmetisch. -6, 6, 18; 10, 6, 2; geom. 2, 6, 18; 18, 6, 2.

29) $S_{10} = 155 = 5(2a + 9d)$, $b + ab = 9$, $b = d$.
$a_1 = {}^{25}/_{2}$, $a_2 = 2$, $d_1 = {}^{3}/_{8}$, $d_2 = 3$.
Arithm. $12{}^{1}/_{2}$, $(12{}^{1}/_{2} + {}^{2}/_{3})$, $(12{}^{1}/_{2} + {}^{4}/_{3})$,...; 2, 5, 8, 11,...
Geom. ${}^{2}/_{3}$, ${}^{25}/_{3}$, ${}^{625}/_{6}$ ...; 3, 6, 12, 24,...

30) $a = b + 1 \ldots \alpha$, $a + d = bq + 1 \ldots \beta$, $a + 2d = bq^2 \ldots \gamma$, $a + 3d + 3 = bq^3 \ldots \delta$.
Man bilde $\delta - \gamma$, $\gamma - \beta$, $\beta - \alpha$, so erhält man
$\frac{d+3}{d+1} = \frac{d+1}{d}$; 2, 3, 4, 5, 6,...; 1, 2, 4, 8, 16...

Digitized by Google

31) $a = b + 1$, $bq^2 = a + 2d + 1$, $3a + 3d = b + bq + bq^2 + 1$, $q = d$. Mit Hilfe der ersten und vierten Gleichung geht die zweite und dritte über in

$$bd^2 = b + 2d + 2,\ bd^2 + bd = 2b + 3d + 2.$$

Durch Subtraktion folgt daraus $bd - b = d$, $b = \frac{d}{d-1}$, somit

$$\frac{d^3}{d-1} = \frac{d}{d-1} + 2d + 2;\ (d^2 - 1)(d - 2) = 0.$$

Die Wurzel $d_2 = 1$ ist unbrauchbar, da sie $b = \infty$ ergibt.

1) Arithm. 3, 5, 7, 9, 11,... $Z_{10} = 21$, $S_{10} = 120$.
   Geom. 2, 4, 8, 16, 32,... $Z_{10} = 1024$, $S_{10} = 2046$.
2) Arithm. $^3/_2$, $^1/_2$, $-^1/_2$, $-^3/_2$,... $Z_{10} = -^{15}/_2$, $S_{10} = -30$.
   Geom. $^1/_2$, $-^1/_2$, $+^1/_2$, $-^1/_2$,... $Z_{10} = -^1/_2$, $S_{10} = 0$.

32) $aq + 2a(q + 1) + 4a(q + 2) = 24 \ldots \alpha$.
$4a + 4a(q + 2) + 4a(q + 2)^2 = 84 \ldots \beta$.
α und β führen auf $7aq + 10a = 24$, $aq^2 + 5aq + 7a = 21$.
Durch Division dieser beiden Gleichungen erhält man:
$q_1 = 2$, $q_2 = -^7/_8$, $a_1 = 1$, $a_2 = {}^{192}/_{31}$, somit

1) 1, 2, 4, 8, 16... 2) $^{192}/_{31}$, $-^{168}/_{31}$, $+^{147}/_{31}$, $-^{1029}/_{248}$...
   2, 6, 18, 54, 162... $^{384}/_{31}$, $^{48}/_{31}$, $^{6}/_{31}$, $^{3}/_{124}$ ...
   4, 16, 64, 256, 1024... $^{768}/_{31}$, $^{864}/_{31}$, $^{972}/_{31}$, $^{2187}/_{62}$...

33) Setzt man $\frac{x}{y} = q$, so ist die zusammengesetzte Reihe

$$S = 1 + 2q + 3q^2 + \ldots + (n - 1)\, q^{n-2} + nq^{n-1}$$

und

$$qS - S = nq^n - (q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1)$$

$$S(q - 1) = nq^n - \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{nq^{n+1} - (n + 1)\, q^n + 1}{q - 1},$$

somit

$$S = \frac{nq^{n+1} - (n + 1)\, q^n + 1}{(q - 1)^2}$$

und

$$S = \frac{nx^{n+1} - (n + 1)\, x^n y + y^{n+1}}{y^{n-1}(x - y)^2}.$$

34) Die zusammengesetzte Reihe zerfällt in die zwei Reihen

$$a + ax + ax^2 + \ldots + ax^m = a\,\frac{x^{m+1} - 1}{x - 1}$$ und in

$$bx + 2bx^2 + \ldots + mbx^m = bx(1 + 2x + 3x^2 + \ldots + mx^{m-1}),$$

welche nach Nr. 33 gleich ist

$$bx\,\frac{mx^{m+1} - (m + 1)\, x^m + 1}{(x - 1)^2},$$

somit ist

$$S = a\,\frac{x^{m+1} - 1}{x - 1} + bx\,\frac{mx^{m+1} - (m + 1)\, x^m + 1}{(x - 1)^2}.$$

Digitized by Google

§ 12. Zinseszinsen- und Rentenrechnung.*)

A. Zinseszinsen.

a) Anfangs- oder Endkapital.

$$E = A\left(1 + \tfrac{p}{100}\right)^n, \quad A = \frac{E}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}.$$

1) $A = \frac{2000}{1{\cdot}035^{13}} = 1278\,K\ 81\,h$ (1278 K 82 h).

2) $D = A\left[\left(1 + \frac{p_1}{100}\right)^n - \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n\right] = 4469{\cdot}32\,K$ (4469·3 K).

3) 3819·69 K (3819·68 K) bei Zinseszinsen.
3900 K nach $x = \frac{a}{1 + \frac{pT}{100}}$, 3656·25 K nach $y = a - \frac{apT}{100}$.

4) $\left[A\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{10} - 7000\right]\left(1 + \frac{p_1}{100}\right)^{30} = 70000.$
$A = 15771{\cdot}43\,K$ (15771·7 K).

b) Prozente.

$$p = 100\left(\sqrt[n]{\frac{E}{A}} - 1\right).$$

5) $E = 66066$, $A = 32500$, $n = 24$; $p = 3\,\%$.

6) $E = 318500\left(\frac{3185}{2087}\right)^{5/3} = 644299$ (644300).

7) $A\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{2n} = r.A\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - A, \quad \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = x.$

$x^2 - rx = -1$. $x = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4}}{2}$, $p = 100\sqrt[n]{\frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4}}{2}} - 100.$

$r = 3$, $n = 10$, $p = 10{\cdot}1026\,\%$ (10·102).

Der negative Wurzelwert $\sqrt[n]{\frac{r - \sqrt{r^2 - 4}}{2}}$ ist in diesem Falle nicht brauchbar, da für ihn p negativ wird.

*) Die in Klammern befindlichen Resultate beziehen sich auf fünfstellige Logarithmentafeln.

Digitized by Google

c) Die Zeit.

8) Nimmt man die Formel: $E = A\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \ldots \alpha$ auch für Bruchteile von Verzinsungsterminen geltend an, so ergibt sich

$$n = \frac{\log E - \log A}{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)} = 22{\cdot}875\ (22{\cdot}875) = 22 \text{ Jahre } 319 \text{ Tage},$$

wenn das Jahr zu 365 Tagen gerechnet wird.

In der Praxis rechnet man oft die Zinsen und die Zeiten für Bruchteile eines Verzinsungstermines nach der einfachen Zinsenrechnung, also nach der Formel:

$$E = A\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \left(1 + \frac{mp}{100q}\right) \ldots \beta,$$

wo n die Anzahl der ganzen Verzinsungstermine und $\frac{m}{q}$ den Bruchteil eines solchen Termines bezeichnet. Berechnet man nach der Formel (β) die Zeit, so ergibt sich 22 Jahre 318 Tage. Da der Unterschied in den meisten Fällen so klein ist, daß er vernachlässigt werden kann, da ferner die Formel (α) die Zeit leichter als (β) und den Prozentsatz direkt bestimmen läßt, so wurde (α) den folgenden Lösungen allein zugrunde gelegt, also

$$n = \frac{\log E - \log A}{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)}.$$

9) $A\,(1 + 0{\cdot}06)^n = 2A$, $n = 11{\cdot}8956\ (11{\cdot}896)$.
$A\,(1 + 0{\cdot}03)^{2n} = 2A$, $n = 11{\cdot}7249\ (11{\cdot}725)$.

10) Aus $63114\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{20} = 79000$ folgt $1 + \frac{p}{100} = \sqrt[20]{\frac{79000}{63114}}$.

somit $79000\left(\frac{79000}{63114}\right)^{\frac{n}{20}} = 200000$, $n = 82{\cdot}7476\ (82{\cdot}748)$.

11a) $8000\ (1{\cdot}05)^n = 12000\ (1{\cdot}03)^n$,
$\left(\frac{1{\cdot}05}{1{\cdot}03}\right)^n = {}^{12}/_{8} = 1{\cdot}5$, $n = 21{\cdot}083\ (21{\cdot}088)$.

11b) $n = 2{\cdot}999$ oder kurz 3.

12) $c\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n_1 - m + x} + c\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n_2 - m + x} + c\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n_3 - m + x} = c_1$.

$1 + \frac{p}{100} = q$, $q^x\,(cq^{n_1 - m} + cq^{n_2 - m} + cq^{n_3 - m}) = c_1$.

$x = \{\log c_1 - \log [c\,(q^{n_1 - m} + q^{n_2 - m} + q^{n_3 - m})]\} : \log q$.

$x = 14{\cdot}6105\ (14{\cdot}6105)$ Jahre von jetzt an oder in 14 Jahren

Digitized by Google

7 Monaten 10 Tagen, oder der jüngste Sohn ist bei Eröffnung des Geschäftes gerade 27 Jahre 7 Monate und 10 Tage alt, wobei ein Jahr zu 360 und ein Monat zu 30 Tagen gerechnet wurde.

B. Mit Terminzahlungen.

a) Endkapital und Anfangskapital.

Geschieht die Zahlung des Betrages a jedesmal zu Beginn des Termines, also vorschußweise, so ist ihr Wert zu Ende des n^{ten} Termines:

$$S = aq^n + aq^{n-1} + \ldots + aq = aq\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

und ihr Wert zu Beginn des ersten Termines:

$$S = a + \frac{a}{q} + \frac{a}{q^2} + \ldots + \frac{a}{q^{n-1}} = a\,\frac{q^n - 1}{q^{n-1}\,(q-1)}.$$

Geschieht die Einzahlung zu Ende eines Termines (nachschußweise), so ist der Wert der Einzahlungen zu Ende des n^{ten} Termines:

$$S = aq^{n-1} + aq^{n-2} + \ldots + a = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

und ihr Wert zu Beginn des ersten Termines ist

$$S = \frac{a}{q} + \frac{a}{q^2} + \ldots + \frac{a}{q^n} = a\,\frac{q^n - 1}{q^n\,(q-1)}.$$

13) $S = aq\,\frac{q^{24} - 1}{q - 1} = 2489{\cdot}96\,K$ $(2490\,K)$.

14) $S = a\,\frac{q^6 - 1}{q - 1} = 1890{\cdot}41\,K$ $(1890{\cdot}4\,K)$.

15) $S = \frac{a\,(q^{18} - 1)}{q^{18}\,(q-1)} = 15969{\cdot}25\,K$ $(15968{\cdot}7\,K)$.

16) $S = \frac{a}{q^{20}} \cdot \frac{q^{20} - 1}{q - 1} = 135903{\cdot}2\,K$ $(135902\,K)$.

17) Soll die Kapitalisierung am Ende des r^{ten} Teiles eines Jahres dasselbe Resultat ergeben wie die ganzjährige Kapitalisierung, so muß

$$(1 + x)^{n\,r} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \text{ oder } 1 + x = \sqrt[r]{1 + \frac{p}{100}} \text{ sein.}$$

$\sqrt[r]{1 + \frac{p}{100}}$ heißt der konforme Zinsfuß; $1 + \frac{p}{100r}$, wo die Prozente proportional mit der Zeit geändert sind, heißt der relative Zinsfuß.

Digitized by Google

Der relative Zinsfuß ist 1·025, der konforme $\sqrt[4]{1{\cdot}05} = 1{\cdot}0246951$; nach ersterem 5400·075 *K* (5400·07 *K*), nach letzterem 5372·275 *K* (5372·5 *K*).

18) $S = Aq^{10} + a\frac{q^{10}-1}{q-1} = 2318{\cdot}41\ K$ (2318·4 *K*).

19) 5388·67 *K* (5388·6 *K*).

20) $Aq^7 + aq\frac{q^6-1}{q-1}$; die anfangs bezahlten 12480 *K* wachsen mitsamt dem sechsmal geleisteten Zuschuß von 2400 *K* bis zu Ende des siebenten Jahres auf 34701·43 *K* (34701·7 *K*) an und davon sind 5% 1735·07 *K* (1735·08 *K*), somit ist das Unternehmen nicht vorteilhaft.

21) $V = 2800\,q^6 + 700\,q^3\ (1 + q + q^2 + q^3) - (2800 + 4.700) = 1316{\cdot}65\ K$.

22) $r.q^{m-n} + r.q^{m-n-1} + \ldots + r.q + r = r\ \frac{q^{m-n+1}-1}{q-1}$

und da $q - 1 = 1 + \frac{p}{100} - 1 = \frac{p}{100}$, so ist der Gewinn oder Verlust der Bank $\frac{100r}{p}\ (q^{m-n+1} - 1) - a$; und zwar Gewinn, wenn der Ausdruck positiv, Verlust, wenn der Ausdruck negativ ist. 1) 4982·65 *K* (4982·3 *K*) Gewinn, 2) 2332·31 *K* (2332 *K*) Gew.

b) Die jährliche Zahlung wird gesucht.

Aus $Aq^n = a\frac{q^n-1}{q-1}$ folgt $a = A\frac{q^n(q-1)}{q^n-1}$.

23) $a = \frac{800\,q^{10}(q-1)}{q^{10}-1} = 103{\cdot}6\ K$.

24) 380·01 *K* (380 *K*).

25) $a = \frac{A\,q^n(q-1)}{q^n-1} = 3331{\cdot}61\ K$ (3331·7 *K*).

26*a*) 60674 *K* (60674 *K*) oder 6·0674 (6·0674) Prozente des ursprünglichen Kapitals.

26*b*) $a = 0{\cdot}0782267\ A$ (0·078227 *A*), oder 7·82267 (7·8227) Prozente des Anleihekapitals.

27) $b = aq^n + aq^{n-1} + \ldots + aq = aq\frac{q^n-1}{q-1}$, daraus

$$a = \frac{b(q-1)}{q(q^n-1)} = 144{\cdot}06\ K,\ 410{\cdot}333\ K\ (410{\cdot}33\ K).$$

Digitized by Google

28) $Aq^n = aq^{n-1} + aq^{n-2} + \ldots + aq + a = a\,\frac{q^n-1}{q-1}$.

$$a = \frac{Aq^n(q-1)}{q^n-1} = 2199{\cdot}99\,K\ (2200\,K).$$

29) $15375{\cdot}23\,K$ $(15375{\cdot}5\,K)$.

30) Da $aq^{19} + aq^{18} + \ldots + a = 8590$, so

$$a = \frac{8590\,(q-1)}{q^{20}-1} = 273{\cdot}82\,K.$$

31) $a = \frac{10000\,q^{10}(q-1)}{q^{10}-1} = 1295{\cdot}045\,K\ (1295{\cdot}05\,K)$.

32) $3000q^9 = aq^9 + \ldots + a = a\,\frac{q^{10}-1}{q-1}$, $a = 370{\cdot}01\,K$.

$3000q^{10} = aq^9 + \ldots + a = a\,\frac{q^{10}-1}{q-1}$, $a = 388{\cdot}51\,K$.

Nimmt also der Vormund den Betrag im vorhinein, d. i. zu Beginn des Jahres, so ist der Betrag $370{\cdot}01\,K$, nimmt er ihn aber zu Ende des Jahres, so $388{\cdot}51\,K$.

33) $a = \frac{18770q^{13}(q-1)}{q^{13}-1} = 2000\,K$.

34) Aus $x : 100 = 86400 : 96$ folgt $x = 90000$.

$$a = \frac{90000\,q^{10}(q-1)}{q^{10}-1} = 11655{\cdot}4\,K\ (11655\,K).$$

35) $6000q^{18} - (ap^{18} + ap^{17} + \ldots + ap^{10} + 2ap^9 + 2ap^8 + \ldots + 2ap) = 6000.$

$$6000q^{18} - ap\,\frac{p^{18}-1}{p-1} - ap\,\frac{p^9-1}{p-1} = 6000.$$

$$a = \frac{6000\,(q^{18}-1)\,(p-1)}{p\,(p^{18}+p^9-2)} = 187{\cdot}8\,K\ (187{\cdot}76\,K),$$

$$2\,a = 375{\cdot}6\,K\ (375{\cdot}56\,K).$$

c) Wie groß ist die Endsumme, wenn der Anfangsbetrag eine bestimmte Zeit jährlich um einen gewissen Betrag vermindert wird?

36) $30000q^{15} - [800q^{14} + \ldots + 800] = x$.

$$x = 30000q^{15} - 800\,\frac{q^{15}-1}{q-1} = 38009{\cdot}44\,K\ (38009{\cdot}4\,K).$$

37*a*) $x = 10000q^{17} - (600q^{17} + \ldots + 600q) =$

$$10000q^{17} - 600q\,\frac{q^{17}-1}{q-1} = 6118{\cdot}89\,K\ (6118{\cdot}9\,K).$$

37*b*) $x = 10000q^{16} - 600\,\frac{q^{16}-1}{q-1} = 7102{\cdot}14\,K\ (7102{\cdot}1\,K)$.

Digitized by Google

38) Beziehen die Kinder nur neunmal den Betrag, den letzten also am Ende des neunten Jahres, so entfällt auf eines 6367·87 K (6367·8 K), beziehen sie ihn aber zehnmal, so 6082·15 K (6082·1 K).

39) $x = 51619\,q^{10} - 1873\,\frac{q^{20}-1}{q-1} = 36738{\cdot}4\,m^3$ (36738 m^3).

d) Die Zeit.

40) Aus $Aq^n = aq^{n-1} + \ldots + aq + a = a\,\frac{q^n-1}{q-1}$ folgt
$A\,(q-1)\,q^n = aq^n - a$, $q^n[a - A\,(q-1)] = a$, somit
$$n = \frac{\log a - \log\,[a - A\,(q-1)]}{\log q} = 5 \text{ Jahre.}$$

41) $n = 30$ Jahre.

42) $n = 20$ Jahre.

43) $n = 36{\cdot}72379$ (36·723) Jahre, d. h. 36 Jahre kann er vollständig 6000 K beziehen, das 37. Jahr aber nur den Betrag von 4371·85 K; denn mit Ende des 36. Jahres haben die 100000 K den Wert von 579181·61 K, die 36mal bezogenen 6000 K aber 575017·94 K, daher verbleiben für das 37. Jahr nur 4163 K 67 h (4166·5 K) und diese wachsen bei 5% bis zum Ende des Jahres zu 4371·85 K (4374·8 K) an.

44) $n = 20{\cdot}00255$ Jahre, d. h. durch 20 Annuitäten, doch beträgt die letzte um 1 K 93 h mehr als eine frühere, somit 770·63 K; bei 5stelligen Logarithmen ist $n = 20$.

45) $n_1 = 49{\cdot}9972$, $n_2 = 16{\cdot}4979$.
Nach nahezu 50 Terminen ist die ganze und nach nahezu $16^1/_2$ Terminen die halbe Schuld getilgt.

46) $n = 22{\cdot}517$ Jahre, d. h. 22 Jahre vollständig und zu Beginn des 23. Jahres ist noch eine Forderung von 747·39 K (748 K) ausständig. Diese wächst bis zum Ende des 23. Jahres auf 784·76 K (785·4 K) an und so viel muß noch vom Reingewinn des 23. Jahres zur Tilgung der Schuld verwendet werden.

47) $30500\,q^{11} - 1400\,\frac{q^{11}-1}{q-1} = x = 20886{\cdot}72\,m^3$ (20886·7 m^3).

$30500\,q^n = 1400\,\frac{q^n-1}{q-1}$, $n = 28{\cdot}89488$ (28·895) Jahre,
d. h. 28 Jahre können jedes Jahr 1400 Kubikmeter gefällt werden, für das 29. Jahr bleiben zu Beginn nur 1229·5437 (1230·5) Kubikmeter und diese wachsen bis zum Ende des 29. Jahres auf 1254·135 (1255) Kubikmeter an.

Digitized by Google

48) Ist der Reinertrag a, so $a\frac{q^n-1}{q-1} = 150000q^n$, $n = 15$ Jahre.

$a\frac{q^n-1}{q-1} - 150000q^n = 150000$, $n = 24{\cdot}3809$ (24·38) Jahre.

49) $n = 32{\cdot}98694$ (32·987) Jahre, d. h. 32mal bekommt er 2500 K vollständig und am Ende des 33. Jahres nur 2468·115 K (2468·7 K).

50) $n = 11{\cdot}46985$ (11·47) Jahre, somit sind 11 Raten vollständig zu bezahlen, und die am Ende des zwölften Jahres fällige Rate ist 1665·74 K (1666 K).

51) $Cq^n + a\frac{q^n-1}{q-1} = S$.

$$n = \frac{\log[a + S(q-1)] - \log[a + C(q-1)]}{\log q}.$$

Beispiel: $n = 16{\cdot}9864$ (16·99). Bis zu Ende des 17. Jahres sind die 5760 K auf 11219·907 K (11219·8 K) angewachsen, und die bis zu Ende des 16. Jahres erfolgten 16maligen Einzahlungen von 575 K haben am Ende des 17. Jahres den Betrag von 13051·09 K (13050·6 K) erreicht, somit bleibt für die am Ende des 17. Jahres zu leistende Zahlung 554 K (554·6 K).

52) $n = 9{\cdot}15039$ (9·1506) Jahre. Die Gemeinde hat somit entweder zum Schulfonde achtmal 800 K und am Schlusse des 9. Jahres 1317 K 64 h (1317·7 K) zu zahlen, wo dann schon am Schlusse des 9. Jahres der Schulfonds die gewünschte Höhe von 50000 K hat, oder sie legt zum Fonds neunmal, am Schlusse des ersten bis neunten Jahres, jedesmal 800 K dazu, wo dann der Schulfonds am Schlusse des zehnten Jahres, ohne daß noch ein Zuschuß geleistet wird, schon um 2203·89 K (2203 K) mehr als 50000 K beträgt.

53) Aus $x : 100 = 1 : 36$ und $y : 100 = 1 : 28$ folgt, daß die Zunahme $^{25}/_{7} - {}^{25}/_{9} = {}^{50}/_{63}$ beträgt; q ist daher $1 + {}^{50}/_{6300} = {}^{127}/_{126}$

$1{,}000.000\,q^n + 2500\frac{q^n-1}{q-1} = 1{,}500.000$.

$n = 40{\cdot}7642$ (40·8) Jahre, somit im Jahre 1901.

54) $aq\frac{q^n-1}{q-1} = 5000$, $n = 47{\cdot}8866$ (47·89) Halbjahre, somit $n_1 = 23{\cdot}9433$ (23·945) Jahre.

55) $389{\cdot}3\,q^n + 389{\cdot}3\,q^{n-1} + \ldots + 389{\cdot}3\,q = 5000$,

$n = 10$.

56) Ist die ausgeliehene Summe a, so sind P Prozent $\frac{aP}{100}$, somit:

Digitized by Google

$\frac{aP}{100}q^{n-1} + \frac{aP}{100}q^{n-2} + \ldots + \frac{aP}{100} = aq^n$,

wo a die schuldige Summe und $q = 1 + \frac{p}{100}$ bedeutet.

$$P = \frac{100\,q^n\,(q-1)}{q^n - 1} = 6{\cdot}49749\ (6{\cdot}4975)\,\%.$$

57) $r.x^{23} + \ldots + r.x = 1000$, $r = \frac{1000}{21\,(x^{23}-1)}$.

$r = 22{\cdot}9877\,K$; somit betragen die Verwaltungskosten **16·4%** der Prämie und diese haben nach 23 Jahren den Wert von $196{\cdot}19\,K$.

C. Rentenrechnung.

58) $\frac{a}{q} + \frac{a}{q^2} + \ldots + \frac{a}{q^n} = x = \frac{a\,(q^n-1)}{q^n\,(q-1)}$.

$x = 3253{\cdot}21\,K$ $(3253{\cdot}3\,K)$; $x = 2293{\cdot}984\,K$ $(2294\,K)$.

59) $1544{\cdot}36\,K$.

60) $a + \frac{a}{q} + \ldots + \frac{a}{q^{n-1}} = \frac{a\,(q^n-1)}{q^{n-1}(q-1)} = S = 14728{\cdot}88\,K$ $(14728{\cdot}9\,K)$.

61) Das Angebot, 1250 K durch 12 Jahre zu zahlen, ist um $623\,K\ 32\,h$ $(623\,K)$ besser als das andere Angebot.

62) Die Ablösungssumme ist $\frac{a}{q^{38}} + \frac{a}{q^{76}} + \ldots =$

$\frac{a}{q^{38}}\left(1 + \frac{1}{q^{38}} + \frac{1}{q^{76}} + \ldots\right) = \frac{a}{q^{38}-1} = 581{\cdot}60\,K$ $(581{\cdot}63\,K)$.

Die jährliche Ablösungssumme ist $bq^{37} + bq^{36} + \ldots + b = 2000$;

$b = \frac{80}{q^{38}-1} = 23{\cdot}264\,K$.

63) $\frac{a}{q} + \frac{a}{q^2} + \ldots + \frac{a}{q^8} = b + \frac{b}{q^4}$.

$b = 1895{\cdot}41\,K$ $(1895{\cdot}3\,K)$.

64) $S = aq^{12} + \ldots + aq = aq\,\frac{q^{12}-1}{q-1} = 7032{\cdot}08\,K$ $(7031{\cdot}9\,K)$.

65) $a + \frac{a}{q} + \ldots + \frac{a}{q^{n-1}} = 100000$.

$\frac{a}{q^{n-1}} \cdot \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{a.q(q^n-1)}{q^n\,(q-1)} = \frac{A\,(q^n-1)}{q^n} = 100000$,

wo $A = \frac{aq}{q-1}$, $n = 31{\cdot}002$ $(31{\cdot}002)$ Jahre.

Die letzte Rente ist zu Beginn des 31. Jahres fällig und ist um $7\,K\ 50\,h$ $(13\,K)$ höher als die anderen Renten.

66) $\frac{aq}{q-1} \cdot \frac{q^n-1}{q^n} = 20540$.

Digitized by Google

$n = 34{\cdot}5936$ (34·59), d. h. die Rente ist entweder 34mal voll und das 35stemal mit $719{\cdot}4\,K$ ($720{\cdot}5\,K$) auszubezahlen, oder sie wird im ganzen nur 34mal ausbezahlt, und zwar das letztemal mit $1885{\cdot}12\,K$ ($1886{\cdot}2\,K$).

67) $\frac{a}{q} + \frac{a}{q^2} + \ldots + \frac{a}{q^n} = 10000 = \frac{a\,(q^n - 1)}{q^n\,(q-1)}$.
$n = 12{\cdot}99893$ Jahre (13·001 Jahre), somit kurz $n = 13$.

68) $8000\,q^8 = a + \frac{a}{q} + \ldots + \frac{a}{q^{n-1}} = \frac{a\,(q^n - 1)}{q^{n-1}\,(q-1)}$.
$n = 30{\cdot}8534$ (30·853) Jahre, somit 31mal, aber das letztemal nur mit dem Betrage von $513{\cdot}51\,K$ ($514\,K$), denn bis zum Ende des 38. Jahres wachsen die $8000\,K$ auf $35510{\cdot}51\,K$ ($35509\,K$) an und die bis dahin bezogenen dreißig Renten repräsentieren einen Wert von $34997\,K$ ($34995\,K$), somit verbleibt für die zu Beginn des 39. Jahres auszuzahlende Rente der Betrag von $513{\cdot}51\,K$ ($514\,K$).

69) $n = 46{\cdot}9525$ (46·96) Jahre.
Am Schlusse der n Jahre sind $1250\,K$ angewachsen zu $1250\,(1{\cdot}0225)^{2n}$ und für diesen Zeitpunkt ist die Leistung der Bank

$$900 + \frac{900}{q} + \ldots + \frac{900}{q^{14}} = \frac{900\,(q^{15} - 1)}{q^{14}\,(q-1)}, \text{ somit}$$

$$1250\,(1{\cdot}0225)^{2n} = \frac{900\,(q^{15} - 1)}{q^{14}\,(q-1)}.$$

70) $A = \frac{a}{q} + \ldots + \frac{a}{q^{10}} = \frac{a}{q^{10}}\,\frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 7912{\cdot}71\,K$ ($7912{\cdot}7\,K$).

$B = aq^{10} + \ldots + aq = aq\,\frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 12841{\cdot}17\,K$ ($12841\,K$).

71) $\frac{600}{q} + \ldots + \frac{600}{q^{30}} = \frac{18000}{q^n}$, $n = 13{\cdot}7049$ (13·704), somit 13·704 Jahre vom Anfang an.

72) Leistung des A nach Ablauf der n Jahre: $aq^n + aq^{n-1} + \ldots + aq = aq\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$, dieser Betrag wächst in weiteren m Jahren zu $aq^{m+1}\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$ an. Die Leistung der Bank zu Beginn des $(n + m + 1)^{\text{ten}}$ Jahres ist

$$R + \frac{R}{q} + \frac{R}{q^2} + \ldots + \frac{R}{q^{r-1}} = R\,\frac{q^r - 1}{q^{r-1}\,(q-1)},$$

somit muß

$$aq^{m+1}\,\frac{q^n - 1}{q - 1} = R\,\frac{q^r - 1}{q^{r-1}\,(q-1)} \text{ sein.}$$

Digitized by Google

$$a = \frac{R\,(q^r - 1)}{q^{m+r}(q^n - 1)}; \quad R = \frac{a \cdot q^{m+r}\,(q^n - 1)}{q^r - 1}.$$

$$m = \log \left\{ \frac{R\,(q^r - 1)}{a\,q^r\,(q^n - 1)} \right\} : \log q$$

$$n = \log \left\{ \frac{R\,(q^r - 1)}{a q^{m+r}} + 1 \right\} : \log q$$

$$r = \log \left\{ \frac{R}{R - a q^m\,(q^n - 1)} \right\} : \log q.$$

73) Der erste Rentenbezug findet mit Ende des 15. Jahres statt.

$$a + \frac{a}{q} + \ldots + \frac{a}{q^{14}} = \frac{b}{q^{15}} + \ldots + \frac{b}{q^{24}}.$$

$$a = \frac{b\,(q^{10} - 1)}{q^{10}\,(q^{15} - 1)} = 357{\cdot}84\ K\ (357{\cdot}86\ K).$$

74) $117{\cdot}145\ K$ ($117{\cdot}15\ K$).

75) $1946{\cdot}64\ K$ ($1946{\cdot}6\ K$).

76) $281{\cdot}36\ K$.

77) Zu Beginn des 24. Jahres ist die Leistung für A:

$$a q^{23} + \ldots + a q^4 = a q^4 \frac{q^{20} - 1}{q - 1}, \quad \text{Gegenleistung} = b \frac{\varrho^4 - 1}{\varrho - 1}.$$

$$a = \frac{b\,(\varrho^4 - 1)\,(q - 1)}{q^4\,(q^{20} - 1)\,(\varrho - 1)} = 42{\cdot}764\ K.$$

Da der größere Prozentsatz durch die Verwaltungskosten etc. bedingt ist, die Verwaltuug und Garantie der Rente einen Teil der Gegenleistung des Institutes bilden und erst mit dem Beginne des 24. Jahres — also mit der Auszahlung der letzten $300\ K$ — ihren Abschluß finden, so können auch die Beträge auf keinen andern als diesen Abschlußmoment bezogen werden. Die Diskontierung auf einen andern Zeitmoment würde ein unrichtiges Resultat ergeben.

78) $(a q^{15} + \ldots + a)\, q^{15} = b + \frac{b}{q} + \ldots + \frac{b}{q^{15}}; \quad b = a q^{30}.$

$b = 674{\cdot}16\ K$ ($674{\cdot}15\ K$).

79) Leistung des A zu Beginn des 46. Jahres:

$$3000 q^{15} + 300.q^{14} + \ldots + 300.q^5 = 3000.q^{15} + 300 q^5 \frac{q^{10} - 1}{q - 1}$$

Leistung der Bank zu dieser Zeit:

$$a + \frac{a}{q} + \ldots + \frac{a}{q^{24}} = a \frac{(q^{25} - 1)}{q^{24}(q - 1)}$$

und beide Leistungen müssen gleich sein.

$$671{\cdot}17\ K.$$

80) $10000 q^{21} + r q^{20} + \ldots + r q = 3000 + \frac{3000}{q} + \ldots + \frac{3000}{q^{19}}.$

$$r = \frac{3000}{q^{20}} - \frac{450 q^{20}}{q^{20} - 1} = 475{\cdot}17\ K\ (475{\cdot}16\ K).$$

Digitized by Google

81) $S = \frac{1600}{q^8} + \ldots + \frac{1600}{q^{27}} = \frac{1600\,(q^{20}-1)}{q^{27}\,(q-1)} = 16524{\cdot}07\,K\ (16524\,K).$

$x + \frac{400}{q} + \ldots + \frac{400}{q^7} = \frac{1600\,(q^{20}-1)}{q^{27}\,(q-1)},\ x = 14123{\cdot}25\,K\ (14123{\cdot}3\,K).$

$9000 + \frac{x}{q} + \ldots + \frac{x}{q^7} = 16524{\cdot}07.$

$x = 1253{\cdot}58\ K\ (1253{\cdot}6\ K).$

82) Der Barwert beider Renten muß gleich sein, daher

$a\,\frac{q^{25}-1}{q^{24}\,(q-1)} = b\,\frac{q^{15}-1}{q^{14}\,(q-1)},\quad b = 702{\cdot}53\ K\ (702{\cdot}52\ K).$

83) $975{\cdot}54\ K\ (975{\cdot}55\ K).$

84) $a + \frac{a}{q} + \ldots + \frac{a}{q^{19}} = \frac{b}{q^8} + \frac{b}{q^9} + \ldots + \frac{b}{q^{19}},\quad b = \frac{a\,(q^{20}-1)}{q^{12}-1} =$

$1217{\cdot}205\ K\ (1217{\cdot}2\ K).$

85) $\frac{a}{q} + \ldots + \frac{a}{q^{12}} = \frac{b}{\varrho} + \ldots + \frac{b}{\varrho^{30}},\quad b = \frac{600\,.\,\varrho^{30}\,(q^{12}-1)}{q^{12}\,(\varrho^{30}-1)} = 502{\cdot}85\ K.$

86) $\frac{a}{q} + \ldots + \frac{a}{q^{15}} = \frac{b}{q^{x+1}} + \frac{b}{q^{x+2}} + \ldots + \frac{b}{q^{x+12}},$

wenn die Rente nachschußweise ist.

$a + \frac{a}{q} + \ldots + \frac{a}{q^{14}} = \frac{b}{q^x} + \ldots + \frac{b}{q^{x+11}},$

wenn die Rente vorschußweise ist. In beiden Fällen ergibt sich

$q^x = \frac{b\,q^3\,(q^{12}-1)}{a\,(q^{15}-1}},\quad x = 4{\cdot}6787\ (4{\cdot}679)\ \text{Jahre}.$

87) $a + \frac{a}{q} + \ldots + \frac{a}{q^{19}} = b + \frac{b}{q} + \ldots + \frac{b}{q^{x-1}}.$

$a\,.\,\frac{q^{20}-1}{q^{19}\,(q-1)} = b\,\frac{q^x-1}{q^{x-1}\,(q-1)} = \frac{b\,q\,(q^x-1)}{q^x\,(q-1)},\quad q^x = \frac{b\,q^{20}}{a + (b-a)\,q^{20}}.$

a) $x = 14{\cdot}5519$ Jahre. b) $x = 26{\cdot}9378$ Jahre.

Das eine Mal kann die Rente von 1000 K 14mal voll und das 15. Mal, und zwar bei einer vorschußweisen Rente zu Beginn des 15. Jahres, mit 556 K 74 h (557 K) behoben werden. Der gegenwärtige Wert der Rente von 800 K ist 11307 K, der gegenwärtige Wert der 14mal zu beziehenden Rente von 1000 K ist 10985 K, somit beträgt der Unterschied 322 K und diese wachsen bis zu Ende des 14. Jahres auf $322\,q^{14} = 557\ K$ an. Das andere Mal kann die Rente von 1000 K 26mal voll und zu Beginn des 27. Jahres mit dem Teilbetrage von 938 K 90 h (939 K) behoben werden. Der gegenwärtige Wert der Rente von 1200 K ist 16961 K, die 26mal bezogene Rente von 1000 K hat den gegenwärtigen Wert von 16622 K, daher ist der Unterschied 339 K und diese wachsen bis zu Ende des 26. Jahres an zu $339\,q^{26} = 939\ K$.

In dieser und der folgenden Aufgabe ist der Barwert der Renten für den Moment berechnet, wann die zweite Rente das erstemal fällig ist.

Digitized by Google

88) In dem Momente, als er die zweite Rente bezieht, hat die erste den Wert

$$aq^4 + aq^3 + \ldots + a + \frac{a}{q} + \ldots + \frac{a}{q^{11}} = \frac{a(q^{16}-1)}{q^{11}(q-1)}$$

und die zweite hat den Wert

$$\frac{b(\varrho^{32}-1)}{\varrho^{31}(\varrho-1)}, \text{ daher } b = \frac{600\,(q^{16}-1)\,\varrho^{31}}{q^{11}\,(\varrho^{32}-1)} = 710{\cdot}67\ K.$$

89) Zu Beginn des fünften Jahres nach der Vertragsänderung haben beide Renten den Wert:

$$av^4 + av^3 + \ldots + a + \frac{a}{v} + \ldots + \frac{a}{v^{10}} = b + \frac{b}{q} + \ldots + \frac{b}{q^{23}}.$$

$$b = \frac{a\,(v^{15}-1)\,q^{23}\,(q-1)}{v^{10}\,(v-1)\,(q^{24}-1)} = 560{\cdot}94\ K.$$

90) Als er die Rente das fünftemal bezogen hatte, war der Wert der übrigen

$$\frac{a}{q} + \frac{a}{q^2} + \ldots + \frac{a}{q^{15}} = \frac{a(q^{15}-1)}{q^{15}(q-1)} = 8303{\cdot}74\ K\ (8303{\cdot}7\ K),$$

somit $8000 + 8303{\cdot}74 = 16303{\cdot}74\ K$ $(16303{\cdot}7\ K)$.

91) $K + \frac{Kp}{100}$, $K + \frac{Kp}{100} + \frac{Kp}{100}\left(1 + \frac{p_1}{100}\right)$,

$K + \frac{Kp}{100} + \frac{Kp}{100}\left(1 + \frac{p_1}{100}\right) + \frac{Kp}{100}\left(1 + \frac{p_1}{100}\right)^2$ etc.;

daher nach n Jahren:

$$S_n = K + \frac{Kp}{100} + \frac{Kp}{100}\left(1 + \frac{p_1}{100}\right) + \frac{Kp}{100}\left(1 + \frac{p_1}{100}\right)^2 + \ldots + \frac{Kp}{100}\left(1 + \frac{p_1}{100}\right)^{n-1}$$

setzt man $1 + \frac{p_1}{100} = q_1$, so

$$S_n = K + \frac{Kp}{100}\left[1 + q_1 + {q_1}^2 + \ldots + {q_1}^{n-1}\right] = K + \frac{Kp\,({q_1}^n - 1)}{100\,(q_1 - 1)}$$

und da $100\,(q_1 - 1) = p_1$ ist, so

$$S_n = K\left[1 + \frac{p}{p_1}({q_1}^n - 1)\right].$$

Speziell: 15212 *K* 39 *h* (15212·2).

92) Der Barwert ist $100 + \frac{200}{q} + \frac{300}{q_2} + \ldots + \frac{2000}{q^{19}} =$

$$100 + \frac{100+100}{q} + \frac{100+2.100}{q^2} + \ldots + \frac{100+19.100}{q^{19}} =$$

$$100\left[1 + \frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q^{10}}\right] + \frac{100}{q}\left[1 + \frac{2}{q} + \frac{3}{q^2} + \ldots + \frac{19}{q^{18}}\right]$$

nach § 11, Nr. 33 ist der Barwert

$$= 100\,\frac{q^{20}-1}{q^{19}(q-1)} + \frac{100}{q^{19}\,(q-1)^2}\,[q^{20} - 20q + 19] =$$

$$\frac{100}{q^{19}\,(q-1)^2}\,[q^{21} - 21q + 20].$$

Speziell: 11649 *K* 82 *h* (11649).

Digitized by Google

93) Die aufeinander folgenden Rentenbezüge sind:

$$r,\ r+\frac{\alpha r}{100},\ r+\frac{2\alpha r}{100},\ \ldots\ r+\frac{(n-1)\alpha r}{100},$$

daher ihr Wert zu Beginn des ersten Jahres:

$$\left(\frac{r}{q}+\frac{r}{q^2}+\ldots+\frac{r}{q^n}\right)+\left[\frac{\alpha r}{100q^2}+\frac{2\alpha r}{100q^3}+\ldots+\frac{(n-1)\alpha r}{100q^n}\right]=$$

$$\frac{r\,[q^n-1]}{q^n\,(q-1)}+\frac{\alpha r}{100q^n(q-1)^2}\,[q^n-nq+(n-1)]$$

und so groß ist auch der zu Beginn des ersten Jahres einzuzahlende Betrag.

Speziell: 5358 *K* 48 *h* (5358·4).

94) Leistung des *A* nach *m* Jahren: aq^m.

Leistung der Bank in demselben Momente:

$$x+\frac{x+b}{q}+\frac{x+2b}{q^2}+\ldots+\frac{x+(n-1)\,b}{q^{n-1}}=$$

$$\frac{x\,(q^n-1)}{q^{n-1}(q-1)}+\frac{b\,[q^n-n\,q+(n-1)]}{q^{n-1}\,(q-1)^2}$$

und diese muß gleich aq^m sein, daraus:

$$x=\frac{aq^{m+n-1}\,(q-1)^2-b\,[q^n-n.q+(n-1)]}{q^{n+1}-q^n-q+1}.$$

Speziell: $x = 364\ K\ 67\ h$ (364·68).

95) Angenommen, alle L_6 treten unter dieser Bedingung ein, so ist die Einnahme der Bank: $L_6 . x . q^{18}$ und ihre Auslage $L_{24} . a$, daher

$$x=\frac{L_{24}.a}{L_6.q^{18}}=1219{\cdot}85\ K\ (1219{\cdot}86\ K).$$

96) $x = 1925{\cdot}91\ K$ (1925·9 *K*).

97) Denkt man sich, alle 593 vierjährigen Kinder treten bei, so ist ihre Leistung am Anfange des ersten Jahres $593.x$ und dieser Betrag liegt durch volle 16 Jahre an, wächst daher zu $593xq^{16}$, zu Beginn des zweiten Jahres leben noch 579 Kinder, ihre Leistung ist $579x$ und in 15 Jahren wächst dieser Betrag zu $579 . xq^{15}$ an u. s. f.

Am Ende des 16. Jahres ist der geleistete Betrag:

$$x\,[593.q^{16}+579.q^{15}+\ldots+495.q]$$

und dieser Betrag ist in so viele Teile zu zerteilen, als Personen 20 Jahre alt werden, d. i. 491; somit

$K=\frac{x}{491}\,[593.q^{16}+579.q^{15}+\ldots+495.q]$ oder allgemein:

Digitized by Google

$$K = \frac{x}{L_{20}} [L_4 q^{16} + L_5 q^{15} + \ldots + L_{19} . q] =$$

$$\frac{x . q^{20}}{L_{20}} \left[\frac{L_4}{q^4} + \frac{L_5}{q^5} + \ldots + \frac{L_{19}}{q^{19}}\right] =$$

$$\frac{x\ q^{20}}{L_{20}} \left[\left(\frac{L_4}{q^4} + \frac{L_5}{q^5} + \ldots + \frac{L_{95}}{q^{95}}\right) - \left(\frac{L_{20}}{q^{20}} + \frac{L_{21}}{q^{21}} + \ldots + \frac{L_{95}}{q^{95}}\right)\right].$$

Die Summen dieser diskontierten Beträge sind in der Tabelle in der Rubrik S_n enthalten:

$$K = \frac{x . q^{20}}{L_{20}} [S_4 - S_{20}] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I}$$

daraus $x = \frac{K . L_{20}}{(S_4 - S_{20})\, q^{20}}$ . . . . . II.

Speziell: $x = \frac{5000 . 491}{(7934 \cdot 59 - 2895 \cdot 10)\ (1 \cdot 05)^{20}} = 183 \cdot 6\ K\ (183 \cdot 6\ K)$.

98) Die Aufgabe ist identisch mit folgender:

Welcher Betrag müßte für den 60jährigen in eine Rentenanstalt eingezahlt werden, damit diese in der Lage ist, ihm jährlich 1750 K zahlen zu können?

Sei der Betrag y, so leisten alle 210 60jährigen Personen den Betrag $210y$ und dafür ist die Leistung der Anstalt im Momente des Geschäftsabschlusses:

$$1750 \left[\frac{201}{1 \cdot 05} + \frac{192}{(1 \cdot 05)^2} + \ldots + \frac{1}{(1 \cdot 05)^{35}}\right], \text{ daher}$$

$$y = \frac{1750\ (1 \cdot 05)^{60}}{210} \left[\frac{210}{(1 \cdot 05)^{61}} + \frac{192}{(1 \cdot 05)^{62}} + \ldots + \frac{1}{(1 \cdot 05)^{95}}\right]$$

$$y = \frac{1750\ (1 \cdot 05)^{60}}{210} S_{61} = 13600\ K\ (13599).$$

99) $y = \frac{1000\ (1 \cdot 05)^{38}}{L_{38}} S_{38} = 13155 \cdot 07\ K\ (13154 \cdot 6)$.

100) $x = \frac{3000 . L_{50}}{(1 \cdot 05)^{50} . S_{51}} = 303 \cdot 63\ K\ (303 \cdot 65)$.

§ 13. Kombinationslehre und binomischer Lehrsatz.

1) $\underset{(w)}{C^4_x} = \binom{x+3}{4}$, $C^4_x = \binom{x}{4}$, somit

$$\binom{x+3}{4} - \binom{x}{4} = 32\tfrac{1}{2}\, x.$$

$(x+3)(x+2)(x+1)\,x - x(x-1)(x-2)(x-3) = 32\tfrac{1}{2} . 24 . x.$

$(x+3)(x+2)(x+1) - (x-1)(x-2)(x-3) = 65 . 12.$

$x^2 = 64$; sonach $x = 8$. $x = -8$ ist unbrauchbar.

Digitized by Google

2) $V^3{}_x = C^3{}_x + 5x$; $\binom{x}{3}\,3! = \binom{x}{3} + 5x$;

$5.\binom{x}{3} = 5x$; $x^2 - 3x - 4 = 0$, $x = 4$.

$x = -1$ ist unbrauchbar.

3) $V^3{}_{x\,(w)} - 225 = V^3{}_x$; $x^3 - 225 = \binom{x}{3}\,3!$; $x = 9$;

$x = -{}^{25}/_{8}$ ist unbrauchbar.

4) *a*) $\binom{85}{3}\binom{5}{2} : \binom{90}{5} = 0{\cdot}0224737.$

b) $\binom{85}{2}\binom{5}{3} : \binom{90}{5} = 0{\cdot}0008123.$

5) $\frac{4}{36} + \frac{36-4}{36} \cdot \frac{5}{36} = \frac{4}{36} + \left(1 - \frac{4}{36}\right) \cdot \frac{5}{36} =$

$= 1 - 1 + \frac{4}{36} + \left(1 - \frac{4}{36}\right)\frac{5}{36} =$

$= 1 - \left(1 - \frac{4}{36}\right)\left(1 - \frac{5}{36}\right) = \frac{19}{81}.$

6) $w = \frac{g}{m}$, wo g die Anzahl der günstigen und m die Anzahl der möglichen Fälle bedeutet.

$g = \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \binom{n}{6} + \ldots$

$m = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n}.$

Aus $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$

und aus $(a-b)^n = a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 - \ldots$ folgt für

$a = b = 1$. $2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots$ und

$$0 = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots$$

daher durch Addition

$2^n = 2 + 2\left[\binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots\right]$ und

$\binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1 = g$

$w = \frac{2^{n-1} - 1}{2^n - 1}.$

7) $\left\{x^5 + \binom{5}{1}.6x^4 + \binom{5}{2} 6^2 x^3 + \ldots\right\} + \left\{x^5 - \binom{5}{1} 6x^4 + \ldots\right\} = 19932$

$2.6\binom{5}{1} x^4 + 2.216\binom{5}{3} x^2 + 2.6^5 = 19932$

$x^4 + 72x^2 = 73.$

$x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{-73}.$

Digitized by Google

8) $(2-i)^6 = 64 - 192i - 240 + 160i + 60 - 12i - 1 = -117 - 44i.$

9) Das siebente Glied ist $\binom{20}{6} \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)^6 = \frac{4845}{8} x^{12}$,

das fünfzehnte Glied ist $\binom{20}{14} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{14} = \binom{20}{6} \left(\frac{x^2}{2}\right)^{14} = \frac{4845}{2048} x^{28}$.

10) $\frac{1}{a\sqrt{b}} [a\sqrt{b} - b\sqrt{a}]^5 = ab^2\sqrt{a}\,(\sqrt{a} - \sqrt{b})^5 =$
$a^2b^2(a^2 + 10ab + 5b^2) - ab^2\sqrt{ab}\,(5a^2 + 10ab + b^2)$.

11) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^3+x}} = (a^3+x)^{-1/3} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{x}{a^3}\right)^{-1/3} =$
$\frac{1}{a}\left[1 - \frac{1}{3}\frac{x}{a^3} + \frac{1.4}{2!3^2}\frac{x^2}{a^6} - \frac{1.4.7}{3!3^3}\frac{x^3}{a^9} + \frac{1.4.7.10}{4!3^4}\frac{x^4}{a^{12}} - \ldots\right]$.
Das $(n+1)^{te}$ Glied ist $(-1)^n \frac{1.4.7\ldots(3n-2)}{3^n.n!} \frac{x^n}{a^{3n+1}}$.

12. $\binom{10}{6} x^4 - \binom{10}{8} x^2 = 165$
$210x^4 - 45x^2 = 165$, $42x^4 - 9x^2 = 33$
$x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{-\frac{11}{14}}$.

13) $\sqrt{\sqrt[3]{x^3} - \sqrt{x}} = \sqrt{\sqrt[3]{x^3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)} = \sqrt[3]{x}\left[1 - \frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right]^{1/2} =$
$\sqrt[3]{x}\left[1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{x}} - \frac{1}{2!2^2}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1\,3}{3!2^3}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1.3.5}{4!2^4}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \ldots\right]$.
Das r^{te} Glied ist:
$$-\frac{1.3.5\ldots[2(r-2)-1]}{(r-1)!\,2^{r-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{x^{r-1}}}.$$

14) $\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{1}{2}[2x + 2\sqrt{x^2-1}] =$
$x + \sqrt{x^2-1} = x\left[1 - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{1/2}\right] =$
$x\left[2 - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2!2^2}\cdot\frac{1}{x^4} - \frac{1.3}{3!2^3}\cdot\frac{1}{x^6} - \frac{1.3\,5}{4!2^4}\cdot\frac{1}{x^8} - \frac{1.3.5.7}{5!2^5}\cdot\frac{1}{x^{10}} - \ldots\right.$
$\left. - \frac{1.3.5\ldots(2r-5)}{(r-1)!\,2^{r-1}} \cdot \frac{1}{x^{2(r-1)}} - \ldots\right]$.

15) $\sqrt{47} = \sqrt{49-2} = \sqrt{49\,(1 - \frac{2}{49})} = 7\,(1 - \frac{2}{49})^{1/2} =$
$7\left[1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{49} - \frac{1}{2!2^2}\cdot\frac{4}{2401} - \frac{1.3}{3!2^3}\cdot\frac{8}{117649} - \ldots\right] = 6{\cdot}85565.$

Digitized by Google

16) $\sqrt{35} = 6(1 - {}^1/_{36})^{1/2} = 6\left[1 - {}^1/_2 \cdot {}^1/_{36} - \frac{2}{2!2^2}\cdot\frac{1}{36^2} - \frac{1.3}{3!2^3}\cdot\frac{1}{36^3} - \ldots\right]$

$\sqrt{35} = 5{\cdot}91608.$

Die beiden anderen Arten sind: gewöhnliches, abgekürztes Würzelziehen und Bestimmung der Wurzel mit Hilfe der Logarithmen.

17) $(3x)^8 + \binom{8}{1}(3x)^7\frac{1}{2x} + \binom{8}{2}(3x)^6\left(\frac{1}{2x}\right)^2 + \binom{8}{3}(3x)^5\left(\frac{1}{2x}\right)^3 + \binom{8}{4}(3x)^4\left(\frac{1}{2x}\right)^4 + \ldots$

$\binom{8}{2}(3x)^6\left(\frac{1}{2x}\right)^2 + \binom{8}{3}(3x)^5\left(\frac{1}{2x}\right)^3 + \binom{8}{4}(3x)^4\left(\frac{1}{2x}\right)^4 = \frac{7.81.101}{8}$

$3x^4 + x^2 = 4; \quad x_{1,2} = \pm 1, \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{-{}^4/_3}$

18) $2x(1-x)^{-5} = 2x\left[1 + \binom{5}{1}x + \binom{6}{2}x^2 + \binom{7}{3}x^3 + \ldots\right]$

$= 2x + 10x^2 + 30x^3 + 70x^4 + \ldots$

daher

$30x^3 + 10x^2 = 20x$

$x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = -1.$

19) Das vierte Glied ist $-\binom{8}{3}(3x)^5\left(\frac{1}{5x}\right)^3$ und dies soll $= 1$ sein, daher ${}^{243}/_{125}x^2 = {}^1/_{56}$, $x = \pm {}^5/_{756}\sqrt{210} =$

$\pm {}^5/_{756} \cdot 14{\cdot}49138 = \pm 0{\cdot}095842.$

20) $a + aq + aq^2 + aq^3 = 30 \ldots \alpha$

$a - aq + aq^2 - aq^3 = 10 \ldots \beta$

$\frac{\alpha}{\beta}$ gibt $\frac{1+q}{1-q} = 3$, $q = {}^1/_2$, somit $a = 16$

16, 8, 4, 2, 1, ${}^1/_2$, ...

$n = 8$

$\left(x - \frac{1}{2x}\right)^8 = \left(\frac{1}{2x}\right)^8 (2x^2 - 1)^8$

$\left(\frac{1}{2x}\right)^8\left[\binom{8}{2}(2x^2)^6 - \binom{8}{3}(2x^2)^5\right] = -{}^7/_4$

$x^4 - x^2 + {}^1/_4 = 0$, $(x^2 - {}^1/_2)^2 = 0$, $x = \pm {}^1/_2\sqrt{2}$.

21) $aq + aq^3 + aq^5 = 147 \ldots \alpha$

$a + aq + aq^4 = {}^{147}/_2 \ldots \beta$

$\frac{\alpha}{\beta}$ gibt $q = 2$, somit $a = 3{}^1/_2$ und das dritte Glied $n = 14$.

$S = \frac{r}{2}[2a_1 + (r-1)d] = 98$, da $a_1 = 5$, $d = 3$, $S = 98$,

so ist $r = 7$, indem von $r = \frac{-7 \pm 49}{6}$ nur das positive Zeichen Geltung hat.

$x^7 y^7$ ist das achte Glied der Entwicklung von $(x - {}^1/_2 y)^{14}$, somit $-{}^{429}/_{16}\, x^7 y^7$.

Digitized by Google

22) Da $\sin 30^0 = {}^1/_2$ ist, so $\sqrt[5]{1 + {}^1/_{10}} = (1 + {}^1/_{10})^{1/5} =$
$1 + {}^1/_5 \cdot {}^1/_{10} - {}^2/_{25} \cdot {}^1/_{100} + {}^6/_{125} \cdot {}^1/_{1000} - {}^{21}/_{625} \cdot {}^1/_{10000} + \ldots$
$= 1{\cdot}01924..$

23) Da $\cos 60^0 = {}^1/_2$ ist, so
$\sqrt[4]{1 + {}^1/_8} = (1 + {}^1/_8)^{1/4} =$
$1 + {}^1/_4 \cdot {}^1/_8 - \frac{1.3}{2!\,4^2} \cdot {}^1/_{64} + \frac{1.3.7}{3!\,4^3} \cdot {}^1/_{512} - \frac{1.3.7.11}{4!\,4^4} \cdot {}^1/_{4096} + \ldots$
$= 1{\cdot}02988.$
Für $n > 2$ ist das n^{te} Glied $(-1)^n \frac{1.3 \ldots (4n-9)}{(n-1)!\,4^{n-1}} \cdot \frac{1}{8^{n-1}}$.

§ 14. Wurzeln und Logarithmen.

1) $0{\cdot}751097$.

2) Macht man den Nenner rational und setzt dann für x den Wert
$${}^1/_2 \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right) = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$$ ein, so erhält man
$$y = \frac{1}{2b}\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}\left[\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} - a + b\right]$$
und für $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$ $y_1 = a + b$
für $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = -(a + b)$ $y_2 = \frac{a(a+b)}{b}$.

3) $$\sqrt{\frac{x^2 + 2x\sqrt{x} + 3x + 2\sqrt{x} + 1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}(x + \sqrt{x} + 1) =$$
$$\sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

4) Ordnet man den Ausdruck, so erhält man:
$$x + 3x^{2/3} + 6x^{1/3} + 7 + \frac{6}{x^{1/3}} + \frac{3}{x^{2/3}} + \frac{1}{x}$$
und daraus ist die dritte Wurzel: $x^{1/3} + 1 + \frac{1}{x^{1/3}}$.

5) $1{\cdot}29$.

6) $564{\cdot}584$ $(564{\cdot}58)$.

7) Nach dem ersten Abzapfen sind 99 Liter Wein und ein Liter Wasser im Fasse, somit hat ein Liter der Mischung ${}^{99}/_{100}$ Liter Wein; nach dem zweiten Abzapfen sind 99 Liter mit dem Gehalte ${}^{99}/_{100}$ Wein und ein hinzugefügter Liter Wasser, oder im Fasse sind nun $\frac{99.99}{100}$ Wein, daher hat jetzt ein Liter der Mischung den Gehalt $\left(\frac{99}{100}\right)^2$ u. s. f.

Digitized by Google

$$\left(\frac{99}{100}\right)^n = {}^1/_2,\ n = 68{\cdot}9677\ (69{\cdot}04),$$

somit nahezu 69 mal.

Oder die in den n maligen Versuchen herausgenommene Menge Wein muß gerade 50 Liter betragen:

$$1 + \frac{99}{100} + \left(\frac{99}{100}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{99}{100}\right)^{n-1} = 50$$

$$1 - \left(\frac{99}{100}\right)^n = 50\left[\frac{99}{100} - 1\right],\ \text{daraus}\ \left(\frac{99}{100}\right)^n = {}^1/_2.$$

8) Da der log eines Produktes gleich ist der Summe der log der Faktoren, so

$$\log\left(2\sqrt{x + {}^2/_3}\,.\sqrt{x-1}\right) = 1{\cdot}5 = {}^3/_2 = \log 10^{3/2}$$

daraus

$$3x^2 - x = 752$$

und $x_1 = 16,\ x_2 = -{}^{47}/_3$.

9) $^x\log 450 = {}^x\log 40 + 1{\cdot}16395$

$$^x\log {}^{450}/_{40} = 1{\cdot}16395,\quad 11{\cdot}25 = x^{1{\cdot}16395}$$

$$\log x = \frac{\log 11{\cdot}25}{1{\cdot}16395};\ x = 8.$$

$2{\cdot}93792;\ 1{\cdot}77397.$

10) $2.x^{2\log x} + 3x^{\log x} + \frac{3}{x^{\log x}} + \frac{3}{x^{2\log x}} = 230{\cdot}32$

setzt man $x^{\log x} = y$, so

$$2y^4 + 3y^3 - 230{\cdot}32y^2 + 3y + 2 = 0$$

und für $y + \frac{1}{y} = z$, so $2z^2 + 3z - 234{\cdot}32 = 0.$

$z_1 = 10{\cdot}1,\ z_2 = -11{\cdot}6.$

Aus z_1 folgt $y_1 = 10,\ y_2 = {}^1/_{10}$,

aus z_2 folgt $y_{3,4} = -5{\cdot}8 \pm \sqrt{32{\cdot}64}$,

somit

$$x_1 = 10,\quad x_2 = \frac{1}{10},\quad x_3 = 10^{+i},\quad x_4 = \frac{1}{10^i}$$

$$x_{5,6,7,8} = 10^{\pm\sqrt{\log(-5{\cdot}8 \pm \sqrt{32{\cdot}64})}}.$$

Digitized by Google

II. Abschnitt.

Geometrie.

A. Planimetrie.

§ 15. Konstruktions-Aufgaben.

1) Ist $d = c - b$ und α gegeben, so sind die an d anliegenden Winkel $(90 - \alpha)$ und $\left(90 + \frac{\alpha}{2}\right)$.

2) $c - b$, a; man errichte mit $c - b$ und a als Katheten ein rechtwinkliges Dreieck und im Halbierungspunkte der Hypotenuse dieses Hilfsdreieckes eine Normale, so schneidet diese die verlängerte Kathete $c - b$ im dritten Eckpunkte des verlangten Dreieckes.

3) Man trägt auf einer Geraden $a + b$ auf, $a + b = AO + OB$ und errichtet mit a, wenn $a < b$, als Radius einen Halbkreis und zieht an denselben von A und B Tangenten, die sich im Punkte C schneiden, so ist ABC das gesuchte Dreieck.

(Der Winkel, den zwei von einem Punkte C an den Kreis gezogenen Tangenten bilden, wird durch die Zentrale CO halbiert.)

4) Man errichtet in einem beliebigen Punkt der Geraden AB, etwa in C, die Normale $CD = h$ gleich der gegebenen Höhe und trägt von C aus auf AB das Stück $d = CE$ gleich der Differenz der Projektionen ab; halbiert man dann CE und beschreibt aus dem Halbierungspunkte F mit FD einen Halbkreis, so schneidet dieser die Gerade AB in G und H, denn der Winkel bei D beträgt 90°, somit liegt D in der Peripherie des mit FD beschriebenen Halbkreises. Das gesuchte Dreieck ist GDH.

5) $b + h_c$, α. Man trage $b + h_c = AB$ auf dem einen Schenkel von α auf und trage in B auf BA den Winkel $45 - \frac{\alpha}{2}$ an, so schneidet der zweite Schenkel dieses Winkels den andern Schenkel des Winkels α im Punkte C. Die im Mittelpunkte von BC auf BC

Digitized by Google

errichtete Normale schneidet AB in D und die in D auf AB errichtete Normale schneidet die verlängerte AC in E; ADE ist das gesuchte Dreieck.

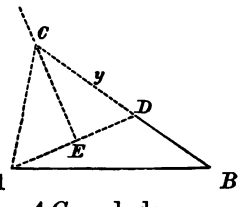
6) Man errichtet in einem Endpunkte der Kathete AB eine Normale AC, zieht dann zu AB und AC in einem Abstande gleich dem gegebenen Halbmesser, im selben Quadranten Parallele, so gibt deren Schnittpunkt O den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises. Beschreibt man nun den Kreis und zieht von B aus an den Kreis eine Tangente, so schneidet dieselbe die AC in D und ABD ist das gesuchte Dreieck.

7) Man trage in den Endpunkten von $s = a + b + c$ an s die Winkel $\alpha/_2$, $\beta/_2$ an so erhält man den Scheitel C.

8) Man errichte in einem Endpunkte von $s = AB$ eine Normale $= h = AD$ und trage $\frac{\alpha}{2}$ in A an AB an, ziehe durch D zu AB eine Parallele, so schneidet diese den zweiten Schenkel von $\frac{\alpha}{2}$ im Scheitel C des gesuchten Dreieckes.

9) Trägt man in D an Dy, d. i. an die Verlängerung von $BD = a - b$, den Winkel $^1/_2\ (180 - \gamma)$ an und beschreibt aus B mit c als Radius einen Bogen, so schneidet dieser den Schenkel DE im Punkte A; errichtet man nun im Mittelpunkte von AD eine Normale, so schneidet diese die verlängerte BD in C; ABC ist das gesuchte Dreieck.

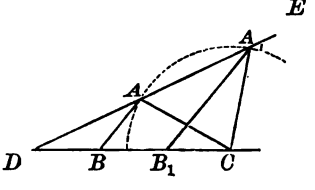
Fig. 2.



Da $AC = CD$, so ist $BD = BC - AC - AC$ und da $< CDA = < CAD = ^1/_2\ (180 - \gamma)$ ist, so ist $< ACD = \gamma$.

10) $DC = b + c$; in D trägt man an DC den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ an und aus C beschreibt man mit a einen Bogen, so schneidet dieser den Schenkel DE in den Punkten A und A_1, trägt man nun in A und A_1 an ED den Winkel $\alpha/_2$ an, so erhält man B und B_1, das gesuchte Dreieck ist ABC oder A_1B_1C.

Fig. 3.



Doch sind die beiden Dreiecke kongruent; denn $AC = A_1C$, $< ABC = < A_1B_1C = \alpha$, $< ACB = < B_1A_1C$.

Die Gleichheit der letzteren Winkel ergibt sich aus Folgendem: $< ACB = 180 - < CAB - \alpha = 180 - x - \alpha$, wenn man $< CAB = x$ setzt,

Digitized by Google

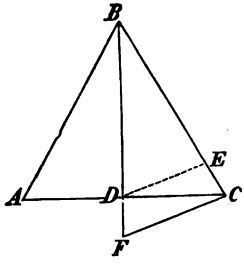
$$< CA_1A = < CAA_1 = 180^0 - x - \frac{\alpha}{2} = < CA_1B_1 + < B_1A_1A$$

und da $< B_1A_1A = \frac{\alpha}{2}$ ist, so

$$< CA_1B_1 = 180 - x - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 180 - x - \alpha.$$

11) Man errichtet im Mittelpunkte der Basis $AB = b$ eine Normale $a + h_b = CD$ und verbindet D mit A; dann errichtet man im Mittelpunkte von AD eine Normale, welche CD im Punkte E schneidet; ABE ist das gesuchte Dreieck.

Fig. 4.

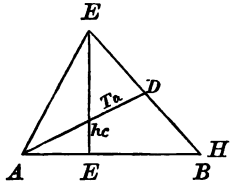


12) $CE = a - h_b$. Trägt man $DF = a - h_b$ in der Mitte von b normal auf AC auf, so ist $BF = BC$ und die in der Mitte von CF errichtete Normale geht durch den Scheitel B des gesuchten Dreieckes ABC.

13) Zu dem gegebenen Schenkel a errichte man im Abstande h_a eine Parallele und beschreibe aus einem Endpunkte des Schenkels a als Kreismittelpunkt mit a einen Bogen, der Schnittpunkt desselben mit der Parallelen ist der dritte Eckpunkt des Dreieckes.

14) h_c und a bestimmen das rechtwinklige Dreieck EBC, die Ecke A wird durch den Schnitt von T_a mit der (verlängerten) BE bestimmt.

Fig. 5.



Errichtet man sonach im Punkte E der Geraden EH auf diese eine Normale $EC = h_c$ und beschreibt aus C mit a einen Bogen, so schneidet dieser EH in B. Beschreibt man dann aus dem Mittelpunkte von BC, d. i. aus D mit T_a, einen Bogen, so schneidet dieser die (verlängerte) BE in A und A'; ABC ist eines der verlangten Dreiecke.

15) Man konstruiere über $2T$ als Diagonale mit a und b ein Parallelogramm und ziehe die zweite Diagonale.

16) Man ziehe zu c im Abstande h_c eine Parallele und beschreibe aus einem Endpunkte von c mit $2T_a$ einen Bogen, der die Parallele schneidet. Die Diagonale eines Parallelogrammes halbieren einander.

17) Man ziehe im Abstande h_a zwei Parallele und beschreibe aus einem beliebigen Punkte der einen mit c und $2T_b$ Kreisbogen.

Digitized by Google

18) Man ziehe aus den Endpunkten von c mit h_a und h_b Kreisbogen und auf diese von den Endpunkten der Geraden c Tangenten; oder: die Fußpunkte der Höhen liegen in dem über c beschriebenen Halbkreis.

19) Die gegebene Basis sei a und der gegebene Winkel α. Man mache den einen Schenkel des Winkels gleich a und betrachte ihn als Sehne und den andern Schenkel als Tangente eines Kreises. Der geometrische Ort der Spitzen ist der Bogen des Kreisabschnittes.

20) Da T_b die Basis halbiert, so bestimmen $2\,T_b$ und die Basis ein Parallelogramm. Der Winkel, welcher $2\,T_b$ gegenüberliegt, ist $(180-\beta)$. Man konstruiert daher das durch h_b und T_b bestimmte rechtwinklige Dreieck, verlängert T_b um sich selbst, beschreibt dann über $2\,T_b$ einen Bogen, in welchem alle Peripheriewinkel $(180-\beta)$ sind und verlängert die Verbindungslinie der Fußpunkte von h_b und T_b bis zum Durchschnitte mit dem Kreisbogen.

21) Man errichte über a einen Kreisbogen mit dem Peripheriewinkel α (siehe Nr. 19), dann trage man im Halbierungspunkte von a an a den Winkel auf, den die Transversale mit a bildet, so gibt der Schnittpunkt der Transversalen und des Kreisbogens den dritten Eckpunkt des Dreieckes.

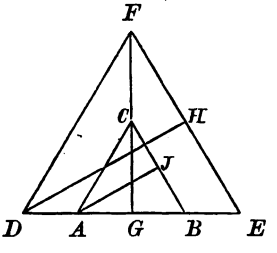
22) Gegeben sei c, α, r. Man errichte den Winkel α, der eine Schenkel sei $AB = c$, der andere AC; dann ziehe man in der Winkelfläche zu AB und zu AC im Abstande r Parallele, der Schnittpunkt derselben gibt den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises. Von B aus ziehe man dann an den Kreis eine Tangente, so gibt deren Schnittpunkt mit AC den dritten Eckpunkt des Dreieckes.

23) Man halbiert den Winkel, fällt vom gegebenen Punkt auf die Halbierungslinie eine Normale und verlängert dieselbe bis zum Durchschnitt mit den Schenkeln.

24) Errichtet man ein gleichschenkliges Dreieck DEF mit dem gegebenen Basiswinkel, so ist es mit dem gesuchten Dreiecke, etwa ABC, ähnlich und es ist

$$CG : FG = CA : FD,$$
$$AJ : DH = AC : DF, \text{ daher}$$
$$CG : FG = AJ : DH \text{ und}$$
$$(CG + AJ) : (FG + DH) = CG : FG.$$

Fig. 6.

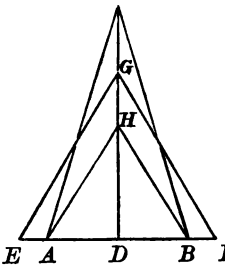


Digitized by Google

Da nun $(CG + AJ)$ als Summe der gegebenen Höhen, FG und DH aus dem Hilfsdreieck bekannt sind, so kann CG als vierte geometrische Proportionale konstruiert werden und dann hat man $CG = h_c$ und die beiden anliegenden Winkel 90^0, $90^0 - \alpha$.

25) Das gegebene gleichschenklige Dreieck sei ABC, das mit ihm flächengleiche gleichseitige Dreieck sei etwa EFG; letzteres kennt man, wenn man seine Höhe kennt. Errichtet man über der Basis des gleichschenkligen Dreieckes ABC ein gleichseitiges Dreieck ABH, so ist

Fig. 7.



$$\triangle ADH : \triangle EDG = DH^2 : DG^2$$

oder weil $\triangle EDG = \triangle ADC$, so

$$\triangle ADH : \triangle ADC = DH^2 : DG^2.$$

Nun ist $ADH = \frac{AD.DH}{2}$, $ADC = \frac{AD.DC}{2}$, daher

$$DH : DC = DH^2 : DG^2$$

und $$DG = \sqrt{DH.DC}.$$

§ 16. Regelmäßige Polygone.

1) Die Seite des einem Kreise mit dem Radius r ein- bezüglich umgeschriebenen regelmäßigen Achteckes ist

$s = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, $S = 2r(\sqrt{2} - 1)$, daher ist

$f = 8r^2(\sqrt{2} - 1) = 649{\cdot}48685\ m^2$.

2) Die vom Zentrum auf die Mitte einer Seite des eingeschriebenen Achteckes gezogene Gerade ist $h = \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$,

daher ist $f = \frac{8r}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.\frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} = 2r^2\sqrt{2}$ und

$r = {}^1/_2\sqrt{f\sqrt{2}}$ der Radius des umgeschriebenen Kreises.

a) Der Radius des umgeschriebenen Kreises ist $R = 5{\cdot}3182962\ m$, aus $8r^2(\sqrt{2} - 1) = 80$ oder aus $r = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

folgt $r = 4{\cdot}913465\ m$

und aus $(R^2 - r^2)\pi$ ergibt sich $f = 13{\cdot}012901$.

b) $R = 6{\cdot}513556$, $r = 6{\cdot}0177413$, $f = 19{\cdot}51936$.

3) Die Seite des eingeschriebenen Zwölfeckes ist $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, das vom Zentrum auf eine solche Seite gefällte Lot $r = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

$R = 6{\cdot}559472\ m$, $r = 6{\cdot}335963\ m$, $u = 40{\cdot}7452\ m$.

Digitized by Google

4a) Aus $\frac{n(n-3)}{2} = 35$ folgt, daß das Polygon ein Zehneck ist. Ist r der Radius des umgeschriebenen Kreises, so $r : s = s : (r - s)$ und daraus $r = \frac{s}{2}(1 + \sqrt{5})$, somit der Abstand des Mittelpunktes von der Zehneckseite $h = \frac{s}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$ und $f = \frac{5s^2}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.
Aus $r : s = s : (r - s)$ folgt auch $s = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$, daher
$h = \frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ und $f = 10.\frac{sh}{2} = \frac{5r^2}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

4b) Aus $\frac{n(n-3)}{2} = 54$ folgt $n = 12$, somit ist das Polygon ein Zwölfeck. Nach Nr. 3 $S : r\sqrt{2-\sqrt{3}} = r : \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$,
$S = 2r(2 - \sqrt{3})$.
$$f = 12r^2(2 - \sqrt{3}) = 3 \cdot 21539\ m^2.$$

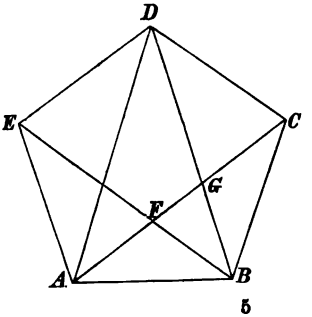
5) $\frac{n(n-3)}{2} = 252$, $n = 24$, somit ist das Polygon ein Vierundzwanzigeck. Die Seite des 24Eckes ist $s = r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, das vom Zentrum auf eine solche Seite gefällte Lot ist
$h = \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, daher ist
$f = 6r^2\sqrt{2-\sqrt{3}} = 3 \cdot 1058286$,
$F =$ $3 \cdot 1415926$, somit $\Delta = 0 \cdot 035764\ m^2$ und
$s = 0 \cdot 26105$.

6) Nach Nr. 5 $S : r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}} = r : \frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$
$$S = 2r\sqrt{2+\sqrt{3}}\,[2 - \sqrt{2+\sqrt{3}}]$$
$s = 1 \cdot 82737\ m$, $u = 43 \cdot 85682\ m$, $f = 152 \cdot 18566\ m^2$
$S = 1 \cdot 84314\ m$, $U = 44 \cdot 23524\ m$, $F = 154 \cdot 82334\ m^2$.

7) Der sechseckige Stern besteht aus 12 kongruenten, gleichseitigen Dreiecken, die Höhe eines solchen Dreieckes ist $\frac{R}{2}$, daher ist die Seite $\frac{R}{3}\sqrt{3}$, $f = R^2\sqrt{3}$.

8) Da $\sphericalangle ABC = 108^0$, $AB = BC$ ist, so ist $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BAC = 36^0$ und
$\sphericalangle ACD = 108 - 36 = 72^0$,
daher
$\sphericalangle ACD + \sphericalangle EDC = 180^0$,
also
AC parallel zu ED und ebenso BD parallel zu AE,
somit
$$AG = a.$$

Fig. 8.



Digitized by Google

$$\triangle ADG \sim BCG, \text{ also } AD : BC = AG : CG$$

oder

$$d : a = a : (d - a),$$

daraus

$$d = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1),\ CG = d - a = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) \text{ und}$$

$$FG = d - 2CG = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}).$$

§ 17. Rechnungs-Aufgaben.

1*a*) Aus $a^2 = c^2 - b^2$, $a^2 = bc$ folgt

$$b = \frac{a}{2}\sqrt{2(\sqrt{5}-1)},\ c = \frac{a}{2}\sqrt{2(\sqrt{5}+1)}.$$

1*b*) Aus den drei Gleichungen $\frac{bh}{2} = a^2$, $b + h = 2s$ und $h^2 + \frac{b^2}{4} = s^2$ folgt die Basis $b = a\sqrt{3}$, ein Schenkel $s = \frac{5a\sqrt{3}}{6}$, die Höhe $h = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$ daher $b : s : h = 6 : 5 : 4$.

2) $\overline{AC}^2 = \frac{\overline{BC}^2}{4}\sqrt{3} = {}^1/_2\left(\frac{AB}{2}\right)^2\pi$; $2\overline{AC}^2 = AD^2 = (15{\cdot}5)^2$.

$AC = \frac{AD\sqrt{2}}{2}$, $BC = AD\sqrt[4]{{}^1/_3}$, $AB = \frac{2AD}{\pi}\sqrt{\pi}$.

Ist $AC + BC + AB = 2s$, so $f = \sqrt{s(s-AC)(s-BC)(s-AB)}$.

$AC = 10{\cdot}960155$, $BC = 16{\cdot}655834$, $AC = 17{\cdot}489877$ *cm*.

$f = 88{\cdot}3529$ *cm*^{2}.

3) Ist x der Abstand des Punktes M von der Transversalen, so ist $f = x(r - x)\operatorname{tang}\alpha$ und daraus $x = \frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{f}{\operatorname{tang}\alpha}}$.

Da x reell sein muß und so lange reell bleibt als der Wurzelausdruck reell ist, so ergibt sich der Maximalwert von f aus $\frac{r^2}{4} - \frac{f}{\operatorname{tang}\alpha} = 0$, d. i. $f = \frac{r^2}{4}\operatorname{tang}\alpha$.

Für diesen Wert ist $x = \frac{r}{2}$ und damit geht die obige Formel $f = x(r - x)\operatorname{tang}\alpha$ auch wieder in $f = \frac{r^2}{4}\operatorname{tang}\alpha$ über.

4) Wenn u der gegebene Umfang des Sektors ist, so ist $u - 2r$ der Bogen und $f = \frac{r}{2}(u - 2r)$, $2r^2 - ru + 2f = 0$

$$r = \frac{u}{4} \pm \sqrt{\frac{u^2}{16} - f},$$

Digitized by Google

da r nun so lange reell bleibt, als f nicht größer ist als $\frac{u^2}{16}$, so hat f als Maximum den Wert $\frac{u^2}{16}$, und dann ist $r = \frac{u}{4}$ und aus $f = \frac{r^2\pi}{360}\,\alpha = \frac{u^2}{16}$ folgt für $u = 4r$ der Wert $\alpha = \frac{360}{\pi}$.

5) $x^2 : (y^2 - x^2) : (r^2 - y^2) = 4 : 5 : 7$.
$x = 16\ cm,\ y = 24\ cm.$

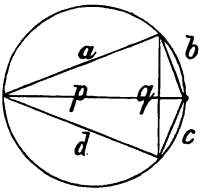
6) $9.3 = (2 + y)\,y$, $y = -1 + \sqrt{28}$, somit ist die Sekante
$x = 2 + y = 1 + \sqrt{28} = 6{\cdot}2915026\ cm.$

7) $x\,(1 + x) = (d + r)\,(d - r)$.
Der äußere Abschnitt $\frac{1}{2}\,[-1 + \sqrt{1 + 4\,(d^2 - r^2)}]$.
Die ganze Sekante $\frac{1}{2}\,[1 + \sqrt{1 + 4\,(d^2 - r^2)}]$.

8) Ist die Länge der Tangente y, so $y^2 = a\,(x + a)$ und $y^2 = (x + a)^2 - 4r^2$, daher
$(a + x)^2 - 4r^2 = ax + a^2$, $x = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 16r^2}}{2}$ und
$x + a = \frac{a + \sqrt{a^2 + 16r^2}}{2}$ als Länge der Sekante.

9) Nach dem Ptolomäischen Satz ist $pq = ac + bd$ und da $p^2 = a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, so sind aus den vier Gleichungen
$a + d = 21$, $b + c = 7$,
$ac + bd = 75$ und $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$
die vier Größen a, b, c, d zu bestimmen.
$a_1 = 10,\ b_1 = 5,\ c_1 = 2,\ d_1 = 11$
$a_2 = 11,\ b_2 = 2,\ c_2 = 5,\ d_2 = 10.$

Fig. 9.



10) $AC^2 + BC^2 = AB^2$, $AC^2 = a^2 + x^2$, $BC^2 = b^2 + (c - x)^2$, $AB^2 = c^2 + (a - b)^2$.

$$2x^2 - 2cx = -2ab;\ x = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}.$$

Die Auflösung ist nur so lange möglich, als $c^2 > 4ab$ ist.

B. Trigonometrie.

§ 18. Goniometrie und goniometrische Gleichungen.

a) $x^2 + px + q = 0$. $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} =$

$$-\frac{p}{2}\left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}}\right].$$

Digitized by Google

Setzt man nun $\frac{2\sqrt{q}}{p} = \sin\alpha$, so ist $\frac{p}{2} = \frac{\sqrt{q}}{\sin\alpha}$ und

$\sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}} = \cos\alpha$, daher

$x = -\frac{p}{2}(1 \mp \cos\alpha) = -\sqrt{q}\,\frac{1 \mp \cos\alpha}{\sin\alpha}$, da

$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$ ist, so ist

$x_1 = -\sqrt{q}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$, $x_2 = -\sqrt{q}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$.

b) $x^2 - px + q = 0$ gibt $x = \frac{p}{2}(1 \pm \cos\alpha)$, somit

$x_1 = \sqrt{q}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$, $x_2 = \sqrt{q}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$.

Da $\sin\alpha < 1$ ist, so muß auch $\frac{4q}{p^2} < 1$ sein; ist $\frac{4q}{p^2} > 1$, so ist die Auflösung mit Hilfe der Substitution $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ nicht möglich.

c) $x^2 + px - q = 0$. $x = -\frac{p}{2}\left[1 \mp \sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}}\right]$.

Setzt man jetzt $\operatorname{tang} a = \frac{2\sqrt{q}}{p}$ und $\frac{p}{2} = \frac{\sqrt{q}}{\operatorname{tang}\alpha}$,

$\sqrt{1 + \frac{4q}{p^2}} = \frac{1}{\cos\alpha}$, so ist

$x = -\frac{p}{2}\left[1 \mp \frac{1}{\cos\alpha}\right] = -\sqrt{q}\,\frac{\cos\alpha \mp 1}{\sin\alpha}$ und

$x_1 = \sqrt{q}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$, $x_2 = -\sqrt{q}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$.

d) $x^2 - px - q = 0$, $x = \frac{p}{2}\left[1 \pm \frac{1}{\cos\alpha}\right] = \sqrt{q}\,\frac{\cos\alpha \pm 1}{\sin\alpha}$, daher

$x_1 = \sqrt{q}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$, $x_2 = -\sqrt{q}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$.

1) $x_1 = \sqrt{q}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$, $x_2 = -\sqrt{q}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$.*)

$\alpha = 65^0\,22'\,32{\cdot}45''$; $x_1 = 0$ [illegible] $1{\cdot}45714$; $x_{1,2} = \frac{-15 \pm 36}{35}$

($\alpha = 65^0\,22'\,33''$; $x_1 = 0$ [illegible] $1{\cdot}4571$).

2) $x_1 = \sqrt{q}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$, $x_2 = -$ [illegible]

$\alpha = 62^0\,55'\,5$ [illegible] $= 7$ [illegible] $2{\cdot}75369$.

($\alpha = 62^0\,55'\,5$ [illegible] $= 7{\cdot}$ [illegible] $2{\cdot}7537$).

*) Die Resultate [illegible] bezie[illegible]fstellige Logarithmentafeln.

Digitized by Google

3) $x_1 = -\sqrt{q}\,\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$, $x_2 = -\sqrt{q}\,\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$.

$\alpha = 43^0\,9'\,41{\cdot}4''$; $x_1 = -1{\cdot}23456$, $x_2 = -7{\cdot}89101$.

($\alpha = 43^0\,9'\,40''$; $x_1 = -1{\cdot}2346$, $x_2 = -7{\cdot}891$).

4) $x_1 = \sqrt{q}\,\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$, $x_2 = \sqrt{q}\,\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$.

$\alpha = 73^0\,7'\,58{\cdot}22''$; $x_1 = 1{\cdot}3579$, $x_2 = 2{\cdot}468$.

($\alpha = 73^0\,8'$; $x_1 = 1{\cdot}3579$, $x_2 = 2{\cdot}468$).

5) Da der Winkel im ersten Quadranten liegt, so kann man entweder $\sin x + \sin(90 - x) = \frac{5}{4}$ oder $\cos(90 - x) + \cos x = \frac{5}{4}$ setzen und kann nun für die Summe der Funktionen das Produkt $2\sin 45^0 \cos(x - 45^0)$ einführen; oder man kann $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ setzen. $x_1 = 72^0\,53'\,8''$ ($72^0\,53'\,10''$). $x_2 = 90 - x_1$ oder man kann beide Teile der Gleichung quadrieren und erhält $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = \frac{25}{16}$, daraus $1 + \sin 2x = \frac{25}{16}$, $\sin 2x = \frac{9}{16}$.

6) Mit $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ geht die Gleichung über in $4\sin^4 x - 3\sin^2 x = -\frac{1}{4}$; $\sin x = \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{4}$, $x_1 = 54^0$, $x_2 = 18^0$, oder wegen $\cos\varphi - \cos\psi = -2\sin\frac{\varphi + \psi}{2}$ $\sin\frac{\varphi - \psi}{2}$ folgt aus $-2\sin 3x \sin x = -\frac{1}{2}$, daß $\cos 4x - \cos 2x = -\frac{1}{2}$, und wegen $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1$, daß $2\cos^2 2x - \cos 2x = \frac{1}{2}$.

7) Multipliziert man die Gleichung mit dem gemeinschaftlichen Nenner, so

$$9\cos x = 9\sqrt{3}\sin x, \text{ oder } \operatorname{tang} x = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$x = 30^0,\ x = \frac{\pi}{6},\ X = \frac{\pi}{6} + n\pi,$$

wo mit X die allgemeine Lösung bezeichnet wird.

8) $\sin 2x \cos x + \sin x = 1$.

$2\sin x \cos^2 x = 1 - \sin x$; $2\sin x(1 - \sin^2 x) = 1 - \sin x$,

somit $(1 - \sin x)[2\sin^2 x + 2\sin x - 1] = 0$.

Daraus $\sin x = 1$, $x = 90^0$; $\sin x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$,

da $\sin x$ nicht größer als 1 sein kann, so entspricht nur das positive Vorzeichen, daher

$\sin x = 0{\cdot}3660254$, $x = 21^0\,28'\,14{\cdot}58''$ ($21^0\,28'\,14''$).

9a) Dividiert man durch $\cos^2 x$, so erhält man $6\,\operatorname{tg}^2 x + 8 = 14\,\operatorname{tg} x$.

$\operatorname{tg} x = \frac{7 \pm 1}{6}$; $x_1 = 45^0$, $x_2 = 53^0\,7'\,48{\cdot}36''$ ($53^0\,7'\,50''$).

Digitized by Google

9b) $\frac{2}{3\cos x}+\frac{6\sin x}{\cos x}=3\cos x;\ 2+18\sin x=9\cos^2 x=9-9\sin^2 x.$
$9\sin^2 x+18\sin x=7,\ \sin x=1/3,\ x=19^\circ 28' 16{\cdot}4''\ (19^\circ 28' 17'').$

10) $\sec^2 x=2,\ \sec^2 x=4/3,$ somit
$\cos^2 x=1/2,\ \cos x=\pm 1/2\sqrt{2},\ x=45^\circ,\ 135^\circ,$
$\cos^2 x=3/4,\ \cos x=\pm 1/2\sqrt{3},\ x=30^\circ,\ 150^\circ.$
Da die Periodizität von cos an $n.360^\circ$ gebunden ist, so ist die allgemeine Lösung $X=n.360^\circ\pm x.$

11) Beachtet man, daß $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ ist, so
$2\sin x\cos 3x=\sin x,\ \sin x=0,\ \cos 3x=1/2.$

12) $2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}=2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2},$ somit
$\sin\frac{5x}{2}\left[\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right]=0$ und $\sin\frac{5x}{2}.\sin x.\sin\frac{x}{2}=0.$

13) Beachtet man, daß $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ ist, so
$2\cos\frac{nx+(n-2)x}{2}\cos\frac{nx-nx+2x}{2}=\cos x$ oder
$2\cos(n-1)x\cos x=\cos x,$
$\cos x=0,\ 2\cos(n-1)x=1.$

14) $2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}=2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}$
$\cos\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)=0$ und $\cos\frac{5x}{2}\sin x.\sin\frac{x}{2}=0.$

15) Da $\cos 2x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$ ist, so ist
$$\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}=\operatorname{tang} x,$$
daher $\cos x=1/2\sin x\operatorname{tang} x,\ \operatorname{tang} x=\pm\sqrt{2}.$
$\operatorname{tang} x=+\sqrt{2},\ x_1=54^\circ 44' 8{\cdot}2''\ (54^\circ 44' 9'').$
$\operatorname{tang} x=-\sqrt{2},\ x_2=180-x_1;$
$X=x+n\pi.$

16) Entweder $\sin 2x+\sin(2x+x)=3\sin x$
$\sin 2x+\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x=3\sin x$
$2\sin x\cos x(1+\cos x)+\sin x(\cos 2x-3)=0,$
somit $\sin x=0$ und $2\cos x+2\cos^2 x+2\cos^2 x-4=0$
$2\cos^2 x+\cos x-2=0.$
$\cos x=\frac{-1+\sqrt{17}}{4};$

oder $\sin 2x+\sin 3x-\sin x=2\sin x$
$2\sin x\cos x+2\sin x\cos 2x=2\sin x$
$\sin x=0$ und $\cos x+\cos 2x=1$ oder
$2\cos^2 x+\cos x-2=0.$

Digitized by Google

17) Logarithmiert man beide Gleichungen und dividiert dann die erste durch die zweite, so erhält man

$$\operatorname{tg} x \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = {}^3/_2 \text{ oder } \operatorname{tg} x \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} = {}^3/_2$$

$$\operatorname{tg} x_1 = 3,\ \operatorname{tg} x_2 = -{}^1/_2$$

$$y_1 = 4,\ y_2 = \frac{1}{4096}.$$

18) Setzt man $\frac{\operatorname{tang} 2x}{\operatorname{tang} x} = \xi$, so $\xi^2 - 2\xi = 1$. $\xi = 1 \pm \sqrt{2}$.

Da $\frac{\operatorname{tang} 2x}{\operatorname{tang} x} = \frac{2}{1 - \operatorname{tang}^2 x}$ ist, so ist $\operatorname{tang}^2 x = 1 - \frac{2}{1 \pm \sqrt{2}}$,

$$\operatorname{tang}^2 x_1 = 1 - \frac{2}{1 + \sqrt{2}} = (\sqrt{2} - 1)^2,\ \operatorname{tang} x_1 = \sqrt{2} - 1,$$

$$x_1 = 22^\circ\, 30'\, 0{\cdot}15'' \quad (22^\circ\, 30').$$

$$\operatorname{tang}^2 x_2 = 1 - \frac{2}{1 - \sqrt{2}} = (\sqrt{2} + 1)^2,\ \operatorname{tang} x_2 = \sqrt{2} + 1,$$

$$x_2 = 67^\circ\, 29'\, 59{\cdot}85'' \quad (67^\circ\, 30').$$

18a) $\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x = \frac{5}{2 \operatorname{tg} x}$,

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 40}}{4},\ \operatorname{tg}^2 x_1 = 5,\ \operatorname{tg}^2 x_2 = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} x_1 = \pm \sqrt{5},\ \operatorname{tg} x_2 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

19) $\sqrt[3]{\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}} = y;\ y + \frac{12}{y} = 7,\ y_1 = 3,\ y_2 = 4.$

$$\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 27,\ \operatorname{tg} x_1 = \frac{13}{14};\ \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 64,\ \operatorname{tg} x_2 = \frac{63}{65}.$$

20) $\sqrt[3]{\frac{1 + \operatorname{tang} x}{1 - \operatorname{tang} x}} + 6 \sqrt[3]{\frac{1 - \operatorname{tang} x}{1 + \operatorname{tang} x}} = 5,\ \xi + \frac{6}{\xi} = 5,\ \xi_1 = 3,\ \xi_2 = 2.$

$$\frac{1 + \operatorname{tang} x}{1 - \operatorname{tang} x} = 27,\ \operatorname{tang} x_1 = {}^{13}/_{14},\ x_1 = 42^\circ\, 52'\, 44'' \quad (42^\circ\, 52'\, 43'').$$

$$\frac{1 + \operatorname{tang} x}{1 - \operatorname{tang} x} = 8,\ \operatorname{tang} x_2 = {}^7/_9,\ x_2 = 37^\circ\, 52'\, 30'' \quad (37^\circ\, 52'\, 30'').$$

$$X = n.180^\circ + x.$$

21) Ersetzt man zunächst $3x$ durch $2x + x$, so erhält man

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} = 0 = (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x)\left[1 + \frac{1}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x}\right]$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x + \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} x \left(1 + \frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 x}\right) = 0$$

daraus $\operatorname{tg} x_1 = 0$, $\operatorname{tg} x_2 = \pm \sqrt{3}$ und $1 + \frac{1}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} = 0$

gibt $\operatorname{tg} x = \pm \sqrt{{}^1/_2}$.

Digitized by Google

22) Da $\operatorname{tg} 3x = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}$ und $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$, so geht die gegebene Gleichung über in $\frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{\operatorname{tg} x - 3 \operatorname{tg}^3 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ und diese gibt $\operatorname{tg} x_1 = 0$, $\frac{3 - \operatorname{tg}^2 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ oder $4 \operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$, daher $\operatorname{tg} x_2 = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{17}}{8}}$.

23) Man verbinde die beiden Gleichungen einmal additiv und einmal subtraktiv.

$X = n.180^0 \pm 45^0$, $Y = n.180^0$.

24) $5^{\sin x} = \xi$, $3^{\sin y} = \eta$; $\xi + \eta = 4$, $3\xi - 2\eta = 5$.

$x = 36^0\,25'\,10{\cdot}25''$ $(36^0\,25'\,10'')$; $y = 17^0\,50'\,4{\cdot}52''$ $(17^0\,50'\,6'')$.

$X = n.180^0 \pm x$, $Y = n.180^0 \pm y$.

25a) Aus $\frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x} = \frac{1}{\cos \alpha}$ folgt $\frac{\sin y \cos x}{\cos y \sin x} = \frac{1}{\cos \alpha}$, somit

$\sin y \cos x : \cos y \sin x = 1 : \cos \alpha$ und daraus

$\sin (y + x) : \sin (y - x) = (1 + \cos \alpha) : (1 - \cos \alpha)$

$\sin (y - x) = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} \sin (y + x) = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \sin (y + x)$.

Für die speziellen Werte ergibt sich:

$x_1 = 32^0\,48'\,45{\cdot}5''$ $\qquad x_2 = -50^0\,48'\,45{\cdot}5''$

$y_1 = 39^0\,11'\,14{\cdot}5''$ $\qquad y_2 = 122^0\,48'\,45{\cdot}5''$.

25b) $\operatorname{tang} x = \xi$, $\operatorname{tang} y = \eta$.

$9\xi + \eta = 4$, $\frac{2}{\xi} + \frac{4}{\eta} = 1$; $9\xi^2 - 18\xi = -8$, $\xi_1 = {}^4/_3$, $\xi_2 = {}^2/_3$.

$\eta_1 = -8$, $\eta_2 = -2$.

$\operatorname{tang} x = {}^4/_3$, $x_1 = 53^0\,7'\,48{\cdot}36''$ $(53^0\,7'\,48'')$.

$\operatorname{tang} x = {}^2/_3$, $x_2 = 33^0\,41'\,24{\cdot}23''$ $(33^0\,41'\,24'')$.

$\operatorname{tang} y = -8$, $y_1 = -82^0\,52'\,30''$ $(-82^0\,52'\,30'')$.

$\operatorname{tang} y = -2$, $y_2 = -63^0\,26'\,5{\cdot}82''$ $(-63^0\,26'\,6'')$.

$X = n.180^0 + x$, $Y = n.180^0 + y$.

26) $\alpha + \beta = 87^0\,34'\,17''$, $\operatorname{tang} \alpha : \operatorname{tang} \beta = 5 : 4$.

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{5}}{1 - \frac{4 \operatorname{tg}^2 \alpha}{5}} = \frac{9 \operatorname{tg} \alpha}{5 - 4 \operatorname{tg}^2 \alpha} =$$

$\operatorname{tg} 87^0\,34'\,17'' = \mu$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 80\mu^2}}{8\mu}.$$

Digitized by Google

Oder $\operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta = 5:4$, $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) : (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) = 9:4$
$\sin(\alpha+\beta) : \sin(\alpha-\beta) = 9:1$
$\sin(\alpha-\beta) = {}^1/_9 \sin(\alpha+\beta)$, $\alpha - \beta = 6^0\,22'\,25''$.
$\alpha = 46^0\,58'\,21''$ $(46^0\,58'\,23'')$, $\beta = 40^0\,35'\,56''$ $(40^0\,35'\,54'')$.

27) $\alpha + \beta = 129^0\,40'\,41{\cdot}3''$, $\sin\alpha : \sin\beta = 3:2$.

Am einfachsten gestaltet sich die Rechnung, wenn man zuerst $(\sin\alpha + \sin\beta) : (\sin\alpha - \sin\beta) = 5:1$ entwickelt, man erhält:
$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = 5:1$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = {}^1/_5 \operatorname{tg} 64^0\,50'\,20{\cdot}65''$.
$\frac{\alpha-\beta}{2} = 23^0\,3'\,47''$.
$\alpha = 87^0\,54'\,7{\cdot}8''$ $(87^0\,54'\,7{\cdot}6''$, $\beta = 41^0\,46'\,33{\cdot}5''$ $(41^0\,46'\,33{\cdot}7'')$.

28) Da $\sin\left(45+\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)$ und $1+\sin\alpha = 2\sin^2\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$ ist, so geht die gegebene Gleichung über in

$$0{\cdot}48 \times 0{\cdot}3^{\sin^2\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)} - 0{\cdot}2 \times 0{\cdot}3^{2\sin^2\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)} = 0{\cdot}16.$$

Setzt man nun $0{\cdot}3^{\sin^2\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)} = y$, so

$$0{\cdot}48\,y - 0{\cdot}2\,y^2 = 0{\cdot}16,\ y_1 = 2,\ y_2 = 0{\cdot}4.$$

Daraus ergibt sich:

$$\sin\left(45+\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{\log 2}{\log 0{\cdot}3}} \text{ und } \sin\left(45+\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{\log 0{\cdot}4}{\log 0{\cdot}3}}.$$

Der erstere Wert ist nicht zu brauchen, da er für $\sin\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)$ einen imaginären Wert ergibt $\sqrt{-0{\cdot}575717}$; aus dem zweiten Wert folgt $\sqrt{0{\cdot}761056}$, somit $45 + \frac{\alpha}{2} = 60^0\,44'\,13{\cdot}23''$ und

$$\alpha = 31^0\,28'\,26{\cdot}46'' \quad (31^0\,28'\,26'').$$

29) $x^2 + y^2 - 2xy\cos\varphi = 144 \ldots (\alpha$
$xy\sin\varphi = 36 \ldots (\beta$
$x + y = 28 \ldots (\gamma$

$\gamma^2 - \alpha$ gibt $2xy(1+\cos\varphi) = 640$ und $xy(1+\cos\varphi) = 320$.

$$\frac{xy\sin\varphi}{xy(1+\cos\varphi)} = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = {}^{36}/_{320} = {}^{9}/_{80} = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2};$$

$\varphi = 12^0\,50'\,15{\cdot}3''$ $(12^0\,50'\,15'')$.

Aus β folgt nun $xy = \frac{36}{\sin\varphi} = \frac{36}{0{\cdot}222188} = 162{\cdot}025$ und aus γ $y = 28 - x$, somit

$$x^2 - 28x + 162{\cdot}025 = 0.$$

Diese Gleichung findet man auch, wenn man aus der ersten Gleichung $\cos\varphi$, aus der zweiten $\sin\varphi$ bestimmt und dann in $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ den Wert $y = 28 - x$ einsetzt.

Digitized by Google

$x_1 = 19 \cdot 8288 = y_2$, $x_2 = 8 \cdot 1712 = y_1$.

Oder aus $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{9}{80}$ folgt wegen $\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$ $\cos \varphi = \frac{6319}{6481}$, womit die erste Gleichung übergeht in $x^2 + y^2 - \frac{12638}{6481} xy = 144$. Die dritte Gleichung gibt auch $x^2 + y^2 + 2xy = 784$.

Aus diesen beiden Gleichungen folgt $xy = \frac{6481}{40}$, somit

$$x^2 + y^2 + 2xy - 4xy = 784 - \frac{6481}{10} = 135 \cdot 9 = (x - y)^2.$$

$x - y = \pm 11 \cdot 6576$
$x + y = \quad 28.$
$x_1 = 19 \cdot 8288 = y_2, \quad x_2 = 8 \cdot 1712 = y_1.$

§ 19. Rechtwinkliges Dreieck.

1) $u, \alpha;\ a : b : c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma.$

$u : a = (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) : \sin \alpha =$
$4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} : 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$

Da $\gamma = 90^0$ und $\beta = 90^0 - \alpha^0$, so

$u : a = \sqrt{2} \cos \frac{\beta}{2} : \sin \frac{\alpha}{2}$ und wegen $\cos \frac{\beta}{2} = \cos \frac{90 - \alpha}{2} =$

$\cos \left(45 - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin \left(45 - \frac{\alpha}{2}\right)$, ist $a = \frac{u \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2} \cdot \sin \left(45 + \frac{\alpha}{2}\right)}$.

$a = 2 \cdot 876598\ m, \quad b = 4 \cdot 108208\ m, \quad c = 5 \cdot 015195\ m,$
$f = 5 \cdot 908833\ m^2.$
$(a = 2 \cdot 8766\ m, \quad b = 4 \cdot 1081\ m, \quad c = 5 \cdot 0153\ m, \quad f = 5 \cdot 9094\ m^2).$

2) $f, \alpha;\ ab = 2f, \quad a = b \operatorname{tang} \alpha, \quad b^2 \operatorname{tang} \alpha = 2f, \quad b = \sqrt{\frac{2f}{\operatorname{tang} \alpha}}.$

$a = \sqrt{2f \operatorname{tang} \alpha}$

$c = \sqrt{\frac{4f}{\sin 2\alpha}}.$

1) $a = 12 \cdot 08436\ m, \quad b = 22 \cdot 83944\ m, \quad c = 25 \cdot 83935\ m,$
$(a = 12 \cdot 084\ m, \quad b = 22 \cdot 839\ m, \quad c = 25 \cdot 839\ m)$
2) $a = 7 \cdot 180866\ m, \quad b = 7 \cdot 798502\ m, \quad c = 10 \cdot 601014\ m,$
$(a = 7 \cdot 181\ m, \quad b = 7 \cdot 7985\ m, \quad c = 10 \cdot 601\ m).$

Digitized by Google

3) $a + b = s$ und $a^2 + b^2 = c^2$, man kann nun zuerst daraus die Seiten berechnen: $a = {}^1/_2 \{s \pm \sqrt{2c^2 - s^2}\}$; $b = s - a$; $a = c \sin \alpha$. $\alpha = \text{arc sin} \left\{\frac{1}{2c} [s \pm \sqrt{2c^2 - s^2}]\right\}$; $\beta = 90 - \alpha$; oder $a = c \sin \alpha$, $b = c \cos \alpha = c \sin (90 - \alpha)$, somit $a + b = s = c [\sin \alpha + \sin (90 - \alpha)] = 2c \sin 45^0 \cos (\alpha - 45^0)$

$$\cos (\alpha - 45^0) = \frac{s\sqrt{2}}{2c}.$$

4) $a_1 = 3$, $b_1 = 4$; $a_2 = 4$, $b_2 = 3$;
$\alpha_1 = 36^0\,52'\,11{\cdot}64'' = \beta_2$;
$\beta_1 = 53^0\,7'\,48{\cdot}36'' = \alpha_2$; $(36^0\,52'\,10'',\ 53^0\,7'\,50'')$.

5) Ist $a - b = d$, so gibt $a - b = d$ und $a^2 + b^2 = c^2$

$$a = {}^1/_2 \{\sqrt{2c^2 - d^2} + d\},\quad b = {}^1/_2 \{\sqrt{2c^2 - d^2} - d\}$$

oder $d = c (\sin \alpha - \cos \alpha) = c [\sin \alpha - \sin (90 - \alpha)] = 2c \sin (\alpha - 45^0) \cos 45^0 = c\sqrt{2} . \sin (\alpha - 45^0)$,

$$\sin (\alpha - 45^0) = \frac{d\sqrt{2}}{2c}.$$

6) $a = 6{\cdot}56776\ m$, $b = 4{\cdot}56776\ m$, $f = 15\ m^2$, $\alpha = 55^0\,10'\,55''$.

7) $a, b + c$; $(b + c) : a = (\sin \beta + \sin \gamma) : \sin \alpha = (1 + \sin \beta) : \sin \alpha = (1 + \cos \alpha) : \sin \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} : 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$,

somit $(b + c) : a = \text{cotg} \frac{\alpha}{2}$ und $\text{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{b + c}$.

Oder $a^2 + b^2 = c^2$, $15^2 + (25 - c)^2 = c^2$, daraus $c = 17$.
$\alpha = 61^0\,55'\,39{\cdot}1''$, $\beta = 90 - \alpha$; $(61^0\,55'\,40'')$.
$a = 15\ m$, $b = 8\ m$, $c = 17\ m$, $f = 60\ m^2$.

8) $a, c - b$; $a^2 + b^2 = c^2 = (b + d)^2$, daraus $b = \frac{a^2 - d^2}{2d}$,

$c = b + d = \frac{a^2 + d^2}{2d}$, $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{2ad}{a^2 + d^2}$ und

$\alpha = \text{arc sin} \left(\frac{a}{c}\right)$.

Oder $(c - b) : a = (1 - \sin \beta) : \sin \alpha = (1 - \cos \alpha) : \sin \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} : 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$, daher $\text{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{c - b}{a}$.

1) $b = 4936\ m$, $c = 6170\ m$, $f = 9136536\ m^2$,
$\alpha = 36^0\,52'\,11{\cdot}64''$, $\beta = 90^0 - \alpha$; $(36^0\,52'\,10'')$.

2) $b = 15\ m$, $c = 17\ m$, $f = 60\ m^2$.
$\alpha = 28^0\,4'\,20{\cdot}9''$, $\beta = 90 - \alpha$; $(28^0\,4'\,20'')$.

Bezüglich der Konstruktion siehe § 15 Nr. 2.

Digitized by Google

9) $a + b - c$, β; $c(\sin\beta + \cos\beta - 1) = 5$.

$$c = \frac{5}{\sin\beta + \cos\beta - 1} \text{ oder allgemein:}$$

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma}{\sin\gamma},$$

$$\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} =$$

$$2\cos\frac{\gamma}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right],$$

da $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90 - \frac{\gamma}{2}$ ist, so ist $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}$ und $\sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$.

und da $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$, so ist

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Beim rechtwinkligen Dreieck ist aber $\gamma = 90^0$,

somit $\sin\frac{\gamma}{2} = {}^1/_2\sqrt{2}$, daher

$$\frac{a+b-c}{c} = 2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}, \quad c = \frac{2}{2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}.$$

$a = 7{\cdot}3414\ m$, $b = 10{\cdot}3386\ m$, $c = 12{\cdot}6800\ m$
(7·3414, 10·339, 11·680).
$f = 37{\cdot}9499\ m^2$ (37·95).

10) u, f; $a + b + c = 24$, $ab = 48$, $a^2 + b^2 = c^2$.
$a^2 + b^2 = [24 - (a + b)]^2$, daraus $a + b = 14$, somit $c = 10$.
Aus $a + b = 14$ und $ab = 48$ folgt $a_1 = 6 = b_2$, $a_2 = 8 = b_1$.
$\alpha_1 = 36^0 52' 11{\cdot}64''$, $\beta_1 = 90^0 - \alpha_1$; $(36^0 52' 10'')$; $\alpha_2 = \beta_1$, $\beta_2 = \alpha_1$.

11) $a + b + c = 40$, $a + b - c = 6$, $a^2 + b^2 = c^2$.
Die beiden ersten Gleichungen geben $c = 17$ und $a + b = 23$.
$a_1 = 15 = b_2$, $a_2 = 8 = b_1$, $c = 17$, $f = 60\ m^2$.
$\alpha_1 = 61^0 55' 39{\cdot}1'' = \beta_2$, $\alpha_2 = 90 - \alpha_1 = \beta_1$ $(61^0 55' 40'')$.

12) $b = \sqrt{ac}$, $b = c\cos\alpha$, $a = c\sin\alpha$, daher $c^2\cos^2\alpha = c^2\sin\alpha$
oder $\sin^2\alpha + \sin\alpha = 1$. $\sin\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$;
da der Sinus kleiner als 1 ist, so kann $\sin\alpha$ nur 0·618034 sein.
$\alpha = 38^0 10' 21{\cdot}75''$, $\beta = 90 - \alpha$; $(38^0 10' 23'')$.
$a = 1{\cdot}27202$, $b = 1{\cdot}618034$, $c = 2{\cdot}058171$, $f = 1{\cdot}029086$.
$(a = 1{\cdot}272$, $b = 1{\cdot}618$, $c = 2{\cdot}058$, $f = 1{\cdot}02905)$.

Digitized by Google

Oder $a : b = b : c$, $a^2 + b^2 = c^2$.

Da h die Höhe auf die Hypotenuse ist, so ist auch $ch = ab$.

Aus diesen drei Gleichungen folgt

$$b = \frac{h}{2}(1 + \sqrt{5}),\quad a = \frac{h}{2}\sqrt{2(1 + \sqrt{5})},\quad c = h\sqrt{2 + \sqrt{5}}.$$

13) $b^2 = (m + n)\,m$, $a^2 = (m + n)\,n$, somit

$$a = \sqrt{n^2 + mn},\quad b = \sqrt{m^2 + mn},\quad f = {}^1/_2\,(m + n)\sqrt{mn}.$$

1) $a = 13{\cdot}416408\ cm$, $b = 6{\cdot}708204\ cm$, $f = 45\ cm^2$.
$\alpha = 63^0\,26'\,5{\cdot}82''$, $\beta = 26^0\,33'\,54{\cdot}18''$ $(63^0\,26'\,10'')$.

2) $a = 4{\cdot}695743\ m$, $b = 4{\cdot}2\ m$, $f = 9{\cdot}86106\ m^2$.
$\alpha = 48^0\,11'\,22{\cdot}9''$, $\beta = 41^0\,48'\,37{\cdot}1''$ $(48^0\,11'\,23'')$.

14) Ist die Höhe auf die Hypotenuse h, so ist $m = h \operatorname{tang} \beta$ und $h = a \sin \beta$, daher $m = \frac{a \sin^2 \beta}{\cos \beta}$; $\frac{m}{a} \cos \beta = 1 - \cos^2 \beta$.

$$\cos^2 \beta + \frac{m}{a} \cos \beta = 1,\quad \cos \beta = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 + 4a^2}}{2a}.$$

$\beta = 41^0\,55'\,26{\cdot}78''$ $(41^0\,55'\,26'')$.

$b = 22{\cdot}45021\ m$, $c = 33{\cdot}60077\ m$, $f = 280{\cdot}62763\ m^2$.

$(b = 22{\cdot}45\ m$, $c = 33{\cdot}6\ m$, $f = 280{\cdot}625\ m^2)$.

Oder $a^2 = c\,(c - m)$, daraus $c = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4a^2}}{2}$

und $b^2 = cm$, daher $b = {}^1/_2\sqrt{2m\,(m + \sqrt{m^2 + 4a^2})}$.

15) Da die Hypotenuse im Verhältnis von $m : n$ zerlegt wird, so ist der eine Teil $\frac{mc}{m+n}$, der andere $\frac{nc}{m+n}$ und $p^2 = \frac{mnc^2}{(m+n)^2}$, daher $c = \frac{p(m+n)}{\sqrt{mn}}$, $a = c\sqrt{\frac{m}{m+n}}$, $b = c\sqrt{\frac{n}{m+n}}$.

$a = 15{\cdot}75\ m$, $b = 21\ m$, $c = 26{\cdot}25\ m$, $f = 165{\cdot}375\ m^2$.

$\alpha = 36^0\,52'\,12''$.

16) $m : p = p : (c - m)$.

$m = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4p^2}}{2}$, $a_1 = 4{\cdot}94358 = b_2$, $b_1 = 11{\cdot}80682 = a_2$,

$m_1 = 10{\cdot}8907 = n_2$, $n_1 = 1{\cdot}9093 = m_2$, $f = 29{\cdot}184\ m^2$.

$\alpha_1 = 22^0\,43'\,9{\cdot}63'' = \beta_2$, $\beta_1 = 67^0\,16'\,50{\cdot}37'' = \alpha_2$.

$(4{\cdot}9435,\ 11{\cdot}807;\ 10{\cdot}891;\ 1{\cdot}909,\ 22^0\,43'\,9'')$.

17) b_1 sei das dem rechten, b_2 das dem spitzen Winkel anliegende Stück und $\beta = {}^1/_2 \sphericalangle B$.

$b_1 = a \operatorname{tang} \beta$, $(b_1 + b_2) = a \operatorname{tang} 2\beta$.

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{2b_1 a}{a^2 - b_1^2} = \frac{b_1 + b_2}{a},\ \text{somit}\ a = b_1\sqrt{\frac{b_2 + b_1}{b_2 - b_1}}.$$

Digitized by Google

$c^2 = a^2 + b^2$, daher $c = \sqrt{b_1^2 \frac{b_2 + b_1}{b_2 - b_1} + (b_2 + b_1)^2} =$

$$b_2 \sqrt{\frac{b_2 + b_1}{b_2 - b_1}}.$$

$f = \frac{b_1 (b_2 + b_1)}{2} \sqrt{\frac{b_2 + b_1}{b_2 - b_1}}$, $B = 2 \operatorname{Arctg} \sqrt{\frac{b_2 - b_1}{b_2 + b_1}}$.

Oder bezeichnet man die Winkelhalbierende mit t, so ist $b_1 = t \sin \beta$ und $t : b_2 = \sin (90 - 2\beta) : \sin \beta$, daher $t \sin \beta = b_2 \sin (90 - 2\beta)$ $= b_2 \cos 2\beta = b_1$ und $\cos 2\beta = \frac{b_1}{b_2}$.

Die Konstruktion ist dieselbe wie § 15, Aufgabe 3.

18) $a = t_1 \cos \beta_1$, $a = c \cos 2\beta_1$, $t_1 \cos \beta_1 = c \cos 2\beta_1 = c (2 \cos^2 \beta_1 - 1)$.

$2c \cos^2 \beta_1 - t_1 \cos \beta_1 = c$, $\cos \beta_1 = \frac{t_1 \pm \sqrt{t_1^2 + 8c^2}}{4c}$, da aber $\beta_1 < 90^0$, also $\cos \beta_1$ positiv sein muß, so

$\beta_1 = \text{arc.cos} \frac{t_1 + \sqrt{t_1^2 + 8c^2}}{4c}$; $a = \frac{t_1^2 + t_1 \sqrt{t_1^2 + 8c^2}}{4c}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

19) Sind die dem rechten Winkel anliegenden Stücke der Katheten x und y, so ist $x^2 + 4y^2 = T_1^2$, $y^2 + 4x^2 = T_2^2$, daraus folgt

$x = \sqrt{\frac{4T_2^2 - T_1^2}{15}} = 12 = \frac{b}{2}$, somit $b = 24\ m$, $a = 7\ m$,

$c = 25\ m$, $f = 84\ m^2$,

$\alpha = 16^0\ 15'\ 36{\cdot}73''$, $\beta = 90^0 - \alpha$, $(16^0\ 15'\ 37'')$.

20) Bezeichnet man das Stück von b, welches der Hypotenuse anliegt, mit b_1 und das andere mit b_2, so ist $b_1 + b_2 = a \operatorname{tang} \beta$, $b_2 = a \operatorname{tang} \beta_1$, daher

$b_1 = a (\operatorname{tang} \beta - \operatorname{tang} \beta_1) = a \frac{\sin (\beta - \beta_1)}{\cos \beta \cos \beta_1} = 687{\cdot}741\ m$ $(687{\cdot}74 m)$.

21) $a + b + c = s$. $a^2 + b^2 + c^2 = S$, $a^2 + b^2 = c^2$.

$c = \sqrt{\frac{S}{2}}$, setzt man diesen Wert in die zwei ersten Gleichungen ein, so $a_{1,2} = \frac{1}{2} \left[s - \sqrt{\frac{S}{2}} \pm \sqrt{\frac{S}{2} - s^2 + s\sqrt{2S}} \right] = b_{2,1}$.

$a_1 = 44 = b_2$, $a_2 = 33 = b_1$, $c = 55$, $f = 726\ m^2$,

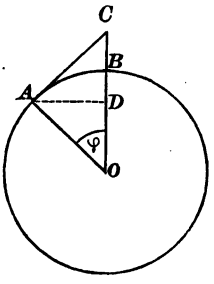
$\alpha_1 = 53^0\ 7'\ 48{\cdot}36'' = \beta_2$, $\alpha_2 = 90^0 - \alpha_1 = \beta_1$, $(53^0\ 7'\ 50'')$.

22) $a + b = 14$, $a^2 + \frac{b^2}{4} = 52$, $b = \frac{56 \pm 16}{5}$, es kann nur das negative Zeichen gelten, da sonst a negativ wäre; $b = 8\ m$, $a = 6\ m$, $c = 10\ m$, $f = 24\ m^2$, $\beta = 53^0\ 7'\ 48{\cdot}36''$ $(53^0\ 7'\ 50'')$.

Digitized by Google

23) Befindet sich der Schiffer in A, als er die Spitze des Berges erblickt, so ist der Weg bis zur Insel 225000 m (2 T. $14^1/_2$ St. = 225000″), und da $2\varrho\pi = 4371{\cdot}7\ m$, so $\varrho = 695{\cdot}77\ m$, daher ist $AB = 225000 + 695{\cdot}77 = 225695{\cdot}77\ m$ oder kurz 225696 m. Wie groß ist nun der diesem Bogen entsprechende Zentriwinkel? Aus $225696 : 6360.1000.2\pi = \varphi : 360$ folgt $\varphi = \frac{677088}{106000\pi} = 2^0\,1'\,59{\cdot}7''$ $(2^0\,1'\,59{\cdot}5'')$.

Fig. 10.



Nun ist $AO = OC\cos\varphi = (OB + BC)\cos\varphi$, da $OB = OA$, so

$$BC = \frac{AO(1-\cos\varphi)}{\cos\varphi} = \frac{2AO\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi} = 4006{\cdot}7\ m\ (4006{\cdot}5\ m).$$

24) $AO = OC\cos\varphi = (r+a)\cos\varphi$, daher $\varphi = \text{arc cos}\,\frac{r}{r+a} = 1^0\,48'\,20''$, wo $AO = r$ und $BC = a$ ist; $AC = r\,\text{tang}\,\varphi$.

$OD = r\cos\varphi$, $BD = r(1-\cos\varphi) = 2r\sin^2\frac{\varphi}{2}$, somit

$$F = 2r\pi.BD = 4r^2\pi\sin^2\tfrac{\varphi}{2}.$$

$AC = 200{\cdot}49$ Kilometer, $F = 126184\ km^2$.

Oder $AC^2 = a(2r+a)$, $AC = \sqrt{a(2r+a)}$

$AD^2 = OD.DC = (r-h)(h+a)$,

$AD^2 = AC^2 - CD^2 = a(2r+a) - (a+h)^2$, daher

$a(2r+a) - (a+h)^2 = (r-h)(a+h)$, daraus $h = \frac{ar}{a+r}$

und $f = 2r\pi h = \frac{2r^2a\pi}{a+r}$.

25) Der Berührungspunkt teilt die Kathete a in die Stücke p und q, nun ist $p = \varrho$, $q = \varrho\,\text{cotg}\,\frac{\beta}{2}$, daher $a = \varrho + \varrho\,\text{cotg}\,\frac{\beta}{2}$,

$\frac{a-\varrho}{\varrho} = \text{cotg}\,\frac{\beta}{2}$, $\text{tang}\,\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{a-\varrho}$;

$b = 405{\cdot}2736\ m$ $(405{\cdot}27\ m)$, $c = 566{\cdot}9735\ m$ $(566{\cdot}97\ m)$.

$f = 80345\ m^2$ $(80345\ m^2)$; $\beta = 45^0\,37'\,37''$.

26) Segment $= \frac{r^2\pi\alpha}{360} - \frac{r^2\sin\alpha}{2} = 5{\cdot}06906\ m^2$ $(5{\cdot}07\ m^2)$.

Digitized by Google

27) Segment $= \frac{r^2\pi\alpha}{360} - \frac{a\,h}{2}$, wo a die zum Zentriwinkel gehörige Sehne und h deren Abstand vom Zentrum ist; $h = r\cos\frac{\alpha}{2}$, $a = 2\,h\,\text{tang}\,\frac{\alpha}{2}$. Daher

$$\text{Segment} = \frac{h^2\pi\alpha}{360\cos^2\frac{\alpha}{2}} - h^2\,\text{tang}\,\frac{\alpha}{2} = 401{\cdot}227\,m^2\ (401{\cdot}29\,m^2).$$

28) Aus $\frac{r^2\pi\alpha}{360} - \frac{r^2\sin\alpha}{2} = 5{\cdot}07\,m^2$ folgt $r = 12{\cdot}5\,m$.

29) Aus $d = r\cos\alpha$ folgt $r = \frac{d}{\cos\alpha}$, daher

$$f : \frac{d^2}{\cos^2\alpha}.\pi = 2\alpha : 360,\quad f = \frac{d^2\pi.2\alpha}{\cos^2\alpha\,360};$$

sind die Katheten a und b, so $f = \frac{ab}{2} = \frac{b^2\,\text{tang}\,\alpha}{2}$, daher

$$\frac{b^2\,\text{tang}\,\alpha}{2} = \frac{2\alpha\pi\,d^2}{360\,\cos^2\alpha},\quad b = \sqrt{\frac{\alpha\pi\,d^2}{45\,\sin 2\alpha}} = 76{\cdot}3672\ (76{\cdot}367).$$

30) $\left(2r - \frac{s}{30}\right) : \frac{s}{2} = \frac{s}{2} : \frac{s}{30}$, daraus $r = \frac{113\,s}{30} = 13166{\cdot}986\,m$.
$\frac{s}{2} = r\sin\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2} = {}^{15}/_{113}$, $\alpha = 15^0\,15'\,22{\cdot}68''$ $(15^0\,15'\,23'')$.
$f = 23081780\,m^2$ $(23082000\,m^2)$.

31) Die Zentrilinien sind $1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$, $2 + 3 = 5$, somit bilden sie ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Flächeninhalte 6, daher

$$6 - \left[\frac{\pi 90}{360} + \frac{4\pi\beta}{360} + \frac{9\pi\alpha}{360}\right] = 6 - \frac{\pi}{360}\,(90 + 4\beta + 9\alpha) =$$
$$0{\cdot}46427\,m^2\ (0{\cdot}4643\,m^2).$$

32) Der Parallelkreis hat $360.100 = 36000$ Kilometer $= 2r\pi$; ist α die geogr. Breite, so $r = R\sin(90 - \alpha) = R\cos\alpha = \frac{36000}{2\pi}$.
Daraus $\alpha = 25^0\,43'\,40''$.

33) Da $R : r = U : u$ und $r = R\cos\alpha$, so $u = U\cos\alpha$.
Nimmt man die geographische Meile zu 7420 m an, so

$$u = 5400.7420.\cos\alpha$$

$24.60.60 = 86400$, sonach $\frac{u}{86400} = \frac{5400.7420}{86400}\cos\alpha =$

$$\frac{1855}{4}\cos\alpha = 309{\cdot}9683\,m\ (309{\cdot}97\,m).$$

Digitized by Google

34) $2r\pi - 2\varrho\pi = 2\pi\,(r-\varrho) = 0{\cdot}10374\,\pi$, $r - \varrho = 0{\cdot}05187$, sind φ und $(\varphi+4)$ die geographischen Breiten, so $r = R\cos\varphi$, $\varrho = R\cos(\varphi+4)$, $r-\varrho = R\,[\cos\varphi - \cos(\varphi+4)] = 2R\sin(\varphi+2)\sin 2$; da $R=1$, so

$$\sin(\varphi+2) = \frac{r-\varrho}{2\sin 2},\quad \varphi = 40^0\,59'\,56{\cdot}5'';\ \varphi+4 = 49^0\,59'\,56{\cdot}5''$$
$$(\varphi = 46^0,\ \varphi+4 = 50^0).$$

§ 20. Schiefwinkliges Dreieck.

Seiten und Winkel.

1) Entweder $(b+a):(b-a) = \operatorname{tg}\frac{\beta+\alpha}{2} : \operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2}$

$17:7 = \operatorname{tg} 2\alpha : \operatorname{tg}\alpha$, daraus $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{{}^3/_{17}}$;

$\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{{}^3/_{17}}$ ist unbrauchbar, da sich für α und β stumpfe Winkel ergeben würden.

Oder $a:b = \sin\alpha : \sin\beta = \sin\alpha : \sin 3\alpha$.

$5:12 = \sin\alpha : (\sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha)$

$5:12 = 1 : (2\cos^2\alpha + \cos 2\alpha) = 1 : (4\cos^2\alpha - 1)$.

$\cos\alpha = \sqrt{{}^{17}/_{20}}$.

$\alpha = 22^0\,47'\,11''$

$\beta = 68^0\,21'\,33''$

$\gamma = 88^0\,51'\,16''$.

2) Aus $a:b = \sin 2\beta : \sin\beta$ oder $8:5 = \sin 2\beta : \sin\beta$

folgt $\cos\beta = {}^4/_5$, $\beta = 36^0\,52'\,10''$,

daher $c:b = \sin 3\beta : \sin\beta$, denn $\gamma = 180^0 - (\beta+2\beta)$

nun ist $\sin 3\beta = \sin 2\beta\cos\beta + \cos 2\beta\sin\beta =$

$$\sin\beta\,(4\cos^2\beta - 1)$$

$c:b = (4\cos^2\beta - 1):1$; $c:5 = {}^{39}/_{25}:1$, $c = 7{\cdot}8$

Oder $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180-3\beta) = a^2 + b^2 + 2ab\cos 3\beta$.

$\cos 3\beta = \cos 2\beta\cos\beta - \sin 2\beta\sin\beta =$

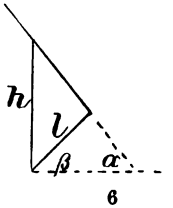
$$\cos\beta\,(2\cos^2\beta - 1) - 2\sin^2\beta\cos\beta = \cos\beta\,(4\cos^2\beta - 3)$$

$$\cos 3\beta = -{}^{44}/_{125} \text{ und } c^2 = 64 + 25 - \frac{16.44}{25} = 60{\cdot}84$$

$$c = 7{\cdot}8.$$

3) Die Höhe des Hauses, die Schattenlänge und der Sonnenstrahl, welcher gerade an der Spitze des Hauses vorübergeht und auf die Berglehne fällt, bilden ein Dreieck, von dem eine Seite — die Schattenlänge — und zwei Winkel $90^0 - 25^0$, $90^0 - 55^0\,5'\,58''$ bekannt sind.

Fig. 11.



$$h = 12{\cdot}0523\,m\ (12{\cdot}052\,m).$$

Digitized by Google

4) Ist ein Schenkel des gegebenen Dreieckes x, so ist $\frac{b}{2} = x \cos \alpha$, $x = \frac{b}{2 \cos \alpha}$ und $\frac{b}{2} + x =$ der halben neuen Basis; ist s der neue Schenkel, so

$$\frac{b}{2} + x = s . \cos \frac{\alpha}{2},\ s = \frac{b + 2x}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{b \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha},$$ die neue Basis ist

$$b + 2x = \frac{2b \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha};\quad f = \frac{b^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha}{2 \cos \alpha}.$$

α) $31 \cdot 0468\,cm$, $15 \cdot 6009\,cm$, $15 \cdot 6009\,cm$, ($31 \cdot 047$, $15 \cdot 601$, $15 \cdot 601$) $f = 24 \cdot 1092$ ($24 \cdot 109$) cm^2.

β) $1058 \cdot 9534$, $717 \cdot 0057$, $717 \cdot 0057$ ($1058 \cdot 9$, 717, 717) cm, $f = 255990 \cdot 65$ (255980) cm^2.

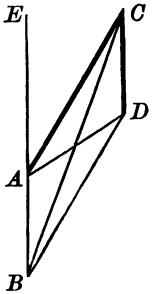
5) Der direkte Lichtstrahl AC bildet mit dem vom Wasser in das Auge des Beobachters reflektierten Strahl $AB + BC$ ein Dreieck; die Höhe des Beobachtungsortes bildet mit dem reflektierten Strahl BC und dessen Projektion auf dem Wasserspiegel ein rechtwinkliges Dreieck, das aus der Höhe und dem spitzen Winkel ($90^0 - 51^0\,19'\,13''$) die Länge des reflektierten Strahles BC und den Winkel ABC bestimmen läßt, somit sind dann vom ersteren Dreieck eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bekannt $\frac{h \sin (\beta + \alpha)}{\sin (\beta - \alpha)}$ $83 \cdot 4586\ m$ ($83 \cdot 458\ m$).

6) Die Breite des Flusses sei AB, die Höhe des Turmes bis zur oberen Öffnung BD, der Abstand der beiden Öffnungen $a = CD$, so ist $< ADB = \psi$, $< ACB = \varphi$ und

$AC : CD = \sin \psi : \sin (\varphi - \psi)$, $AC = \frac{a \sin \psi}{\sin (\varphi - \psi)}$,

$AB = AC \sin \varphi = \frac{a \sin \varphi \sin \psi}{\sin (\varphi - \psi)} = 158 \cdot 7835\ m$ ($158 \cdot 79\ m$).

Fig. 12.



7) C sei der Mittelpunkt der Wolke, D seine orthogonale Projektion auf die Horizontalebene, so ist $< EAD = 50^0$, $< CAD = 30^0$, $< EBD = 40^0$, $AB = 4000\ m$.

Daraus folgt $< DAB = 130^0$, $\measuredangle ADB = 10^0$. Aus ADB kann sonach AD und BD berechnet werden.

$$AD = 14806 \cdot 7\ m\ (14807\ m),$$
$$BD = 17645 \cdot 9\ m\ (17646\ m).$$

Da ACD ein rechtwinkliges Dreieck ist, von dem

Digitized by Google

AD und $< CAD$ bekannt sind, so

$CD = AD \operatorname{tang} 30^0 = 8548{\cdot}63\ m$ (8549 m).

$AD = AC.\cos 30^0$, $AC = \frac{AD}{\cos 30^0} = 17097{\cdot}3\ m$ (17097 m).

$CD = BD \operatorname{tang}(CBD)$, $\operatorname{tang}(CBD) = \frac{CD}{BD}$;

$< CBD = 25^0\,50'\,53''$ ($25^0\,50'\,54''$).

$BC = \frac{CD}{\sin(CBD)} = 19607{\cdot}6\ m$ (19607 m).

Sonach beträgt die Entfernung des Fußpunktes der Wolke $14806{\cdot}7\ m$, $17645{\cdot}9\ m$ (14807 m, 17646 m), die Höhe der Wolke $8548{\cdot}63\ m$ (8549 m), die Entfernung des Mittelpunktes ist $17097{\cdot}3\ m$, $19607{\cdot}6\ m$ (17097 m, 19607 m) und die Elevation für B beträgt $25^0\,50'\,53''$ ($25^0\,50'\,54''$).

8) Ist die Höhe des Obelisken AB und die den Abhang herab gemessene Strecke $AC + CD$, so sind vom $\triangle BCD$ CD und die Winkel bekannt, es kann daher mit dem Sinussatze BC bestimmt werden, dadurch sind vom $\triangle ABC$ zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bekannt, und es kann AB mit dem Cosinussatze berechnet werden. Man könnte auch mit Hilfe des Tangentensatzes zuerst die Winkel des $\triangle ABC$ bestimmen und dann den Sinussatz anwenden.

1) 10 m; 2) $20{\cdot}7186\ m$ ($20{\cdot}719\ m$).

9) Aus $\operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma = \sqrt{3} : 1$ und $\beta + \gamma = 105^0$ sind zunächst β und γ zu bestimmen.

$(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma) : (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma) = (\sqrt{3}+1) : (\sqrt{3}-1)$ daraus

$\sin(\beta+\gamma) : \sin(\beta-\gamma) = (\sqrt{3}+1) : (\sqrt{3}-1)$

$\beta - \gamma = 15$, $\beta + \gamma = 105$;

$\alpha = 75^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 45^0$.

$a = 10$, $b = 8{\cdot}9658$, $c = 7{\cdot}3207$.

Oder $\operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}(105 - \beta) = \sqrt{3} : 1$.

10) $h = \frac{b \sin\alpha \sin\gamma}{\sin(\gamma - \alpha)}$, wo h die Höhe, b die Standlinie, α und γ die Winkel bedeuten, welche die Visierlinien mit der Horizontalebene einschließen.

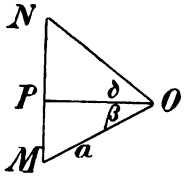
1) $49{\cdot}01932\ m$ ($49{\cdot}02\ m$), 2) 1001 m.

11) $h = \frac{CD.\sin\alpha.\sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$, wo h die Höhe, CD die gegebene horizontale Strecke, α den Winkel $71^0 33' 54''$, β den Winkel $63^0 26' 6''$ bedeutet.

1) $600{\cdot}0076\ m$ ($600{\cdot}01\ m$), 2) $18{\cdot}59892\ m$ ($18{\cdot}599\ m$).

Digitized by Google

Fig. 13.



12) $MN : a = \sin(\beta + \delta) : \sin(90 - \delta)$.

$$MN = \frac{a \sin(\beta + \delta)}{\sin(90 - \delta)},$$

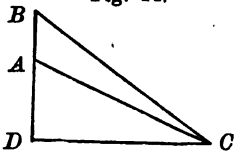
$MN = 88{\cdot}51134\ m$ ($88{\cdot}511\ m$).

13) $AB = 15\ m$, $< BCA = {}^1/_2{}^0$,
$< ACD = 15^0$;
$AB : AC = \sin {}^1/_2{}^0 : \sin(90^0 - 15^0\,30')$,

$$AD = AC \sin 15^0 = \frac{AB \sin(90^0 - 15^0\,30') \sin 15^0}{\sin 30'}$$

$$AC = \frac{AB \sin 74^0\,30'}{\sin 30'}.$$

Fig. 14.



1) $428{\cdot}7026\ m$ ($428{\cdot}71\ m$) über der Erde und $1656{\cdot}38\ m$ ($1656{\cdot}4\ m$) vom Beobachter entfernt.

2) $1284{\cdot}252\ m$ ($1284{\cdot}24\ m$) über der Erde. Eine Unrichtigkeit in der Lösung ist insoferne vorhanden, als der eine von den Strahlen, welche den Winkel ${}^1/_2{}^0$ einschließen, Tangente an einem Kreise ist, also den Kreis nicht im höchsten Punkte berührt, wie hier der Daten wegen angenommen werden mußte.

14) Man kann entweder mit Hilfe des Cosinussatzes zuerst die dritte Seite und dann mit Hilfe des Sinussatzes die Winkel bestimmen, oder man kann zuerst mit Hilfe des Tangentensatzes die Winkel und dann mit Hilfe des Sinussatzes die dritte Seite berechnen.

1) $c = 150{\cdot}057\ mm$; $\alpha = 54^0\,18'\,26{\cdot}53''$ ($150{\cdot}06$, $54^0\,18'\,26''$);
$f = 10663{\cdot}6$ (10664) mm^2.

2) $c = 762{\cdot}043\ m$; $\alpha = 35^0\,28'\,4{\cdot}6''$ ($762{\cdot}05$, $35^0\,28'\,4{\cdot}5''$);
$f = 162245$ (162240) m^2.

15) 712 Kilometer.

16) Da $\alpha = 2\gamma$ und $\beta = 180^0 - 2\gamma - \gamma = 180^0 - 3\gamma$ ist, so

$$a : b = \sin 2\gamma : \sin 3\gamma;\ \frac{a}{b} = \frac{2 \sin\gamma \cos\gamma}{\sin 2\gamma \cos\gamma + \cos 2\gamma \sin\gamma}$$

$$= \frac{2\cos\gamma}{4\cos^2\gamma - 1},$$

daraus $\cos^2\gamma - \frac{\sqrt{3}}{3}\cos\gamma - {}^1/_4 = 0$.

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{3} \pm 2\sqrt{3}}{6},\ \cos\gamma_1 = {}^1/_2\sqrt{3};\ \cos\gamma_2 = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

γ_2 ist unbrauchbar, da es einen stumpfen Winkel vorstellt.
$\gamma_1 = 30^0$, $\alpha = 60^0$, $\beta = 90^0$ und $c = \sqrt{36 - 27} = 3$.

Digitized by Google

17) $8 : 5 = \sin 2\beta : \sin\beta$, $\cos\beta = {}^4/_5$.
$\beta = 36^0\,52'\,11{\cdot}6''$ $(36^0\,52'\,10'')$.
$c = \frac{b\sin(180 - 3\beta)}{\sin\beta} = 7{\cdot}8\ dm.$

18) $b = 2a\sin\frac{\beta}{2}$, $f = a^2\frac{\sin\beta}{2}$, $r = \frac{2f}{a + a + 2a\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{f}{a\left(1 + \sin\frac{\beta}{2}\right)}$

Da $1 = \sin 90^0$ und $\sin 90^0 + \sin\frac{\beta}{2} = 2\sin\left(45 + \frac{\beta}{4}\right)\cos\left(45 - \frac{\beta}{4}\right) = 2\sin^2\left(45 + \frac{\beta}{4}\right)$, so $r = \frac{a\sin\beta}{4\sin^2\left(45 + \frac{\beta}{4}\right)}$, $R = \frac{a}{2\cos\frac{\beta}{2}}$.

$\alpha = \gamma = 42^0\,16'\,22{\cdot}6''$; $b = 1{\cdot}8269\ m$; $f = 0{\cdot}758545\ m^2$;
$r = 0{\cdot}353145\ m$; $R = 0{\cdot}91762\ m$ $(1{\cdot}827,\ 0{\cdot}7586,\ 0{\cdot}3532,\ 0{\cdot}9176)$.

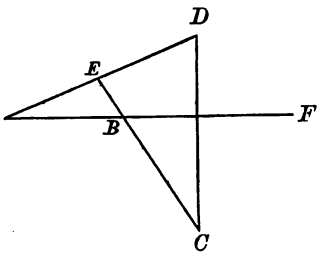
19) Ist die Parallele y und sind die unteren Abschnitte x, x, so ist $y = 2x$ und $(a - x) : y = a : b$, daraus $y = \frac{2ab}{2a + b}$, $b = 2a\sin\frac{\beta}{2}$,

somit $y = \frac{a\sin\frac{\beta}{2}}{\sin^2\left(45 + \frac{\beta}{4}\right)} = 15{\cdot}3968\ m$ $(15{\cdot}397\ m)$.

20) Nach dem Cosinussatze findet man
$AB = 6{\cdot}5802$ Kilometer.

21) $< BAD = 30^0$, $< FBC = 60^0$, $AB = 1{\cdot}5\ km$, $AD = 4\ km$, $BC = 2{\cdot}5\ km$.

Fig. 15.



$< AEB = 90^0$, daher
$BE = AB.\sin 30^0 = {}^3/_2 . {}^1/_2 = {}^3/_4$.
$CE = {}^5/_2 + {}^3/_4 = {}^{13}/_4$;
$AE = AB.\cos 30^0 = {}^3/_2 . {}^1/_2\sqrt{3} = {}^3/_4\sqrt{3}$ und
$DE = AD - AE = 4 - {}^3/_4\sqrt{3}$.
Da CDE ein rechtwinkliges Dreieck ist, so

$$DC = \sqrt{\left(\tfrac{13}{4}\right)^2 + \left(\tfrac{16 - 3\sqrt{3}}{4}\right)^2} = 4{\cdot}2258 \text{ Kilometer.}$$

22) Da $\cos 60^0 = {}^1/_2$ ist, so ist nach dem Cosinussatze
$t^2 = s^2 + \frac{s^2}{9} - 2 . \frac{s^2}{3} . {}^1/_2$ und $t = \frac{s}{3}\sqrt{7}$.
$19^0\,6'\,23{\cdot}8''$, $21^0\,47'\,12{\cdot}4''$, $19^0\,6'\,23{\cdot}8''$
$(19^0\,6'\,23'',\quad 21^0\,47'\,14'',\quad 19^0\,6'\,23'')$.
t ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, dessen Katheten $h = \frac{s}{2}\sqrt{3}$ und $\frac{s}{2} - \frac{s}{3} = \frac{s}{6}$ sind.

Digitized by Google

23) $a : b = 63 : 52$, $(a+b) : (a-b) = 115 : 11 = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{11}{115}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$. $\quad \frac{\alpha-\beta}{2} = 25^0\,33'\,36''$

$\alpha = 104^0\,15'\,1''$

$\beta = 53^0\,7'\,49''$

$u : a = (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) : \sin\alpha$

$= 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} : \sin\alpha$

$a = \frac{u\sin\alpha}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = 31{\cdot}5$; $b = 26$; $c = 12{\cdot}5$

$f = 157{\cdot}496$; $R = 16{\cdot}25$, $r = 4{\cdot}5$.

24) Da der der kleineren Seite gegenüberliegende Winkel gegeben ist, so sind zwei Dreiecke möglich.

$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$, $\beta = 85^0\,41'\,12{\cdot}63''$ $(85^0\,41')$.

$\gamma = 22^0\,0'\,41{\cdot}07''$ $(22^0\,0'\,54'')$.

$c = 6{\cdot}990914\,m$ $(6{\cdot}992\,m)$, $f = 61{\cdot}9384\,m^2$ $(61{\cdot}94\,m^2)$.

$\beta = 94^0\,18'\,47{\cdot}37''$ $(94^0\,19')$.

$\gamma = 13^0\,23'\,6{\cdot}33''$ $(13^0\,23')$.

$c = 4{\cdot}318032\,m$ $(4{\cdot}3175\,m)$, $f = 38{\cdot}25705\,m^2$ $(38{\cdot}256\,m^2)$.

25) Bezeichnet man $a+b+c$ mit $2s$, so ist

$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \frac{1}{s(s-a)}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{f}{s(s-a)}$.

$\frac{f}{s}$ kommt auch bei $\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}$, $\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}$ vor, $\frac{f}{s} = \frac{2f}{a+b+c} = r$ gleich dem Radius des eingeschriebenen Kreises, so

$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a}$, $\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{s-b}$, $\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c}$.

1) $\alpha = 49^0\,14'\,13{\cdot}4''$, $\beta = 72^0\,14'\,29{\cdot}8''$; $f = 59311{\cdot}8\,m^2$ $(49^0\,14'\,13{\cdot}4''$, $72^0\,14'\,30''$, $59312)$.

2) $\alpha = 45^0\,8'\,52{\cdot}2''$, $\beta = 55^0\,45'\,56{\cdot}8''$; $f = 11{\cdot}9497\,m^2$ $(45^0\,8'\,52''$, $55^0\,45'\,55''$, $11{\cdot}949)$.

26*a*) Ist der Scheitelpunkt des Winkels 60^0 mit O bezeichnet, so sind die Entfernungen OA und OB zu berechnen.

Ist $AC = 20\,m$, so sind vom $\triangle\ ACB$ alle drei Seiten (31, 21, 20) bekannt, daher kann der Winkel α berechnet werden.

$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} = \sqrt{\frac{27}{31}}$, $\alpha = 42^0\,6'\,12{\cdot}5''$ $(42^0\,6'\,20'')$;

Digitized by Google

nun sind von OAB alle drei Winkel und die Seite $AB = 31\,m$ bekannt, daher OA, OB nach dem Sinussatz gefunden werden können.

$$OA = 35\,m, \quad 34{\cdot}999\,m; \quad OB = 24\,m, \quad 24{\cdot}0011\,m.$$

26b) Sind α, β, γ die den Seiten a, b, c gegenüberliegenden Winkel, F der Inhalt des gegebenen und f der Inhalt des eingeschriebenen Dreieckes, so ist

$$f = \frac{\varrho^2}{2}\sin(180-\alpha) + \frac{\varrho^2}{2}\sin(180-\beta) = \frac{\varrho^2}{2}\sin(180-\gamma) =$$

$$\frac{\varrho^2}{2}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = 2\varrho^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

Da $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ und $\varrho = \frac{F}{s}$ ist, so

$$f = \frac{2\varrho^2 s}{abc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{2F^2}{abcs}.$$

Speziell $f = 3494{\cdot}4$,

27) $$a - b = (a+b)\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}} \text{ oder}$$

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta, \quad (a+b) : a = (\sin\alpha + \sin\beta) : \sin\alpha,$$

$$a = \frac{(a+b)\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta} = \frac{(a+b)\sin\alpha}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}, \quad c = \frac{(a+b)\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

$$f = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \left(\frac{a+b}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\right)^2 \frac{\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{2}.$$

1) 373, 277, 390, $f = 49140{\cdot}02$ (49139) dm^2.
2) 59·013, 75·767, 93·1039, $f = 2231{\cdot}312\,m^2$ (59·012, 75·768, 93·106, 2231·3).

28) $a : (b+c) = \sin\alpha : (\sin\beta + \sin\gamma)$

$$a : (b+c) = \sin\alpha : 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} =$$

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} : 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2},$$

daher $\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b+c}{a}\sin\frac{\alpha}{2}$ und $\beta-\gamma = 2\arccos\left(\frac{b+c}{a}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

Die Konstruktion ist dieselbe wie § 15, Aufgabe 10.

2) $\beta = 90^0$, $\gamma = 53^0\,7'\,50''$; $b = 10$, $c = 8$, $f = 24\,m^2$.
3) $\beta = 67^0\,37'\,30''$, $\gamma = 12^0\,10'\,30''$; $b = 24{\cdot}4286$, $c = 5{\cdot}5714$, $f = 66{\cdot}97534\,m^2$ ($67^0\,37'\,30''$, $12^0\,10'\,30''$, 24·429, 5·571, 66·974).

Digitized by Google

29) $(b-c):a=(\sin\beta-\sin\gamma):\sin\alpha=2\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}:$

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$(b-c):a=\sin\frac{\beta-\gamma}{2}:\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{b-c}{a}\cos\frac{\alpha}{2}$ und

$$\beta-\gamma=2\arcsin\left(\frac{b-c}{a}\cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Die Konstruktion ist dieselbe wie §. 15, Aufgabe 9.

1) $\beta=86^\circ23'8{\cdot}88''$, $\gamma=30^\circ1'21{\cdot}12''$ ($86^\circ23'10''$, $30^\circ1'20''$);
$b=748{\cdot}001\ dm$, $c=375{\cdot}001\ dm$, $f=125615\ dm^2$
(748, 375, 125614).

2) $\beta=98^\circ1'27{\cdot}57''$, $\gamma=41^\circ58'32{\cdot}43''$ ($98^\circ1'27{\cdot}5''$, $41^\circ58'32{\cdot}5''$);
$b=116{\cdot}96027\ m$, $c=78{\cdot}99827\ m$, $f=2969{\cdot}5693\ m^2$
(116·96, 79, 2969·6).

30) $(b+c):a=\cos\frac{\beta-\gamma}{2}:\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$

$$(b+c+a):(b+c-a)=\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right):\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$$

$(b+c+a):(b+c-a)=2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}:2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$,

daher $\frac{b+c+a}{b+c-a}=\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$ und

$$\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}=\frac{b+c-a}{b+c+a}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}.$$

1) $\alpha=73^\circ3'49\ 9''$, $\gamma=46^\circ16'10{\cdot}1''$ ($73^\circ3'48''$, $46^\circ16'12''$);
$b=16{\cdot}4035\ m$, $c=13{\cdot}5965\ m$ (16·404, 13·596).

2) $\alpha=63^\circ34'9{\cdot}72''$, $\gamma=30^\circ2'40{\cdot}28''$ ($63^\circ34'10''$, $30^\circ2'40''$);
$b=747{\cdot}834\ m$, $c=375{\cdot}166\ m$ (747·84, 375·16).

31) Da $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$, so ist, wenn $\frac{a+b+c}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$ mit D bezeichnet wird:

$a=D\cdot\sin\alpha$; $b=D\cdot\sin\beta$; $c=D\cdot\sin\gamma$ und

$f=\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}$ (D ist der Durchmesser des dem Dreiecke umschriebenen Kreises); oder auch mit Hilfe der beiden Mollweideschen Formeln:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}},\quad\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}};\quad a+b=cM.$$

Digitized by Google

Dies in $a + b + c = S$ eingesetzt, gibt c; a und b ergeben sich dann aus $a + b = cM$, $a - b = cN$.

Die Konstruktion ist dieselbe wie § 15, Aufgabe 7.

1) $a = 328{\cdot}5006\ m$, $b = 412{\cdot}3001\ m$, $c = 371{\cdot}3992\ m$, $f = 57979{\cdot}63\ m^2$ (328·5, 412·3, 371·4, 57980).
2) $a = 26\ m$, $b = 30\ m$, $c = 28\ m$, $f = 336\ m^2$.
3) $a = 111{\cdot}6959\ m$, $b = 192{\cdot}2021\ m$, $c = 185{\cdot}8520\ m$, $f = 10069{\cdot}19\ m^2$ (111·7, 192·2, 185·85, 10069·1).

32) $r = \frac{2f}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{2} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 398{\cdot}1817\,m$ (398·18 m)

$f = \frac{ab \sin\gamma}{2}$, $a = D \sin\alpha$, $D = \frac{a+b+c}{4 \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}}$.

33) $a = 3{\cdot}44302$, $b = 4{\cdot}12478$, $c = 4{\cdot}43220$, $f = 6{\cdot}716$, $r = 1{\cdot}119334$, $R = 2{\cdot}34309$ (3·443, 4·1248, 4·4322, 6·716, 1·1193, 2·3431).

34) a; $b : c = m : n$; $\beta - \gamma = \delta$.

$(b + c) : (b - c) = \operatorname{tang}\frac{\beta+\gamma}{2} : \operatorname{tang}\frac{\beta-\gamma}{2}$, $(b + c) : (b - c) =$

$= (m + n) : (m - n) = \operatorname{tang}\frac{\beta+\gamma}{2} : \operatorname{tang}\frac{\delta}{2}$.

$\operatorname{tang}\frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{m+n}{m-n} \operatorname{tang}\frac{\delta}{2}$,

$\operatorname{tang}\frac{\beta+\gamma}{2} = 17 \operatorname{tang} 21^\circ 14'$.

$\beta = 102^\circ 37' 27{\cdot}93''$, $\gamma = 60^\circ 9' 27{\cdot}93''$ ($102^\circ 37' 28''$, $60^\circ 9' 28''$); $b = 286{\cdot}8127\ m$, $c = 254{\cdot}9446\ m$, $f = 10822{\cdot}15\ m^2$ (286·81, 254·94, 10822·2).

In Verbindung mit Gleichungen.

35) Aus $b : c = 1 : 2$, $a^2 + b^2 = 4$, $a^2 - b^2 = 2$ folgt $a = \pm\sqrt{3}$, $b = \pm 1$, $c = \pm 2$, doch sind nur die positiven Werte zu brauchen.

Die Winkel können nun nach $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, oder nach

$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$, $\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$,

$\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} = \frac{r}{s-c}$ bestimmt werden.

$\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 90^\circ$, $f = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Diese Werte ergeben sich auch leicht, wenn man beachtet, daß $a^2 + b^2 = c^2$, also das Dreieck rechtwinklig ist.

Digitized by Google

36) $21 = a + b + c$, $a + 5 = b + c$, $a^2 + b^2 + c^2 = 149$.
Aus den zwei ersten Gleichungen folgt $a = 8$, damit ergibt sich aus einer der ersten und der dritten Gleichung $b_1 = 7$, $b_2 = 6$, $c_1 = 6$, $c_2 = 7$.

Mit der Formel für $\cos \frac{\alpha}{2}$ erhält man

$\alpha_1 = 75°31'21''$, $\beta_1 = 46°34'2{\cdot}86''$, $\gamma_1 = 57°54'36{\cdot}14''$
oder $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{5}\sqrt{15}$, $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{1}{9}\sqrt{15}$, $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{7}\sqrt{15}$
$\alpha_2 = \alpha_1$, $\beta_2 = \gamma_1$, $\gamma_2 = \beta_1$ ($75°31'20''$, $46°34'$, $57°54'40''$);
$f = 5{\cdot}25\sqrt{15} = 20{\cdot}33316\ m^2$ ($20{\cdot}333\ m^2$).

37) $a + b + c = 27$, $ab + ac + bc = 242$, $a^2 + 45 = b^2 + c^2$.
Quadriert man die erste Gleichung und setzt in dieselbe die Werte von $b^2 + c^2$ und $ab + ac + bc$ aus der zweiten und dritten Gleichung ein, so erhält man $a = 10$ und infolgedessen $b_1 = 9$, $b_2 = 8$, $c_1 = 8$, $c_2 = 9$. Benützt man wieder die Formel für den Cosinus des halben Winkels, so:
$\alpha_1 = 71°47'24{\cdot}2''$, $\beta_1 = 58°45'5{\cdot}6''$, $\gamma_1 = 49°27'30{\cdot}2''$;
$\alpha_2 = \alpha_1$, $\beta_2 = \gamma_1$, $\gamma_2 = \beta_1$ ($71°47'22''$, $58°45'6''$, $49°27'32''$);
$f = 34{\cdot}19704\ m^2$ ($34{\cdot}197\ m^2$), $R = 5{\cdot}263614$ ($5{\cdot}2636\ m$).

Man kann auch zunächst die Fläche berechnen und aus $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$, $\sin \beta = \frac{b}{2R}$, $\sin \gamma = \frac{c}{2R}$ die Winkel bestimmen.

38) $a^2 + b^2 = 2650$, $a^2 - b^2 = 1400$, daraus $a = 45$, $b = 25$, somit sind zwei Seiten und der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel gegeben.
$a = 45\ m$, $b = 25\ m$, $c = 47{\cdot}6856\ m$ ($47{\cdot}686\ m$).
$\beta = 31°7'26{\cdot}35''$, $\gamma = 80°22'40{\cdot}65''$ ($31°7'27''$, $80°22'40''$).
$f = 554{\cdot}5865\ m^2$ ($554{\cdot}59\ m^2$).

39) $a + b = 19$, $a^2 + b^2 = 185$; $a_1 = 11\ m$, $b_1 = 8\ m$, $a_2 = 8\ m$, $b_2 = 11\ m$.
$c_1 = c_2 = 10{\cdot}8559083\ m$, $\alpha_1 = 69°29'32{\cdot}55'' = \beta_2$, $\alpha_2 = 42°56'9{\cdot}95'' = \beta_1$
($69°29'33''$, $42°56'9{\cdot}5''$, $c = 10{\cdot}856$).
$f = 40{\cdot}6717\ m^2$ ($40{\cdot}671\ m^2$).

40) Sind a die Basis, b und c die Schenkel und schließt b mit der Höhe den Winkel e ein, so ist auch der der dritten Seite gegenüberliegende Winkel $\gamma = 90 - e$ gegeben, und so kann man die Mollweidesche Formel $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}$ anwenden; oder

Digitized by Google

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, wo $\gamma = 90 - e$, daher $2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2$ und

$$2ab + 2ab\cos\gamma = a^2 + 2ab + b^2 - c^2$$
$$2ab\,(1 + \cos\gamma) = (a+b)^2 - c^2$$
$$4ab\cos^2\tfrac{\gamma}{2} = (a+b+c)\,(a+b-c)$$
$$ab = \frac{(a+b+c)\,(a+b-c)}{4\cos^2\frac{\gamma}{2}},$$ daraus und aus $a + b = s$

können dann a und b bestimmt werden.

$a_1 = 7{\cdot}50718 = b_2$, $a_2 = 5{\cdot}41082 = b_1$ (7·507, 5·411)
$\alpha_1 = 79^0\,15'\,4'' = \beta_2$, $\alpha_2 = 45^0\,4'\,52''$ ($79^0\,14'\,50''$)
$f = 16{\cdot}77158\,m^2$ (16·772 m^2).

41) $a : b : c = 5 : 8 : 9$.

$a^2 + b^2 + c^2 = 680$; daraus $a^2 = 100$, $a = 10$, $b = 16$, $c = 18$.
$\alpha = 33^0\,33'\,26{\cdot}3''$, $\beta = 62^0\,10'\,54{\cdot}7''$, $\gamma = 84^0\,15'\,39''$
($33^0\,33'\,26''$, $62^0\,10'\,54''$, $84^0\,15'\,40''$).
$f = 79{\cdot}599\,m^2$, $r = 3{\cdot}618136\,m$ (3·6181 m).

Fläche, Seiten und Winkel.

42) Aus $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \frac{f}{s(s-a)}$ erhält man $s\,(s-a) = f.\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$,

$$s = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{2} + f.\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{a+b+c}{2},$$ somit

$$b + c = \sqrt{a^2 + 4f\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}$$ und $bc = \frac{2f}{\sin\alpha}$, daher

$(b+c)^2 - 4bc = (b-c)^2 = a^2 - 4f\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$.

Aus $b + c = \sqrt{a^2 + 4f\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}$ und

$b - c = \sqrt{a^2 - 4f\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}$ sind b und c bekannt.

Oder $s\,(s-a) = f\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$ gibt $s^2 - 13s = 431{\cdot}321$ und

$s = 28{\cdot}26169 = \frac{a+b+c}{2}$, daraus folgt $b + c = 43{\cdot}52338$ und

$bc = \frac{2f}{\sin\alpha} = 465{\cdot}99875$.

1) $b = 24{\cdot}51351\,m$, $c = 19{\cdot}00987\,m$ (24·515, 19·009).
2) $b = 365{\cdot}0103\,m$, $c = 347{\cdot}9897\,m$ (365, 348).

Digitized by Google

43) Aus $f = \frac{ab \sin\gamma}{2}$ folgt $b = \frac{2f}{a \sin\gamma}$.

$(a+b):(a-b) = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$, daher

$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$, $\frac{\alpha-\beta}{2} = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a-b}{a+b}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\right)$

$$\alpha + \beta = 180 - \gamma.$$

c kann dann mit dem Sinussatze bestimmt werden.

1) $\alpha = 104°41'39{\cdot}8''$, $\beta = 5°50'20{\cdot}2''$ ($104°41'40''$, $5°50'20''$);
$b = 12{\cdot}7259\,cm$, $c = 117{\cdot}1442\,cm$ ($12{\cdot}726$, $117{\cdot}14$).

2) $\alpha = 16°18'40''$, $\beta = 91°$ ($16°18'42''$, $90°59'58''$);
$b = 3793{\cdot}272\,m$, $c = 3622{\cdot}005\,m$ ($3793{\cdot}3$, 3622).

44) $b + c = 28$, $bc = \frac{2f}{\sin\alpha}$; $\operatorname{tang}\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$,

$b = 15\,m$, $c = 13\,m$.

$\beta = 67°22'48{\cdot}58''$, $\gamma = 53°7'48{\cdot}42''$ ($67°22'48{\cdot}5''$, $53°7'48{\cdot}5''$).

45*a*) $\sin\gamma = \frac{2f}{ab}$, $\gamma = 25°15'52{\cdot}9''$ ($25°15'54''$).

Man kann nun entweder die Seite c mit dem Cosinussatze bestimmen und dann die anderen Winkel mit dem Sinussatze berechnen, oder zuerst die Winkel mit dem Tangentensatze und dann die Seite c mit dem Sinussatze ermitteln.

$\alpha = 138°39'55{\cdot}9''$, $\beta = 16°4'11{\cdot}2''$ ($138°39'55''$, $16°4'11''$), $c = 43{\cdot}9432\,m$ ($43{\cdot}943\,m$). Da γ auch im zweiten Quadranten liegen, somit $154°44'7{\cdot}8''$ ($154°44'6''$) sein kann, so entspricht noch eine zweite Lösung.

45*b*) Aus $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{f}{s(s-a)}$ kann zunächst α bestimmt und hierauf die eine Mollweidesche Gleichung angewendet werden; oder man setzt die Werte von $s = \frac{3}{2}$ und $a = 1$ in $f^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ ein und bestimmt dann aus dieser Gleichung und aus $b + c = 2$ die drei Seiten des Dreieckes.

$a = 1$, $b = 1 \pm \sqrt{1/6}$, $c = 1 \mp \sqrt{1/6}$.

$a = 1$, $b = 1{\cdot}40825$, $c = 0{\cdot}59175$.

$\alpha = 36°52'12''$, $\beta = 122°20'$, $\gamma = 20°47'48''$.

46) Da $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$, also $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$ ist, so ist

$$f = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha} \text{ und}$$

$$a = \sqrt{\frac{2f\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}} = \sin\alpha\sqrt{\frac{2f}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}.$$

Digitized by Google

Bezeichnet man $\sqrt{\frac{2f}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}$ mit D, so ist

$a = D\,.\sin\alpha,\quad b = D\sin\beta,\quad c = D\,.\sin\gamma.$

$a = 234{\cdot}0037\,m,\quad b = 195{\cdot}4137\,m,\quad c = 97{\cdot}4126\,m$

$(a = 234\,m,\quad b = 195{\cdot}41\,m,\quad c = 97{\cdot}413\,m).$

47) $a + b = 13,\quad a^2 + b^2 = 89$ geben $a = 8,\ b = 5,$

Daher $f = 19 = \frac{ab}{2}\sin\gamma,\quad \sin\gamma = 0{\cdot}95.$

$\gamma_1 = 71^\circ 48' 18{\cdot}4''$ $(71^\circ 48' 20'')$; $\gamma_2 = 108^\circ 11' 41{\cdot}6''$ $(108^\circ 11' 40'')$.

Nun sind von dem Dreiecke zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bekannt.

$c_1 = 8{\cdot}00125\,m$ $(8{\cdot}0013\,m)$, $c_2 = 10{\cdot}6761\,m$ $(10{\cdot}6761\,m)$.

$\alpha_1 = 71^\circ 46' 38''$, $\beta_1 = 36^\circ 25' 3{\cdot}6''$ $(71^\circ 46' 40''$, $36^\circ 25')$,

$\alpha_2 = 45^\circ 23' 12{\cdot}4''$ $(45^\circ 23' 15'')$, $\beta_2 = 26^\circ 25' 6''$ $(26^\circ 25' 5'')$.

48) Aus $f = \frac{ab\sin\gamma}{2}$ folgt $ab = \frac{2f}{\sin\gamma}$, somit

$a^2 + 2ab + b^2 = 1936,$

$a^2 - 2ab + b^2 = 16;\quad a_1 = 24,\ b_1 = 20,\ a_2 = 20,\ b_2 = 24.$

Somit sind zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bekannt.

$c = 23{\cdot}4314,\quad \alpha_1 = 66^\circ 32' 50'' = \beta_2;\quad \alpha_2 = 49^\circ 51' 40'' = \beta_1.$

Höhen des Dreieckes.

49) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,\quad \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$

da $a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$ ist, so $b = \frac{ah_a}{h_b}$, $c = \frac{ah_a}{h_c}$ und

$$\cos\alpha = \frac{\frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} - \frac{1}{h_a^2}}{\frac{2}{h_b h_c}},\quad \cos\beta = \frac{\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_c^2} - \frac{1}{h_b^2}}{\frac{2}{h_a h_c}}.$$

$h_c = a\sin\beta = b\sin\alpha,\quad a = \frac{h_c}{\sin\beta}.$

1) $\alpha = 80^\circ 6' 5{\cdot}1'',\quad \beta = 55^\circ 10' 40{\cdot}1''\quad \gamma = 44^\circ 43' 14{\cdot}8''$
$(80^\circ 6' 5'',\ 55^\circ 10' 40'',\ 44^\circ 43' 15'');$

$a = 17{\cdot}0539\,m,\quad b = 14{\cdot}2116\,m,\quad c = 12{\cdot}1813\,m$
$(17{\cdot}054,\ 14{\cdot}212,\ 12{\cdot}181).$

2) Das Dreieck ist rechtwinklig, die beiden spitzen Winkel sind $36^\circ 52' 11{\cdot}64''$ und $53^\circ 7' 48{\cdot}36''$; die drei Seiten sind:
$^1/_4$, $^1/_3$ und $^5/_{12}$ $(36^\circ 52' 10'',\ 53^\circ 7' 50'')$.

Digitized by Google

Da $a h_a = b h_b = c h_c$ ist, so ist auch $\frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = \frac{c}{\frac{h_a h_b}{h_c}}$

d. h. das Dreieck mit den Seiten a, b, c ist dem Dreiecke mit den Seiten h_b, h_a, $\frac{h_a h_b}{h_c}$ ähnlich.

50) $b = \frac{h_a}{\sin\gamma} = 8\,m$, $a = \frac{h_b}{\sin\gamma} = 5\,m$.

$c = \sqrt{\frac{h^2_a + h^2_b}{\sin^2\gamma} - 2\frac{h_a h_b}{\sin^2\gamma}\cos\gamma} = \frac{1}{\sin\gamma}\sqrt{h^2_a + h^2_b - 2h_a h_b \cos\gamma}$

oder $\operatorname{tang}\frac{\beta-\alpha}{2} = {}^3/_{13}\operatorname{cotg} 18^0\,26'\,5{\cdot}8''$.

$\alpha = 36^0\,52'\,11{\cdot}6''$, $\beta = 106^0\,15'\,36{\cdot}8''$, $c = 5\,m$, $f = 12\,m^2$.

51) $h_b = c\sin\alpha$, $h_b = a\sin\gamma$, $c = \frac{h_b}{\sin\alpha}$, $a = \frac{h_b}{\sin\gamma}$, $b = h_b\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha.\sin\gamma}$;

$f = \frac{b h_b}{2} = \frac{h^2_b \sin(\alpha+\gamma)}{2\sin\alpha\sin\gamma}$.

Man errichte in den Endpunkten von $AB = h_b$ zwei auf AB normale Gerade MN und PQ, trage von B aus an PQ links den Winkel α, rechts den Winkel γ auf, so schneiden deren zweite Schenkel die Gerade MN in C und D. BCD ist das gesuchte Dreieck.

1) $a = 617{\cdot}6845\,m$, $b = 1126{\cdot}3857\,m$, $c = 809{\cdot}76\,m$,
$f = 243299{\cdot}27\,m^2$ (617·67, 1126·4, 809·75, 243296).

2) $a = 898{\cdot}0488\,m$, $b = 626{\cdot}6739\,m$, $c = 749{\cdot}5095\,m$,
$f = 231916{\cdot}31\,m^2$ (898·05, 626·67, 749·52, 231916).

3) $a = 44{\cdot}0143\,m$, $b = 35{\cdot}8349\,m$, $c = 59{\cdot}4328\,m$,
$f = 784{\cdot}7847\,m^2$ (44·014, 35·834, 59·432, 784·77).

52) $u = 2a + b$, $\frac{b}{2} = \frac{u-2a}{2}$, $a^2 = h^2_b + \left(\frac{u-2a}{2}\right)^2$, $a = c = \frac{u^2+4h^2_b}{4u}$

$b = \frac{u^2-4h^2_b}{2u}$, $\alpha = \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{4uh_b}{u^2+4h^2_b}\right)$.

Man errichtet im Mittelpunkte des Umfanges $= AB$ eine Normale $CD = h_b$ und verbindet D mit A und B; in der Mitte von AD und BD errichtet man Normale, welche AB in F und G schneiden; FGD ist das gesuchte Dreieck.

$a = c = 370\,m$, $b = 240\,m$, $\alpha = 71^0\,4'\,31{\cdot}25''$ $(71^0\,4'\,32'')$.

53) $h_b = c\sin\alpha = a\sin\alpha$; $h_a = a\sin\beta$, nun ist $\beta = 180^0 - 2\alpha$ und $\sin\beta = \sin 2\alpha$, daher $h_a + h_b = s = a(\sin\alpha + \sin 2\alpha) =$

$$a\left[2\sin\tfrac{3\alpha}{2}.\cos\tfrac{\alpha}{2}\right],$$

somit $a = \frac{s}{2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$; $b = 2a\cos\alpha$.

Digitized by Google

$h_b = \frac{s \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{3\alpha}{2}}$; $h_a = a \sin 2\alpha$.

$a = 1{\cdot}22625\ m$, $b = 0{\cdot}93853\ m$ (1·2263, 0·9385);
$h_a = 0{\cdot}86709\ m$, $h_b = 1{\cdot}13291\ m$, $f = 0{\cdot}531636\ m^2$.

Die Konstruktion ist dieselbe wie von der Aufgabe 24 des § 15.

54) $h_a = c \sin \beta = 7{\cdot}5\ m$, $h_c = 52{\cdot}5\ m$, $a = 105\ m$, $b = 92{\cdot}3148\ m$, $f = 393{\cdot}75\ m^2$.
$\alpha = 145^0\,20'\,23{\cdot}78''$ (145° 20′ 24″).

55) $a + h_b = s$, $a^2 = h_b^2 + \frac{b^2}{4}$, daher

$(a + h_b)(a - h_b) = \frac{b^2}{4}$, $a - h_b = \frac{b^2}{4s}$ und

$a = \frac{4s^2 + b^2}{8s}$, $h_b = \frac{4s^2 - b^2}{8s}$

$h_b = a \sin \alpha$, $\alpha = \text{arc sin}\left(\frac{h_b}{a}\right) = \text{arc sin}\left(\frac{4s^2 - b^2}{4s^2 + b^2}\right)$.

Die Konstruktion ist dieselbe wie von der Aufgabe 11 des § 15.
$a = 10\ m$, $h_b = 8\ m$, $\alpha = 53^0\,7'\,48{\cdot}36''$ (53° 7′ 50″).

56) Ist b die gemeinschaftliche Basis, H die Höhe des größeren und h die Höhe des kleineren Dreieckes, so $H = h + 3$
$b = H + 2$, somit

$$\frac{b(b-2)}{2} + \frac{b(b-5)}{2} = 36,\quad b = \frac{7 \pm 25}{4}$$

und da nur das obere Zeichen gelten kann, so $b = 8\ m$, $H = 6\ m$, $h = 3\ m$, $F = 24\ m^2$, $f = 12\ m^2$. Die Schenkel des großen Dreieckes sind $7{\cdot}2111\ m$, des kleinen $5\ m$ lang, im großen ist der Winkel 56° 18′ 35·8″, im kleinen 36° 52′ 11·6″ (56° 18′ 36″, 36° 52′ 12″).

57) $f = \frac{b.h_b}{2}$, $b = \frac{2f}{h_b}$, $\text{tang}\,\frac{\beta}{2} = \frac{f}{s(s-b)} = \frac{4f}{u(u-2b)}$.

Mit Hilfe der Mollweideschen Formel $\cos {}^1/_2(\alpha - \gamma) = \frac{a+c}{b} \sin \frac{\beta}{2}$
und mit Hilfe des Tangentensatzes $a - c = (a + c)\frac{\text{tang } {}^1/_2(\alpha - \gamma)}{\text{cotg}\,\frac{\beta}{2}}$.

$a = c = 2{\cdot}9\ m$, $b = 4\ m$, $\alpha = \gamma = 46^0\,23'\,49{\cdot}86''$,
$\beta = 87^0\,12'\,20{\cdot}28''$ (46° 23′ 50″, 87° 12′ 20″),
oder aus $f = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ folgt
$16f^2 = u(b + c - a)(a + c - b)(a + b - c)$ und da $b = \frac{2f}{h_b}$

Digitized by Google

und $a + c = u - b$, so $\frac{16 f^2}{u\left(u - \frac{4f}{h_b}\right)} = \frac{4f^2}{h_b^2} - (a - c)^2$, daher

$$a - c = \sqrt{\frac{4f^2}{h_b^2} - \frac{16 f^2}{u\left(u - \frac{4f}{h_b}\right)}}$$

$a + c = u - \frac{2f}{h_b}$, daraus ergeben sich a und c.

58) $h_b = a \sin \gamma$, $a = \frac{h_b}{\sin \gamma}$, $c = s - a$; $\sin \alpha = \frac{h_b}{c}$, $b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma}$.
$a = 70 \cdot 2659\ m$, $b = 90 \cdot 6582\ m$, $c = 99 \cdot 7342\ m$,
$f = 3082 \cdot 3795\ m^2$
($70 \cdot 266\ m$, $90 \cdot 657\ m$, $99 \cdot 734\ m$, $3082 \cdot 4\ m^2$),
$\alpha = 42^0\,59'\,7 \cdot 6''$, $\beta = 61^0\,36'\,16 \cdot 4''$ ($42^0\,59'\,7''$, $61^0\,36'\,17''$).

59) $\operatorname{tang} \frac{\alpha - \gamma}{2} = \frac{a - c}{a + c} \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}$, da $\frac{a - c}{a + c} = \frac{m - n}{m + n}$,
so $\operatorname{tg} \frac{\alpha - \gamma}{2} = \frac{m - n}{m + n} \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}$;
$a = \frac{hc}{\sin \beta}$, $b = \frac{hc}{\sin \alpha}$, $c = \frac{an}{m}$, $f = \frac{chc}{2}$
$a = 24$, $b = 18$, $c = 30$
$\alpha = 53^0\,7'\,50''$, $\beta = 36^0\,52'\,10''$
$\gamma = 90^0$, $f = 216\ dm^2$.

Radius des eingeschriebenen Kreises.

60) $c = \varrho \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} + \varrho \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} = \varrho \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}} =$

$$\frac{2 \varrho \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{\varrho \sin \gamma}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}} = D \sin \gamma, \text{ wo}$$

$D = \frac{\varrho}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}} = 2R$ ist. Dem entsprechend

$a = D \sin \alpha$, $b = D \sin \beta$ und

$f = \varrho^2 \cdot \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}$.

1) $a = 804 \cdot 306\ m$, $b = 1006 \cdot 622\ m$, $c = 864 \cdot 902\ m$,
$f = 334478 \cdot 62\ m^2$ ($804 \cdot 3$, $1006 \cdot 63$, $864 \cdot 9$, 334478).

2) $a = 54 \cdot 7213\ m$, $b = 48 \cdot 1105\ m$, $c = 61 \cdot 2567\ m$,
$f = 1257 \cdot 492\ m^2$ ($54 \cdot 721$, $48 \cdot 111$, $61 \cdot 257$, $1257 \cdot 5$).

Digitized by Google

61) $a+b+c=\frac{2f}{\varrho}=12,\ 7+c=12,\ \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=6$

$(6-a)(6-b)=(6-a)(a-1)=6.$

$a_1=3,\ a_2=4;\ b_1=4,\ b_2=3;\ c_{1,2}=5.$

$\frac{ab\sin\gamma}{2}=6,\ \sin\gamma=1,\ \gamma=90^0.$

$\alpha_1=36^0\,52'\,11{\cdot}64''=\beta_2,\ \alpha_2=53^0\,7'\,48{\cdot}36''=\beta_1$

$(36^0\,52'\,10'',\ 53^0\,7,50'').$

Oder man bestimmt zuerst c aus $2f=\varrho\,(a+b+c)=2\varrho s$, dann $\frac{\gamma}{2}$ aus $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\varrho}{s-c}$ und dann $\alpha-\beta$ aus $(a+b):c=\cos{}^1/_2\,(\alpha-\beta):\sin{}^1/_2\,\gamma.$

Radius des umgeschriebenen Kreises.

62) Aus $\operatorname{tg}\alpha:\operatorname{tg}\beta:\operatorname{tg}\gamma=4:2:1$ folgt

$\operatorname{tg}\alpha:\operatorname{tg}\beta=4:2,\ \operatorname{tg}\alpha:\operatorname{tg}\gamma=4:1$, somit

$\operatorname{tg}\beta=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{4},\ \operatorname{tg}\gamma=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{4}$ und wegen $\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$

$\frac{7\operatorname{tg}\alpha}{4}=\frac{\operatorname{tg}^3\alpha}{8}$, daraus $\operatorname{tg}\alpha=\pm\sqrt{14}.$

Das — Zeichen ist unzulässig, da es auch β und γ größer als 90^0 ergeben würde, somit

$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{14},\ \operatorname{tg}\beta={}^1/_2\sqrt{14},\ \operatorname{tg}\gamma={}^1/_4\sqrt{14}$ und

$\alpha=75^0\,2'\,13'',\ \beta=61^0\,52'\,29'',\ \gamma=43^0\,5'\,18''.$

$a=2R\sin\alpha,\ b=2R\sin\beta,\ c=2R\sin\gamma.$

$f=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$

63) Es sei $\operatorname{tg}\alpha=n-1,\ \operatorname{tg}\beta=n,\ \operatorname{tg}\gamma=n+1$, so erhält man aus $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$

$3n=n\,(n^2-1)$, daher $n=\pm 2.$

Nur $n=+2$ ist zulässig, es ergibt

$\operatorname{tg}\alpha=1,\ \operatorname{tg}\beta=2,\ \operatorname{tg}\gamma=3$, oder

$\alpha=45^0,\ \beta=63^0\,26'\,6'',\ \gamma=71^0\,33'\,54''$

$a=2R\sin\alpha,\ f=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$

64) $b=2R\sin\beta=200{\cdot}3071\ m\ (200{\cdot}31\ m),\ a=183{\cdot}7\ m\ (183{\cdot}7\ m)$

$\sin\alpha=\frac{a\sin\beta}{b},\ c=\frac{b\sin\gamma}{\sin\beta},\ f=\frac{bc\sin\alpha}{2}$

$\alpha=46^0\,47'\,40'',\ \gamma=80^0\,34'\,10'';\ \ c=248{\cdot}617\ m\ (248{\cdot}62\ m).$

$f=18149{\cdot}55\ m^2\ (18150\ m^2).$

Digitized by Google

65) Ist x die kleinere Sehne, so ist der Winkel, welcher der Sehne x in dem rechtwinkligen Dreiecke mit den Seiten x, $x + d$, $2R$ gegenüberliegt, $\frac{\gamma}{2}$, daher

$$x = (x + d) \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2}, \quad x = \frac{d \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2}}{1 - \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2}} = \frac{d \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\gamma}{2}} =$$

$$\frac{d \sin \frac{\gamma}{2}}{\sin\left(90 - \frac{\gamma}{1}\right) - \sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{d \sin \frac{\gamma}{2}}{2 \cos 45^0 \sin\left(45 - \frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{d \sin \frac{\gamma}{2}}{\sqrt{2} \sin\left(45 - \frac{\gamma}{2}\right)}.$$

$$x = 2R \sin \frac{\gamma}{2}, \quad 2R = \frac{x}{\sin \frac{\gamma}{2}} = \frac{d}{\sqrt{2} \sin\left(45^0 - \frac{\gamma}{2}\right)}.$$

Speziell $x = 200\,m$, $x + d = 609\,m$, $2R = 641\,m$.

Seiten, Winkel und Abschnitte der Seiten.

66) $m = c \cos \alpha$, $n = a \cos \gamma$; $\frac{m}{n} = \frac{c \cos \alpha}{a \cos \gamma}$. Nun ist $c : a = \sin \gamma : \sin \alpha$, daher $\frac{m}{n} = \frac{\sin \gamma . \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \gamma}$, oder $m : n = \sin \gamma \cos \alpha : \sin \alpha \cos \gamma$ und $(m + n) : (m - n) = (\sin \gamma \cos \alpha + \sin \alpha \cos \gamma) : (\sin \gamma \cos \alpha - \sin \alpha \cos \gamma)$, $(m + n) : (m - n) = \sin(\alpha + \gamma) : \sin(\gamma - \alpha) = \sin \beta : \sin(\gamma - \alpha)$, $\sin(\gamma - \alpha) = \frac{m - n}{m + n} \sin \beta$. Oder $m = h \operatorname{tg} \beta_1$, $n = h \operatorname{tg} \beta_2$, daher $m : n = \operatorname{tg} \beta_1 : \operatorname{tg} \beta_2$, $(m + n) : (m - n) = (\operatorname{tg} \beta_1 + \operatorname{tg} \beta_2) : (\operatorname{tg} \beta_1 - \operatorname{tg} \beta_2) = \sin \beta : \sin(\beta_1 - \beta_2)$; daraus kann $\beta_1 - \beta_2$ und dann können aus $\beta_1 - \beta_2$ und $\beta_1 + \beta_2 = \beta$, β_1 und β_2 bestimmt werden.

Oder aber $c^2 - m^2 = a^2 - n^2$, $(c + a)(c - a) = m^2 - n^2$, da $a = 2R \sin \alpha$, $c = 2R \sin \gamma$ ist, so ist auch

$$4R^2 (\sin \gamma + \sin \alpha)(\sin \gamma - \sin \alpha) = m^2 - n^2,$$

$$\sin(\gamma - \alpha) = \frac{m^2 - n^2}{4R^2 \sin \beta}.$$

1) $a = 3{\cdot}88803\,m$, $b = 4{\cdot}7\,m$, $c = 4{\cdot}06532\,m$;
$\alpha = 52^0\,3'\,1{\cdot}8''$, $\beta = 72^0\,24'\,38''$, $\gamma = 55^0\,32'\,20{\cdot}2''$
($a = 3{\cdot}8880\,m$, $b = 4{\cdot}7\,m$, $c = 4{\cdot}0653\,m$, $\alpha = 52^0\,3'\,2''$,
$\beta = 72^0\,24'\,38''$, $\gamma = 55^0\,32'\,20''$).
$f = 7{\cdot}53344\,m^2$ ($7{\cdot}5334\,m^2$).

2) $a = 352\,m$, $b = 585{\cdot}0494\,m$, $c = 417\,m$;
$\alpha = 36^0\,29'\,30{\cdot}87''$, $\beta = 98^0\,43'$, $\gamma = 44^0\,47'\,29{\cdot}13''$
($\alpha = 36^0\,29'\,31''$, $\beta = 98^0\,43'$, $\gamma = 44^0\,47'\,29''$).
$f = 72544{\cdot}35\,m^2$ ($72545\,m^2$).

Digitized by Google

67) Ist h die Höhe auf die dritte Seite, so $c^2 - n^2 = h^2 = a^2 - m^2$, daher

$$m^2 - n^2 = a^2 - c^2,\ m + n = \frac{(a+c)(a-c)}{m-n} = b = 4{\cdot}3875\,m$$

$$m = 3{\cdot}05375\,m,\quad n = 1{\cdot}33375\,m.$$

$\cos\gamma = \frac{m}{a}$, $\cos\alpha = \frac{n}{c}$, doch gibt die Tangentenformel genauere Werte; nach derselben erhält man:

$\alpha = 54^0\,11'\,54{\cdot}8''$, $\beta = 94^0\,36'\,16{\cdot}2''$, $\gamma = 31^0\,11'\,49''$

($\alpha = 54^0\,11'\,54''$, $\beta = 94^0\,36'\,16''$, $\gamma = 31^0\,11'\,49''$).

$f = 4{\cdot}05667\,m^2$ ($4{\cdot}0567\,m^2$), $r = 0{\cdot}792511\,m$ ($0{\cdot}7925\,m$).

68) Sind die Abschnitte der Seite c x und $x + d$ und die auf c gefällte Höhe h, so ist $h = x \operatorname{tang}\alpha = (x + d)\operatorname{tang}\beta$. Daraus

$x = \frac{d \operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha - \operatorname{tang}\beta} = \frac{d\cos\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$, $c = x + (x + d)$; oder

$(x + d) : x = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta$, $c : d = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) : (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)$

$$c = d\,\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)},$$

dadurch sind vom Dreiecke eine Seite und die Winkel bekannt.

$a = 346{\cdot}4423$, $b = 337{\cdot}7098$, $c = 325{\cdot}4024$

($a = 346{\cdot}44$, $b = 337{\cdot}71$, $c = 325{\cdot}4$).

$f = 48940{\cdot}1$ (48940) Flächeneinheiten.

69) Bezeichnet man die Abschnitte mit m und n, so ist

$$a^2 - m^2 = b^2 - n^2,\ a^2 - b^2 = m^2 - n^2,$$

$$(a - b)\,(a + b) = (m - n)\,(m + n)$$

oder weil $a - b = D$, $m - n = d$ und $c = m + n$ ist, so $\frac{D}{d} = \frac{c}{a+b}$; und mit Hilfe der Mollweideschen Gleichungen:

$(a + b) : c = \cos\frac{\alpha-\beta}{2} : \sin\frac{\gamma}{2}$, daher $\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{D}{d}\cos\frac{\delta}{2}$

$(a - b) : c = \sin\frac{\delta}{2} : \cos\frac{\gamma}{2}$, $c = \frac{D\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}$,

$a + b = \frac{cd}{D} = \frac{(a-b)\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$, oder $m = a\cos\beta$, $n = b\cos\alpha$

$m : n = a\cos\beta : b\cos\alpha = \sin\alpha\cos\beta : \cos\alpha\sin\beta$

$(m + n) : (m - n) = \sin(\alpha + \beta) : \sin(\alpha - \beta)$, $c : d = \sin\gamma : \sin\delta$

da $c = 2R\sin\gamma$, $d = 2R\sin\delta$ ist, so ist $a - b =$

$2R(\sin\alpha - \sin\beta) = \frac{d}{\sin\delta} \cdot 2\sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, somit

Digitized by Google

$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{D}{d}\cos\frac{\delta}{2}$.

$a = 7{\cdot}83918\,m$, $b = 6{\cdot}33918\,m$, $c = 11{\cdot}81529\,m$
($a = 7{\cdot}8385\,m$, $b = 6{\cdot}3385\,m$, $c = 11{\cdot}815\,m$)
$\alpha = 37^\circ 49' 8{\cdot}2''$, $\beta = 29^\circ 43' 30{\cdot}7''$, $\gamma = 112^\circ 27' 21{\cdot}1''$
($\alpha = 37^\circ 49' 3{\cdot}8''$, $\beta = 29^\circ 43' 26{\cdot}3''$, $\gamma = 112^\circ 27' 29{\cdot}9''$).
$f = 22{\cdot}96294\,m^2$ ($22{\cdot}958\,m^2$).

70) Die Winkelhalbierende teilt die gegenüberliegende Seite c im Verhältnisse der beiden dem Winkel γ anliegenden Seiten, somit, wenn b an p und a an q liegt

$p : q = b : a$, daher

$(a + b) : (a - b) = (q + p) : (q - p)$ und

$(a + b) : (a - b) = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$,

$(q + p) : (q - p) = \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$,

woraus $\alpha - \beta$ bestimmt werden kann. Da $c = p + q$ und $\alpha + \beta = 180 - \gamma$ ist, so hat man dann c, α, β.

Oder $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, $a : b = q : p$, $b = \frac{ap}{q}$

$c^2 = a^2 + \frac{a^2p^2}{q^2} - \frac{2a^2p}{q}\cos\gamma$, wo nur a unbekannt ist.

$a = 78\,mm$, $b = 30\,mm$; $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 22^\circ 37' 10''$.

71) $h_b^2 = a^2 - n^2 = (a + n)(a - n) = 3(a + n)$, somit

$a - n = 3$, $a + n = {}^{25}/_{3}$, $a = 5{}^{2}/_{3}\,m$, $n = 2{}^{2}/_{3}\,m$,

$bh = 2f$, $b = \frac{2f}{h} = 6$, $c = \sqrt{h^2 + (b-n)^2} =$

${}^{5}/_{3}\sqrt{13} = 6{\cdot}00925\,m$.

$h_b = a\sin\gamma$, $\sin\gamma = {}^{15}/_{17}$, $\gamma = 61^\circ 55' 39{\cdot}05''$ ($61^\circ 55' 40''$).

$\sin\alpha = \frac{a\sin\gamma}{c}$, $\sin\beta = \frac{b\sin\gamma}{c}$, $R = \frac{c}{2\sin\gamma}$, $r = \frac{2f}{a+b+c}$.

$\alpha = 56^\circ 18' 35{\cdot}77''$, $\beta = 61^\circ 45' 45{\cdot}18''$ ($56^\circ 18' 35''$, $61^\circ 45' 45''$)
$R = 3{\cdot}40525\,m$, $r = 1{\cdot}69722\,m$.

72) Ist die Projektion von a auf c $BD = 12\,m$ und die Projektion von c auf a $BE = 9\,m$, so ist $BD = a\cos\beta$ und $BE = c\cos\beta$, daher $a : c = 12 : 9 = 4 : 3$, $c = \frac{3a}{4}$.

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$, setzt man darin $c = \frac{3a}{4}$ und $c\cos\beta = 9$, so $45^2 = a^2 + \frac{9a^2}{16} - 18a$, $a = 42{\cdot}2179\,m$, da nur der positive Wurzelwert brauchbar ist; $c = \frac{3a}{4} = 31{\cdot}6634\,m$,

Digitized by Google

womit alle drei Seiten bekannt sind. Bestimmt man β aus $c \cos \beta = 9$ und wendet dann die Sinusformel an, so ergeben sich folgende Werte:

$\alpha = 64^\circ 5' 23{\cdot}4''$, $\beta = 73^\circ 29' 11{\cdot}1''$, $\gamma = 42^\circ 25' 25{\cdot}5''$
($\alpha = 64^\circ 5' 23''$, $\beta = 73^\circ 29' 13''$, $\gamma = 42^\circ 25' 25''$).

Nach der Tangentenformel aber erhält man

$\alpha = 64^\circ 5' 22{\cdot}7''$, $\beta = 73^\circ 29' 11{\cdot}6''$, $\gamma = 42^\circ 25' 25{\cdot}7''$
($\alpha = 64^\circ 5' 23''$, $\beta = 73^\circ 29' 11''$, $\gamma = 42^\circ 25' 26''$).

$f = 640{\cdot}8125\ m^2$ ($640{\cdot}81\ m^2$).

73) Die vom Fußpunkte der Basishöhe auf a und c gefällten Senkrechten teilen a und c in die Stücke x, $a - x$; y, $b - y$, daher $3^2 = x(a - x)$, $2^2 = y(c - y)$, und da $x = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$, $y = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$ ist, so ist $a = 6{\cdot}25\ m$ und $c = \frac{4}{\sqrt{21}} + \sqrt{21} = {}^{25}/_{21}\sqrt{21} = 5{\cdot}4554473\ m$,

$b = b_1 + b_2 = a \sin \beta_1 + c \sin \beta_2$, wo $\beta_1 + \beta_2 = \beta$; $3 = 5 \sin \beta_1$, $2 = 5 \sin \beta_2$,

$b = \frac{3a}{5} + \frac{2c}{5} = 5{\cdot}9321789\ m$, $f = \frac{5b}{2} = 14{\cdot}830447\ m^2$.

Nach tang $\frac{\alpha}{2}$ ergeben sich für die Winkel

$\alpha = 66^\circ 25' 18{\cdot}55''$, $\beta = 60^\circ 26' 53{\cdot}09''$, $\gamma = 53^\circ 7' 48{\cdot}36''$
($\alpha = 66^\circ 25' 20''$, $\beta = 60^\circ 26' 52''$, $\gamma = 53^\circ 7' 47''$).

74) Bezeichnet man das der Seite c anliegende Stück der Basis mit p, so ist $p = c \cos \alpha$ und

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - 2bp$, $a^2 - c^2 = b^2 - 2bp$,

$(a + c)(a - c) = b^2 - 2bp$, $a - c = \frac{b^2 - 2bp}{s}$.

Diese Gleichung und $a + c = s$ ergeben

$a = \frac{s^2 + b^2 - 2bp}{2s}$, $c = \frac{s^2 - b^2 + 2bp}{2s}$;

$a = 3{\cdot}71852$, $c = 2{\cdot}97108$;

$\alpha = 47^\circ 41' 20{\cdot}7''$, $\beta = 96^\circ 5' 34{\cdot}4''$, $\gamma = 36^\circ 13' 4{\cdot}9''$;

$f = 5{\cdot}49281\ m^2$ ($47^\circ 41' 20''$, $96^\circ 5' 35''$, $36^\circ 13' 5''$, $5{\cdot}4928$).

Winkelhalbierende Transversalen.

75) Da t_α den Winkel α halbiert, so hat das eine Dreieck die Winkel $\frac{\alpha}{2}$, γ, $\left(180 - \frac{\alpha}{2} - \gamma\right)$, das andere $\frac{\alpha}{2}$, β, $\left(180 - \frac{\alpha}{2} - \beta\right)$ und beide Dreiecke haben die Seite t_α.

$a = 60{\cdot}5633$, $b = 97{\cdot}8523$, $c = 62{\cdot}6360$, $f = 1830{\cdot}73\ dm^2$
($a = 60{\cdot}564$, $b = 97{\cdot}854$, $c = 62{\cdot}637$, $f = 1830{\cdot}8\ dm^2$).

Digitized by Google

76) Berechnet man (etwa mit der Tangentenformel) die Winkel
$\alpha = 78^\circ 27' 47''$, $\beta = 57^\circ 7' 18''$, $\gamma = 44^\circ 24' 55''$
$(\alpha = 78^\circ 27' 48''$, $\beta = 57^\circ 7' 18''$, $\gamma = 44^\circ 24' 54'')$
$t : a = \sin\gamma : \sin\mu$, wo $\mu = 180 - \gamma - \frac{\beta}{2}$.
$t = 10{\cdot}24695\ m$ $(10{\cdot}247\ m)$.

77) Da zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bekannt sind, so kann man die Tangentenformel anwenden.
$(a + t) : (a - t) = \text{tang}\,\frac{\mu+\gamma}{2} : \text{tang}\,\frac{\mu-\gamma}{2}$, wo μ den Winkel bedeutet, welcher der Seite a in dem einen Dreiecke gegenüberliegt. Da $\frac{\mu+\gamma}{2} = 90 - \frac{\beta}{4}$, also

$(a + t) : (a - t) = \text{cotg}\,\frac{\beta}{4} : \text{tang}\,\frac{\mu-\gamma}{2}$ ist, so

$$\text{tang}\,\frac{\mu-\gamma}{2} = \frac{a-t}{a+t}\,\text{cotg}\,\frac{\beta}{4}.$$ Daraus

$\gamma = 44^\circ 24' 0{\cdot}46''$ $(44^\circ 24')$.

Nun sind von dem zu bestimmenden Dreiecke eine Seite und die Winkel bekannt.
$b = 11{\cdot}9993\ m$, $c = 9{\cdot}99675\ m$, $f = 58{\cdot}7687\ m^2$
$(b = 11{\cdot}999\ m$, $c = 9{\cdot}997\ m$, $f = 58{\cdot}769\ m^2)$.

78a) $F = \frac{bc\sin\alpha}{2} = \frac{bt\sin\frac{\alpha}{2}}{2} + \frac{ct\sin\frac{\alpha}{2}}{2}$, daraus $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{bt+ct}{2bc} = {}^5/_8$.

$\alpha = 102^\circ 38' 8{\cdot}3''$ $(102^\circ 38' 7'')$.

Nun sind vom Dreiecke zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bekannt.
Man kann nun die Winkel mit dem Tangentensatze und dann die Seiten bestimmen; oder bezeichnet man die von t auf der dritten Seite gebildeten Abschnitte mit p und q, so ist $b^2 = p^2 + t^2 - 2pt\cos\mu$ und $c^2 = q^2 + t^2 + 2qt\cos\mu$. Mit Hilfe von $p : q = b : c$ geht die letztere Gleichung über in $b^2c^2 = p^2c^2 + b^2t^2 + 2pbct\cos\mu$. Dividiert man, um die Größe μ eliminieren zu können, durch bc, so erhält man $bc = \frac{p^2c}{b} + \frac{bt^2}{c} + 2pt\cos\mu$, welche mit $b^2 = p^2 + t^2 - 2pt\cos\mu$ durch Addition $b = \frac{p^2}{b} + \frac{t^2}{c}$ oder $p^2 = \frac{b}{c}(bc - t^2)$ und daher auch $q^2 = \frac{c}{b}(bc - t^2)$ ergibt.
$a = 7{\cdot}9057\ cm$, $f = 11{\cdot}70945\ cm^2$ $(11{\cdot}709\ cm^2)$.
$\beta = 29^\circ 35' 5{\cdot}1''$, $\gamma = 47^\circ 46' 46{\cdot}6''$ $(29^\circ 35' 6''$, $47^\circ 46' 47'')$.

Digitized by Google

78*b*) p liege der Seite b und q der Seite a an, und die Symmetrale bilde mit c den Winkel φ. Es ist

$a^2 = t^2 + q^2 + 2qt\cos\varphi$, $b^2 = t^2 + p^2 - 2pt\cos\varphi$ und

(siehe Aufg. 70) $\frac{b}{a} = \frac{p}{q}$, daher $\frac{b^2}{a^2} = \frac{p^2}{q^2} = \frac{t^2+p^2-2pt\cos\varphi}{t^2+q^2+2qt\cos\varphi}$.

daraus $\cos\varphi = \frac{t(q-p)}{2pq}$; $\varphi = 82^0\,52'\,30''$;

daher $b^2 = t^2 + p^2 - 2pt\,.\,\frac{t(q-p)}{2pq} = \frac{qp^2+pt^2}{q}$ und

$b = \sqrt{\frac{p}{q}(pq+t^2)}$, $a = \frac{bq}{p}$,

somit $b = 169$, $a = 195$, $c = 182$,

$\beta = 53^0\,7'\,48{\cdot}3''$, $\alpha = 67^0\,22'\,48{\cdot}5''$, $\gamma = 59^0\,29'\,23{\cdot}2''$.

Seitenhalbierende Transversalen.

79) T_a bilde mit a die Winkel x und $180 - x$, so ist $c^2 = m^2 + T^2 - 2mT\cos x$, $b^2 = m^2 + T^2 + 2mT\cos x$, wo $m = \frac{a}{2}$. Daraus $b^2 + c^2 = 2m^2 + 2T^2$ und

$$a = \sqrt{2(b^2 + c^2 - 2T^2)} = 40{\cdot}000547\,m.$$

Somit sind jetzt alle drei Seiten des Dreieckes bekannt.

$\alpha = 112^0\,37'\,20''$, $\beta = 36^0\,52'\,7''$, $\gamma = 30^0\,30'\,33''$

($112^0\,37'\,12''$, $36^0\,52'\,11''$, $30^0\,30'\,37''$ für $a = 40$)

$f = 264\,m^2$.

Bezüglich der Konstruktion beachte man, daß durch b, c und $2T$ ein Dreieck bestimmt ist. Aus diesem Dreiecke kann man auch den der Seite $2T$ gegenüberliegenden Winkel φ berechnen, und dann ist $< (b, c) = 180 - \varphi$.

80) T_b bilde mit a den Winkel μ, so ist, wenn man $\frac{b}{2} = p$ setzt:

$$(T+p) : (T-p) = \operatorname{tg}\tfrac{\gamma+\mu}{2} : \operatorname{tg}\tfrac{\gamma-\mu}{2},\quad \operatorname{tg}\tfrac{\gamma-\mu}{2} = \tfrac{0{\cdot}5}{5{\cdot}5}\operatorname{tg}\tfrac{\gamma+\mu}{2}$$

$$\gamma = 41^0\,50'\,23{\cdot}9''\ (41^0\,50'\,24'').$$

Nun kann man a mit dem Sinussatze bestimmen oder man hätte a zuerst bestimmen können, $a = \sqrt{T^2 + x^2 - 2xT\cos\gamma} = 4{\cdot}3563\,m$ und ebenso c.

$c = 3{\cdot}3945\,m$; $\alpha = 58^0\,52'\,39{\cdot}2''$ ($58^0\,52'\,39{\cdot}5''$),

$\beta = 79^0\,16'\,56{\cdot}9''$ ($79^0\,16'\,56{\cdot}5''$), $f = 7{\cdot}264735\,m^2$ ($7{\cdot}2647\,m^2$).

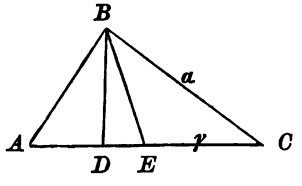
Digitized by Google

81) Die beiden Schwerlinien zerteilen das gegebene Dreieck in drei kleinere Dreiecke und in ein Viereck. Von den Dreiecken sind immer zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bekannt, dann schneiden sich T_b und T_c im Punkte D und ist E beziehungsweise F der Fußpunkt von T_b, T_c, so ist $BD = {}^2/_3\, T_b$, $DE = {}^1/_3\, T_b$, $CD = {}^2/_3\, T_c$, $DF = {}^1/_3\, T_c$.

$a = 14{\cdot}2865\,m$, $b = 17{\cdot}6665\,m$, $c = 15{\cdot}4903\,m$;
$\alpha = 50^0\,31'\,31{\cdot}6''$ $\beta = 72^0\,39'\,19{\cdot}3''$, $\gamma = 56^0\,49'\,9{\cdot}1''$;
$f = 105{\cdot}61922\,m^2$
$(50^0\,31'\,32''$, $72^0\,39'\,19''$, $56^0\,49'\,9''$, $105{\cdot}62)$.

82) Setzt man $\delta = 16^0\,15'\,36{\cdot}73''$, so ist $h = T\cos\delta = (h+1)\cos\delta$,

Fig. 16.



daraus $h = \dfrac{\cos\delta}{1-\cos\delta} = \dfrac{\cos\delta}{2\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$

$h = a\sin\gamma$, $a = \dfrac{h}{\sin\gamma} = \dfrac{\cos\delta}{2\sin\gamma\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$

$\measuredangle\, BED = 90 - \delta = 45 - \frac{\delta}{2} + \measuredangle\, EBC$, daher ist

$\measuredangle\, EBC = 45^0 - \frac{\delta}{2}$ und das Dreieck BEC ist gleichschenklig, da ferner $AE = EC = BE$ ist, so ist das Dreieck ABC bei B rechtwinklig.

$a = 40\,m$, $b = 30\,m$, $c = 50\,m$;
$\alpha = 53^0\,7'\,48{\cdot}36''$, $\beta = 90^0$, $\gamma = 36^0\,52'\,11{\cdot}64''$;
$f = 600\,m^2$.

83) Die Gerade vom Punkte zum Scheitel teile den Winkel α in m und n, die Abstände des Punktes von den Schenkeln seien x und y, so ist $x = a\sin m$, $y = a\sin n$, $b = x + y = a(\sin m + \sin n) = 2a\sin\frac{m+n}{2}\cos\frac{m-n}{2}$, daher $\cos\frac{m-n}{2} = \dfrac{b}{2a\sin\frac{\alpha}{2}}$. Aus $m + n = \alpha$ und $m - n = 2\arccos\left(\dfrac{b}{2a\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$ folgt

$m = \frac{\alpha}{2} + \arccos\left(\dfrac{b}{2a\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$ und $n = \frac{\alpha}{2} - \arccos\left(\dfrac{b}{2a\sin\frac{\alpha}{2}}\right)$,

speziell $m = 69^0\,36'\,48{\cdot}96''$, $n = 90^0 - m$; $(69^0\,36'\,50'')$.

84) Der Durchmesser sei AB, die Verlängerung BC; verbindet man nun den Endpunkt der Sekante CE $(= CD + DE)$ mit dem

Digitized by Google

Mittelpunkte des Kreises, so ist $OE^2 = OC^2 + CE^2 - 2.OC.CE.\cos\alpha$.

Da $OB = 4$, $BC = 1$ ist, so ist $CE.DC = (2.4 + 1).1 = 9$ und wegen $CE = 3CD$, $3CD^2 = 9$, $CD = \sqrt{3}$, $CE = 3\sqrt{3}$, somit

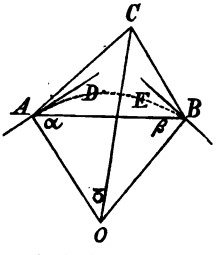
$$\cos\alpha = \frac{5^2 + (3\sqrt{3})^2 - 4^2}{2.5.3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}, \quad \alpha = 46°8'46{\cdot}37 \ (46°8'45'').$$

85) Der erste Donner kommt vom Anfangspunkte des Blitzes, also nach $a = 17$ Sekunden, der letzte Donner vom Endpunkte, also nach $a + b = (17 + 2^1/_3)$ Sekunden bis zum Beobachter, daher sind zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben.

$$x = 333\sqrt{a^2 + (a+b)^2 - 2a(a+b)\cos\alpha}$$
$$x = 333\sqrt{17^2 + (^{58}/_3)^2 - 34.{}^{58}/_3\cos\alpha} = 4551\ m.$$

86) Da B die Breite $37°14'$, A die Breite $9°$ hat, so hat der Bogen AB $37°14' - 9° = 28°14'$ im Bogenmaße und der zugehörige Centriwinkel δ $28°14'$ im Winkelmaße.

Fig. 17.



Da $\alpha = \beta = \frac{180 - \delta}{2}$ ist, so ist $< DAB =$

$< EBA = 90 - \frac{180 - \delta}{2} = 14°7'$ und

$< CAB = 14°7' + 9°37' = 23°44'$

$< CBA = 14°7' + 13°12' = 27°19'$ und

$< ACB = 128°57'$.

Bestimmt man nun AB, so sind die Daten für die Berechnung von BC oder AC und dadurch auch für die Berechnung von OC gegeben.

$AB : AO = \sin\delta : \sin\alpha$, $AB = \frac{r\sin\delta}{\sin\alpha}$.

$AB : BC = \sin < ACB : \sin < BAC$.

$BC = \frac{r.\sin\delta.\sin < BAC}{\sin\alpha\sin < ACB} = 0{\cdot}252448\,r \ (0{\cdot}25245r)$.

$< OBC = 75°53' + 27°19' = 103°12'$, daher

$CO = \sqrt{r^2 + BC^2 - 2r.BC\cos < OBC} = 1{\cdot}08583\,r\,(1{\cdot}08583r)$

und $CO - r = 0{\cdot}08583r$.

Nimmt man den Erdradius mit $859{\cdot}5$ geographischen Meilen an, so beträgt die Entfernung von der Erdoberfläche $73{\cdot}77$ Meilen.

Oder $< A = 103°12'$, $< B = 99°37'$, $< O = 28°14'$, daher ist $< C = \gamma_1 + \gamma_2 = 128°57'$

$OC : OA = \sin A : \sin\gamma_1$, $OC : OB = \sin B : \sin\gamma_2$

Digitized by Google

und da $OA = OB$, so $\sin A : \sin B = \sin \gamma_1 : \sin \gamma_2$
$(\sin A + \sin B) : (\sin A - \sin B) = (\sin \gamma_1 + \sin \gamma_2) : (\sin \gamma_1 - \sin \gamma_2)$,

daraus $\operatorname{tg} \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$

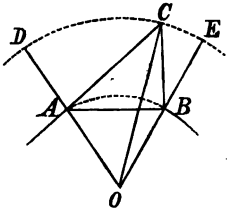
$= \frac{\operatorname{tg} 1^0 47' 30''}{\operatorname{tg} 101^0 24' 30''} \operatorname{tg} 64^0 28' 30''$ und

$\operatorname{tg} \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} = \frac{\operatorname{tg} 1^0 47' 30''}{\operatorname{tg} 78^0 35' 30''} \operatorname{tg} 64^0 28' 30''$; $\frac{\gamma_2 - \gamma_1}{2} = 0^0 45' 26 \cdot 4''$

$\gamma_2 = 65^0 13' 56 \cdot 4''$; $OC : r = \sin B : \sin \gamma_2$, $OC = 1 \cdot 08583 r$.

87) $< AOB = 30^0 40'$, $< DAC = \alpha = 82^0 24' 10''$
$< EBC = \beta = 36^0 18'$,

Fig. 18.



Da $< OAB = < OBA = 90^0 - \frac{< OAB}{2} = 74^0 40'$
ist, so ist
$< CAB = 180^0 - \alpha - 74^0 40' = 22^0 55' 50''$ und
$< CBA = 69^0 2'$, $< ACB = 88^0 2' 10''$.

Nun ist wieder AB, dann BC oder AC zu bestimmen.

$AB : AO = \sin 30^0 40' : \sin 74^0 40'$, $AB = \frac{r \sin 30^0 40'}{\sin 74^0 40'}$

$AB : AC = \sin 88^0 2' 10'' : \sin 69^0 2'$

$AC = \frac{r \sin 30^0 40' \sin 69^0 2'}{\sin 74^0 40' \sin 88^0 2' 10''} = 424 \cdot 7146$ (424·73) geogr. Meilen

$OC = \sqrt{r^2 + AC^2 - 2r\, AC \cos < OAC} = 1007 \cdot 74$ (1007·8) geogr. Meilen vom Erdmittelpunkte, oder 148·24 (148·3) geogr. Meilen über der Erdoberfläche.

Oder $OC : OA = \sin \alpha : \sin \gamma_1$, $OC : OB = \sin \beta : \sin \gamma_2$
da $OA = OB$, so

$$\sin \alpha : \sin \beta = \sin \gamma_1 : \sin \gamma_2,$$

$(\sin \alpha + \sin \beta) : (\sin \alpha - \sin \beta) = (\sin \gamma_1 + \sin \gamma_2) : (\sin \gamma_1 - \sin \gamma_2)$ und daraus

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}} \operatorname{tg} \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$$

speziell ergibt sich $\frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} = 13^0 41' 35 \cdot 5''$

$\frac{1}{2} < ACB = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} = 44^0 1' 5''$

somit $\gamma_1 = 57^0 42' 40 \cdot 5''$ und

$OC = \frac{r \sin 82^0 24' 10''}{\sin 57^0 42' 40''} = 1007 \cdot 8$ Meilen.

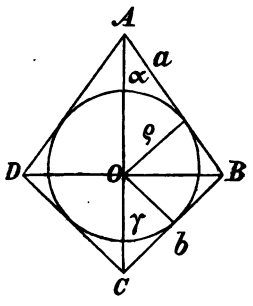
Digitized by Google

§ 21. Viereck.

1) $OA = \frac{\varrho}{\sin\alpha}$, $OC = \frac{\varrho}{\sin\gamma}$

$$AC = \varrho\,\frac{\sin\alpha + \sin\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma} = \frac{2\varrho\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin\alpha\sin\gamma}.$$

Fig. 19.



$a : AC = \sin\gamma : \sin(\alpha+\gamma)$;
$b : AC = \sin\alpha : \sin(\alpha+\gamma)$.

$$a = \frac{\varrho\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin\alpha\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}},\quad b = \frac{\varrho\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\sin\gamma\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}.$$

$$BD = 2.OB = 2a\sin\alpha = \frac{2\varrho\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}.$$

$$F = a.b.\sin(\alpha+\gamma) = \frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}\left(\frac{\varrho\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}\right)^2.$$

2) $(a-b) : d = \sin\frac{\alpha-\beta}{2} : \cos\frac{\delta}{2}$, wenn α, β, δ die Winkel des Dreieckes bedeuten, welches die Seiten a, b, d hat.
$\alpha = 71^\circ\,43'\,59{\cdot}35''$, $\beta = 43^\circ\,46'\,0{\cdot}65''$ ($71^\circ\,43'\,59''$, $43^\circ\,46'\,1''$).
$F = ab\sin\delta$, $a = 14{\cdot}73$, $b = 10{\cdot}73$; $F = 142{\cdot}64\ m^2$.
Oder bedeutet h die Höhe des Dreieckes auf d, so ist
$F = 2\frac{dh}{2} = dh$, $h = b\sin\alpha$ und $b : d = \sin\beta : \sin\delta$, daher
$h = \frac{d\sin\alpha\sin\beta}{\sin\delta}$ und
$F = \frac{d^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin\delta} = 142{\cdot}6435\ m^2$ ($142{\cdot}64\ m^2$).

3) Der halbe Unterschied der parallelen Seiten ist $\sqrt{49-36} = \sqrt{13}$, somit ist die kürzere parallele Seite $12 - 2\sqrt{13} = 4{\cdot}7888976\ m$.
$f = 50{\cdot}3666928\ m^2$, $d = \sqrt{6^2 + (12-\sqrt{13})^2} = 10{\cdot}31828\ m$.
$\alpha = 58^\circ\,59'\,50{\cdot}3''$ ($58^\circ\,59'\,50''$), $\gamma = 121^\circ\,0'\,9{\cdot}7''$ ($121^\circ\,0'\,10''$).

4) Von jedem der vier Dreiecke sind zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel bekannt, $a = 2.12\sin\frac{\gamma}{2}$, $b = 2.8\sin\frac{\gamma}{2}$.
Die parallelen Seiten sind: $22{\cdot}2219\ m$, $14{\cdot}8146\ m$ ($22{\cdot}222$, $14{\cdot}815$);
jede der nicht parallelen $8{\cdot}4138$ ($8{\cdot}4137$) m;
$f = 139{\cdot}9019\ m^2$ ($139{\cdot}91$); $\alpha = 63^\circ\,53''\,4{\cdot}33''$,
$\gamma = 116^\circ\,6'\,55{\cdot}67''$ ($63^\circ\,53'\,10''$, $116^\circ\,6'\,50''$),

Digitized by Google

5) $a - b = 3 \cdot 45$, $a^2 + b^2 = 96 \cdot 4025$, $a : c = c : b$.
$a = 8 \cdot 45\ m$, $b = 5\ m$, $c = 6 \cdot 5\ m$.
$h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = 6 \cdot 266927\ m$, $f = 42 \cdot 1451\ m^2$,
$d = 9 \cdot 1924\ m$, $74^0\,36'\,36 \cdot 72''$ $(74^0\,36'\,36'')$.

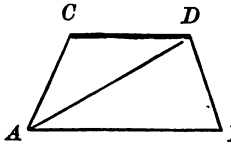
6) $\frac{a+b}{2} . h = 13 \cdot 5$, $a^2 + b^2 = 41$, $\frac{a-b}{2} . h = 1 \cdot 5$
$a = 5\ m$, $b = 4\ m$, $c = 3 \cdot 04138\ m$; $80^0\,32'\,15 \cdot 8''$ $(80^0\,32'\,15 \cdot 4'')$.

7) Da $\frac{a-b}{2} = c \cos \gamma$ ist, so ist
$c = \frac{a-b}{2 \cos \gamma}$ und $d = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \gamma} =$
$$\sqrt{a^2 + \left(\frac{a-b}{2 \cos \gamma}\right)^2 - 2a \frac{a-b}{2 \cos \gamma} . \cos \gamma}$$
$d = \frac{a-b}{2 \cos \gamma} \sqrt{1 + \frac{4ab \cos^2 \gamma}{(a-b)^2}}$, setzt man $\frac{4ab \cos^2 \gamma}{(a-b)^2} = \operatorname{tang}^2 \varphi$,
so ist
$d = \frac{a-b}{2 \cos \gamma \cos \varphi}$; $\operatorname{tang} \varphi = \frac{2 \cos \gamma}{a-b} \sqrt{ab}$.
$\varphi = 80^0\,36'\,59''$ $(80^0\,36'\,59'')$, $d = 104 \cdot 1313\ m$ $(104 \cdot 13\ m)$.

8) $f = 17094 \cdot 02\ dm^2$ $(17094\ dm^2)$.

9) $AB = 4 \cdot 832\ m$, $< BAC = 40^0\,45'\,7''$, $< ABD = 66^0\,21'\,7''$,
$< BAD = 25^0\,24'\,42''$.

Fig. 20.



Daraus folgt $< ADB = 88^0\,14'\,11''$ und
$AB : BD = \sin 88^0\,14'\,11'' : \sin 25^0\,24'\,42''$
$BD = \frac{AB . \sin 25^0 24' 42''}{\sin 88^0\,14'\,11''} = 2 \cdot 074486 m$ $(2 \cdot 0745 m)$.
$AD = \frac{AB \sin < ABD}{\sin < ADB}$, $CD = \frac{AD \sin < CAD}{\sin < ACD} =$
$\frac{AB \sin < ABD \sin < CAD}{\sin < ACD . \sin < ADB}$.
$CD = 1 \cdot 79465\ m$ $(1 \cdot 7947\ m)$.
$AC = \frac{AB \sin < ABD \sin < ADC}{\sin < ACD . \sin < ADB} = 2 \cdot 91104\ m$ $(2 \cdot 9111\ m)$.

10) $f = (a + b) \frac{h}{2}$, $b = a - h \operatorname{cotg} \alpha - h \operatorname{cotg} \beta = a - h \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$
und da $\alpha + \beta = 90^0$, so $b = a - \frac{h}{\sin \alpha \sin \beta}$.
$f = 10700 \cdot 95\ m^2$ $(10701\ m^2)$.

11) $AB = 100\ m$, $BD = 60\ m$, $AD = 80\ m$, $AC + CD = 120\ m$.
Da $60^2 + 80^2 = 100^2$ ist, so ist das Dreieck ADB recht-

Digitized by Google

winklig, $< ADB = 90^0$ und $80 = 100 \sin B$, $\sin B = {}^4/_5$, $< B = 53^0\,7'\,48{\cdot}36''$ $(53^0\,7'\,50'')$,
$h = 60 \,.\, \sin B = 60 \,.\, {}^4/_5 = 48$
$\cos \frac{< ADC}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s - AC)}{80 \,.\, CD}}$, wo $2s = AC + CD + AD = 120 + 80 = 200$ ist.

Da $CD = 120 - AC$, so $\cos^2 \frac{< ADC}{2} = \frac{100\,(100 - AC)}{80\,(120 - AC)} = \cos^2 18^0\,26'\,5{\cdot}82'' = 0{\cdot}9$
$AC = 48{\cdot}57143\ m$, $CD = 71{\cdot}42857\ m$.
$f = 4114{\cdot}286\ m^2$.

12) $AB = 10\ dm$, $CD = 4\ dm$, $h = 6\ dm$.

Sei die parallele Gerade x, so
$\frac{10+x}{2} h_1 = \frac{x+4}{2}(6 - h_1)$. Wegen $\frac{10+x}{2} h_1 = 21$ ist
$h_1 = \frac{42}{10+x}$, daher gibt die Gleichung $\frac{x+4}{2}(6 - h_1) = 21$,
$x^2 = 58$, $x = 7{\cdot}6157731\ dm$. Die dem gegebenen spitzen Winkel anliegende Seite ist $s = 6{\cdot}4519\ dm$, die andere Seite
$s_1 = \sqrt{(10-4)^2 + s^2 - 2.6.s \cos 68^0\,25'\,40''} = 7{\cdot}0115\,dm$ lang.

13) Ist μ der der Sehne c entsprechende Zentriwinkel, so ist auch μ der Winkel, welchen die beiden Diagonalen des Trapezes miteinander bilden, und $f = \frac{d^2 \sin \mu}{2} = \frac{r^2 \pi}{n}$; da $\frac{c}{2} = r \sin \frac{\mu}{2}$ ist, so ist $\cos \frac{\mu}{2} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{4r^2}}$, $\sin \mu = 2 \sin \frac{\mu}{2} \cos \frac{\mu}{2} = \frac{c}{2r^2}\sqrt{4r^2 - c^2}$ und $\frac{d^2 c}{4r^2}\sqrt{4r^2 - c^2} = \frac{r^2 \pi}{n}$, daraus $d = \sqrt{\frac{4r^4 \pi}{nc\sqrt{4r^2 - c^2}}}$. Die Aufgabe ist nur möglich, wenn $d < 2r$ oder $2r > \sqrt{\frac{4r^4 \pi}{nc\sqrt{4r^2 - c^2}}}$ oder aber $nc\sqrt{4r^2 - c^2} > r^2 \pi$ ist.
$d = 13{\cdot}09152\ m$ $(13{\cdot}0915\ m)$.

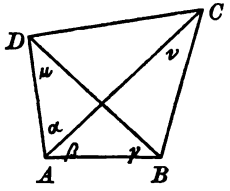
Ist h der Abstand der beiden parallelen Seiten des Trapezes, so ist $h = d \sin \frac{\mu}{2} = \frac{dc}{2r} = 5{\cdot}23661\ m$ $(5{\cdot}2366\ m)$.

Ist α der der Sehne c anliegende spitze Winkel, so $h = c \sin \alpha$ und $\sin \alpha = \frac{h}{c} = \frac{d}{2r}$, $\alpha = 40^0\,53'\,15{\cdot}1''$ $(40^0\,53'\,15'')$.

Die beiden parallelen Seiten sind $18{\cdot}04655\ m$ $(18{\cdot}0466\ m)$ und $5{\cdot}95061\ m$ $(5{\cdot}9506\ m)$.

Digitized by Google

Fig. 21.



14) a, α, β, γ, δ sind gegeben, gesucht ist CD.

$\mu = 180^0 - (\alpha + \beta + \gamma), \nu = 180^0 - (\beta + \gamma + \delta)$

$a : AD = \sin\mu : \sin\gamma$, $a : AC = \sin\nu : \sin(\gamma + \delta)$

$$AD = \frac{a \sin\gamma}{\sin\mu}, \quad AC = \frac{a \sin(\gamma+\delta)}{\sin\nu}.$$

$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC.AD \cos\alpha =$
$(AC - AD)^2 + 2AC.AD(1 - \cos\alpha) =$

$$(AC - AD)^2 \left[1 + \frac{4\,AC\,AD \sin^2\frac{\alpha}{2}}{(AC-AD)^2}\right]$$

$$CD = \frac{AC - AD}{\cos\varphi}, \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{2\sqrt{AC.AD}\sin\frac{\alpha}{2}}{AC - AD}.$$

$AC = 595{\cdot}2443\ m$ (595·25 m), $AD = 393{\cdot}0735\ m$ (393·07 m)
$\varphi = 67^0\,24'\,41{\cdot}8''$ (67° 24′ 40″)
$CD = 526{\cdot}338\ m$ (526·35 m).

15) $AB = 3{\cdot}468\,m$, $BC = 3{\cdot}572\,m$, $CD = 3{\cdot}632\,m$, $DA = 3{\cdot}751\,m$
$< ABC = 89^0\,15'\,80'' = \beta$.

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos\beta} =$$
$4{\cdot}946384\ m$ (4·9464 m).

Nun sind von dem einen Dreiecke ABC die Seiten und ein Winkel, von dem andern Dreiecke ACD die Seiten bekannt, daher kann man bei dem ersten nach dem Sinussatze, bei dem zweiten nach der Formel für $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$ vorgehen, um die Winkel zu bestimmen.

$< A = 93^0\,8'\,47''$; $< C = 93^0\,28'\,44''$;
$< D = 84^0\,6'\,49''$ (93° 8′ 46″, 93° 28′ 44″, 84° 6′ 50″);
$f = 12{\cdot}96918$ (12·969) m^2.

16) Bezeichnet man die Seiten der Reihe nach mit a, b, c, d und den Winkel, den c und d miteinander bilden, mit φ, so hat man $D^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 80^0 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\varphi$, woraus φ bestimmt werden kann.

$$f = \frac{ab\sin 80^0}{2} + \frac{cd\sin\varphi}{2} = 38241{\cdot}92\ m\ (38242).$$

17) Setzt man $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, so ist $a : b : c : d = 9 : 8 : 7 : 6$, $f = 225\ cm^2$ und $< A = 72^0\,36'\,18'' = \alpha$ gegeben.

Bezeichnet man die Diagonale BD mit D und setzt
$a + d + D = 2s$, $b + c + D = 2S$, so ist
$\sqrt{s(s-a)(s-d)(s-D)} + \sqrt{S(S-b)(S-c)S-D)} = 225.$

Digitized by Google

Aus der Proportion folgt $b = \frac{8a}{9}$, $c = \frac{7a}{9}$, $d = \frac{6a}{9}$ und wegen

$D = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos A} = \frac{a}{9}\sqrt{117 - 108\cos A} = a.1{\cdot}026$

ist dann $s = \frac{12{\cdot}102\,a}{9}$, $S = \frac{12{\cdot}102}{9}a$

$s - a = \frac{3{\cdot}102}{9}a$, $S - b = \frac{4{\cdot}102}{9}a$

$s - d = \frac{6{\cdot}102}{9}a$, $S - c = \frac{5{\cdot}102}{9}a$

$s - D = \frac{2{\cdot}898}{9}a$, $S - D = \frac{2{\cdot}898}{9}a$ und

$\frac{a^2}{81}\left[\sqrt{12{\cdot}102\,.\,3{\cdot}102\,.\,6{\cdot}102\,.\,2{\cdot}898} + \sqrt{12{\cdot}102\,.\,4{\cdot}102\,.\,5{\cdot}102\,.\,2{\cdot}898}\right] = 225$

und $a = 18{\cdot}56864$ $(18{\cdot}569)$, $b = 16{\cdot}50546$ $(16{\cdot}506)$,

$c = 14{\cdot}44227$ $(14{\cdot}442)$, $d = 12{\cdot}37909$ $(12{\cdot}379)$.

Oder wegen $D^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 - 2bc\cos\varphi$

$117 - 108\cos\alpha = 113 - 112\cos\varphi$, daher $\cos\varphi = \frac{27\cos\alpha - 1}{28}$

$\varphi = 75^0 22' 15''$ und $f = \frac{ad\sin\alpha}{2} + \frac{bc\sin\varphi}{2}$, daher

$a^2 = \frac{81f}{27\sin\alpha + 28\sin\varphi}$; $a = 9\,.\,2{\cdot}06318$.

18) Aus $a : b : c : d = 2 : 3 : 5 : 4$ und $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 486$ folgt $a = 6\,m$, $b = 9\,m$, $c = 15\,m$, $d = 12\,m$.

$< ABC = 105^0$, $AC = D = \sqrt{117 - 108^0\cos 105^0} = \sqrt{117 + 108\sin 15^0} = 12{\cdot}0396$.

Von den beiden Dreiecken sind nun alle Seiten bekannt.

$< (b, c) = 80^0\,3'\,1{\cdot}3''$, $< (c, d) = 51^0\,30'\,42{\cdot}3''$;

$< (d, a) = 123^0\,26'\,16{\cdot}4''$ $(80^0\,3'\,1''$, $51^0\,30'\,43''$, $123^0\,26'\,16'')$;

$f = 96{\cdot}5264$ $(96{\cdot}527)\,m^2$.

Aus $a^2 + b^2 - 2ab\cos 105 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(c, d)$ folgt auch $\cos(c, d) = \frac{7 - 3\sin 15^0}{10}$ und $< (c, d) = 51^0 30' 43''$; daher sind von den Dreiecken je zwei Seiten und die eingeschlossenen Winkel bekannt.

19) Die Teile der Peripherie sind $\frac{r\pi}{5}$, $\frac{2r\pi}{5}$, $\frac{3r\pi}{5}$, $\frac{4r\pi}{5}$ oder

36^0, 72^0, 108^0, 144^0; somit, da $f = \frac{r^2\sin\alpha}{2}$

$F = \frac{r^2}{2}\left[\sin\frac{\pi}{5} + \sin\frac{2\pi}{5} + \sin\frac{3\pi}{5} + \sin\frac{4\pi}{5}\right]$.

Digitized by Google

$$\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}=2\sin\frac{3\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10};\ \sin\frac{4\pi}{5}+\sin\frac{3\pi}{5}=2\sin\frac{7\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}$$

$$F=\frac{2r^2\cos\frac{\pi}{10}}{2}\left[\sin\frac{7\pi}{10}+\sin\frac{3\pi}{10}\right]=2r^2\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}=153\cdot8842\,dm^2\ (153\cdot885\,dm^2).$$

20) $a:b=1:5$, $a:c=2:3$, $d:c=5:2$ geben die fortlaufende Proportion $a:b:c:d=4:20:6:15$, die Bogenlängen sind daher $\frac{8r\pi}{45}$, $\frac{40r\pi}{45}$, $\frac{12r\pi}{45}$, $\frac{30r\pi}{45}$ oder die entsprechenden Centriwinkel: 32°, 160°, 48°, 120°.

$F=\frac{r^2}{2}[\sin 32^0+\sin 160^0+\sin 48^0+\sin 120^0]$.

$\sin 32^0+\sin 48^0=2\sin 40^0\cos 8^0$, $\sin 160^0+\sin 120^0=2\sin 140^0\cos 20^0$ und weil $\sin 140^0=\sin 40^0$

$F=r^2\sin 40^0[\cos 8^0+\cos 20^0]=2r^2\cos 50^0\cos 14^0\cos 6^0=32\cdot69849\,m^2\ (32\cdot699\,m^2)$.

21) Die Diagonale $D=BD=\sqrt{AD^2+AB^2-2AD.AB\cos A}=1\cdot538998\,m\ (1\cdot539\,m)$.

$D=\sqrt{BC^2+CD^2-2BC.CD\cos(180-A)}$.

wegen $BC:CD=3:2$

$D=\frac{BC}{3}\sqrt{13-12\cos 50^0 19'18\cdot7''}$, daraus $BC=1\cdot99828\,m$ $(1\cdot9982\,m)$.

$CD=1\cdot33219\,m\ (1\cdot3322\,m)$, $R=1\,m$.

22) Da vom Dreiecke ABC alle drei Seiten bekannt sind, so kann man, etwa nach der Formel für $\cos\frac{\alpha}{2}$, die Winkel berechnen.

$<BAC=44^0 19'6\cdot5''=<BDC$ (als Peripheriewinkel über demselben Bogen) [44° 19']. Somit sind nun vom Dreiecke BDC eine Seite und zwei Winkel bekannt, und man erhält nach dem Sinussatze:

$$BD=\frac{BC\sin 88^0 22'21\cdot5''}{\sin 44^0 19'6\cdot5''}\left(\frac{BC\sin 88^0 22'28''}{\sin 44^0 19'}\right)$$

$BD=107\cdot3073\,m\ (107\cdot31\,m)$.

23) Sind die aufeinander folgenden Sehnen AB, BC, CD, also AD der Durchmesser, und ist β der Winkel, den AB und BC, δ der Winkel, den CD und AD miteinander bilden, so ist:

$$AC^2=AB^2+BC^2-2\,AB\,BC\cos\beta=AD^2+CD^2-2\,AD.CD\cos\delta.$$

Digitized by Google

Da $\beta = 180 - \delta$, so $\cos\beta = -\cos\delta$ und $1 + 4 + 4\cos\delta = x^2 + 9 - 6x\cos\delta$.

Da ACD ein rechtwinkliges Dreieck ist, so $3 = x\cos\delta$ und $\cos\delta = \frac{3}{x}$, dadurch geht die vorige Gleichung über in

$5 + \frac{12}{x} = x^2 + 9 - 18$, $x^3 - 14x - 12 = 0$ ($x^3 - px - q = 0$). Setzt man

$\sin 3\varphi = \frac{3q}{p\sqrt{\frac{4p}{3}}}$, so ist $\varphi = 12^0\,10'\,29{\cdot}7''$ ($12^0\,10'\,31''$) und

$x_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\sin\varphi$; $x_{2,3} = \pm 2\sqrt{\frac{p}{3}}\sin(60 \pm \varphi)$. Hier ist nur $x_2 = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\sin(60 + \varphi) = 4{\cdot}11309$ ($4{\cdot}1131$) zu brauchen ($x_1 = -0{\cdot}9112$, $x_3 = -3{\cdot}202$).

24) Aus $\frac{n(n-3)}{2} = 497502$ folgt $n = 999$, da die negative Wurzel unbrauchbar ist. Das Polygon hat 999 Seiten.

Der einer Polygons-Seite entsprechende Zentriwinkel ist $21'37{\cdot}297''$, $F = \frac{999\sin\alpha}{2} = 3{\cdot}141571$, somit ist die Differenzfläche $0{\cdot}000022$.

$$s = 2\sin\frac{\alpha}{2} = 0{\cdot}0062895.$$

Bei fünfstelligen Logarithmen ergibt sich kein Unterschied zwischen der Fläche des Polygons und der des Kreises.

25) $f_{22} = 11r^2\sin\alpha = 48{\cdot}6793$, $\alpha = 16^0\,21'\,49{\cdot}1''$.

$r = \sqrt{\frac{48{\cdot}6793}{11\sin\alpha}} = 3{\cdot}963304\,m$ ($3{\cdot}9634\,m$).

$f_7 = \frac{7r^2}{2}\sin\beta$, $\beta = 51^0\,25'\,42{\cdot}857''$.

$f_7 = 42{\cdot}982915\,m^2$ ($42{\cdot}984\,m^2$).

§ 22. Sphärische Trigonometrie.

1) a, b, c sind die Seiten und A, B, C die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel.

Sind die Abschnitte m und n (m liegt an den Winkel B und n an C) und die ihnen gegenüberliegenden Winkel μ und ν, also $a = m + n$, $< A = \mu + \nu$, so ist nach der Napierschen Regel, wenn mit h die Höhe bezeichnet wird, $\sin h = \operatorname{cotg}\mu\operatorname{tg} m$ und

Digitized by Google

$\sin h = \operatorname{cotg} \nu \,.\, \operatorname{tg} n$, daher $\frac{\operatorname{tg} m}{\operatorname{tg} n} = \frac{\operatorname{tg} \mu}{\operatorname{tg} \nu} = \frac{\operatorname{tg} \mu}{\operatorname{tg} (A - \mu)}$, woraus μ bestimmt werden kann. Dann ist $\cos \mu = \sin B \cos m$ und $\sin m = \sin \mu \sin c$, daher $\sin B = \frac{\cos \mu}{\cos m}$, $\sin c = \frac{\sin m}{\sin \mu}$ und $\sin C = \frac{\cos \nu}{\cos n}$, $\sin b = \frac{\sin n}{\sin \nu}$.

2) Das rechtwinklige Dreieck ABC wird gebildet von der Breite von New-York, vom Äquator und vom Bogen, den das Schiff beschreibt, und zwar ist $AB = c = 40^\circ 42' 40''$ (Breite von New-York), $AC = b = 76^\circ 20' 30'' - 31^\circ 39' 20'' = 44^\circ 41' 10''$ und $< BAC = 90^\circ$.

Zu bestimmen sind $a = BC$ und $< ABC$.

Nach der Napierschen Regel ist

$\cos (90 - AB) = \operatorname{cotg} < ABC \operatorname{cotg} (90 - AC)$, daher

$\operatorname{cotg} < ABC = \sin AB \operatorname{cotg} AC$ und

$\cos (90 - AC) = \sin < ABC \,.\, \sin BC$, $\sin BC = \frac{\sin AC}{\sin < ABC}$.

Oder aus

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ folgt wegen $\cos A = 0$

$\cos a = \cos b \cos c$, $a = 57^\circ 23' 23 \cdot 25''$ $(57^\circ 23' 25'')$.

Wird ein Grad zu 111·3 Kilometer angenommen, so ist

$a = 6387 \cdot 48$ (6387·5) Kilometer

und aus $\sin B : \sin b = \sin A : \sin a$ ergibt sich

$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}$, $B = 56^\circ 35' 52 \cdot 4''$ $(56^\circ 35' 52 \cdot 5'')$.

3) Bedeutet AP die Poldistanz, PN die Polhöhe und x den Winkel, den diese miteinander bilden und welcher den halben Nachtbogen mißt, so ist nach der Napierschen Regel

$\cos x = \operatorname{cotg} AP \,.\, \operatorname{tg} PN$ und $AP = 90^\circ -$ Deklination

und da die Deklination am längsten Tage $23^\circ 27' 28 \cdot 2''$ ist, so

$\cos x = \operatorname{tg} 23^\circ 27' 28 \cdot 2'' \,.\, \operatorname{tg} 48^\circ 12' 35 \cdot 5''$

$x = 60^\circ 57' 17''$; die Sonne macht in einer Stunde 15°, braucht also zu dem halben Nachtbogen von $60^\circ 57' 17''$ $4^h 3^m 50''$ oder die Sonne geht um $4^h 3^m 50''$ auf.

Für den kürzesten Tag erhält man dieselbe Formel, doch sind $4^h 3^m 50''$ von 12^h (Mittag) abzuziehen. Die Sonne geht um $7^h 56^m 10''$ auf.

4) $\cos x = \operatorname{tg} 23^\circ 27' 28 \cdot 2'' \,.\, \operatorname{tg} 42^\circ 14'$,

$\cos x_1 = \operatorname{tg} 23^\circ 27' 28 \cdot 2'' \,.\, \operatorname{tg} 51^\circ 18'$,

$x = 66^\circ 48' 2''$ $\quad x_1 = 57^\circ 12' 17''$,

Digitized by Google

somit geht die Sonne auf um

$4^h\,27^m\,12''$ $3^h\,48^m\,49''$

und der Unterschied in der halben Tageslänge beträgt $38^m 23 \cdot 1''$ sonach der Unterschied der ganzen Tageslängen $1^h\,16^m\,46''$.

5) Mit Hilfe der Gleichungen

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \text{ und } \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}$$

erhält man $\alpha = 67^\circ\,14'\,25''$, $\beta = 37^\circ\,0'\,12''$

und mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \text{ oder } \frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

erhält man $a = 50^\circ$, $b = 30^\circ$.

Oder $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b$ und $\cos c = \cos a \cos b$, daher

$\cos(a+b) = 2\cos c - \cos(a-b)$;

α und β können dann nach der Napierschen Regel gefunden werden.

6) $f = \frac{4r^2\pi}{8} = \frac{r^2\pi}{180}(A+B+C-180)$, somit für $C = 90^\circ$

$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{180}(A+B-90)$, $A+B = 180^\circ$.

Nun kann man die Napiersche Regel anwenden $\cos c = \operatorname{cotg} A \,.\, \operatorname{cotg} B = \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg}(180-A) = -\operatorname{cotg}^2 A$

$\operatorname{cotg} A = \pm\sqrt{-\cos c}$.

Da $c > 90^\circ$, also $\cos c$ neg. ist, so muß einer der Winkel A oder B größer als 90° sein, und da in $\cos B = \cos b \sin A$ $\sin A$ unter jeder Bedingung positiv ist, so muß b mit B gleichzeitig spitz oder stumpf sein.

$\sin a = \sin c \sin A$; $\sin b = \sin c \sin B$.

$A = 116^\circ\,37'\,43''$; $B = 63^\circ\,22'\,17''$

$a = 120^\circ\,5'\,30''$; $b = 59^\circ\,54'\,30''$.

Oder $\operatorname{cotg} A \,.\, \operatorname{cotg} B = \cos c = \frac{\cos A \cos B}{\sin A \sin B}$, daher

$\cos A \cos B : \sin A \sin B = \cos c : 1$ und

$(\cos A \cos B + \sin A \sin B) : (\cos A \cos B - \sin A \sin B) =$

$(\cos c + 1) : (\cos c - 1)$

$\cos(A-B) : \cos(A+B) = 2\cos^2\frac{c}{2} : -2\sin^2\frac{c}{2}$

Digitized by Google

$\cos(A-B) = -\cos(A+B)\operatorname{cotg}^2\frac{c}{2}$ und da $\cos(A+B) = -1$ ist, so $\cos(A-B) = \operatorname{cotg}^2\frac{c}{2}$.

Oder mit Hilfe der Gaußschen Gleichungen:

$$\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}, \quad \cos\frac{a-b}{2} = \frac{\cos 52^0\,16'\,47{\cdot}5''}{\cos 45^0}$$

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}, \quad \cos\frac{a+b}{2} = 0$$

daraus $a = 120^0\,5'\,30''$
$b = 59^0\,54'\,30''$

und aus $\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}$ erhält man

$\frac{A-B}{2} = 26^0\,37'\,30''$ und da

$\frac{A+B}{2} = 90^0$, so $A = 116^0\,37'\,43''$
$B = 63^0\,22'\,17''$.

Schiefwinkliges Dreieck.

7) $\operatorname{tg}\frac{B+A}{2} = \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\frac{\cos\frac{1}{2}(b-a)}{\cos\frac{1}{2}(b+a)}$

$\operatorname{tg}\frac{B-A}{2} = \operatorname{cotg}\frac{C}{2}\frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(b+a)}$

$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C$,

$\frac{\cos c}{\cos a} = \cos b + \operatorname{tg} a\sin b\cos C$,

setzt man $\operatorname{tg} a\cos C = \operatorname{cotg}\varphi$, so

$\cos c = \frac{\cos a\sin(b+\varphi)}{\sin\varphi}$.

$A = 40^0\,54'\,46{\cdot}9''$, $B = 75^0\,48'\,14{\cdot}9''$,
$c = 42^0\,55'\,47{\cdot}2''$ ($40^0\,54'\,47''$, $75^0\,48'\,17''$, $42^0\,55'\,50''$).

8) $A = 59^0\,4'\,21{\cdot}33''$, $B = 94^0\,23''\,36{\cdot}57''$,
$c = 129^0\,11'\,5{\cdot}5''$ ($59^0\,4'\,21''$, $94^0\,23'\,37''$, $129^0\,11'\,4''$).

Digitized by Google

9) Die Winkel und die dritte Seite findet man wie in der Aufgabe 7.

$f = \frac{r^2\pi}{180}(A + B + C - 180^0)$.

$A = 55^0\,35'\,26{\cdot}95''$, $B = 20^0\,5'\,39{\cdot}1''$ $(55^0\,35'\,28''$, $20^0\,5'\,38'')$

$c = 66^0\,26'\,27{\cdot}5''$; $f = 0{\cdot}133526\,m^2$ $(66^0\,26'\,27''$, $0{\cdot}13353)$.

10) Wien, Paris und der Nordpol bilden die Eckpunkte eines sphärischen Dreieckes, von dem die Entfernung Paris-Nordpol $= b$ $= (90^0 - 48^0\,50'\,11{\cdot}2'')$, die Entfernung Wien-Nordpol $= a$ $= (90^0 - 48^0\,12'\,35{\cdot}5'')$ und der von a und b am Nordpol eingeschlossene Winkel $C = (34^0\,2'\,36'' - 20^0)$ gegeben sind. Der diesem Winkel entsprechende Bogen eines größten, durch Wien und Paris gelegten Kreises ist zu bestimmen.

$$\cos c = \frac{\cos a \sin(b + \varphi)}{\sin \varphi},\quad \varphi = 49^0\,4'\,19{\cdot}5''\ (49^0\,4'\,20''),$$

$$c = 9^0\,18'\,32{\cdot}04'' = 9{\cdot}3089^0\ (9^0\,18'\,30'').$$

Da ein Grad $111{\cdot}3$ Kilometer beträgt, so ist die Entfernung $1036{\cdot}1$ (1036) Kilometer.

11) $a = 41^0\,47'\,24{\cdot}5''$, $b = (90^0 - 59^0\,56'\,29{\cdot}7'')$,
$C = (47^0\,58'\,12'' - 34^0\,2'\,36'')$,
$\varphi = 49^0\,3'\,27{\cdot}7''$ $(49^0\,3'\,27'')$,
$c = 14^0\,13'\,57''$ $(14^0\,13'\,50'')$, somit ist die Entfernung $1584{\cdot}1$ $(1583{\cdot}9)$ Kilometer oder kurz 1584 Kilometer.

12) Aus $\frac{4r^2\pi}{12} = \frac{r^2\pi}{180}(\alpha + \beta + \gamma - 180)$ folgt $\alpha + \beta = 180^0$, daher ist auch

$a + b = 180^0$ und $\cos\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}\cos\frac{c}{2}$ gibt

$\frac{a-b}{2} = 23^0\,38'\,20''$, und weil $\frac{a+b}{2} = 90^0$, so

$a = 113^0\,38'\,20''$, $b = 66^0\,21'\,40''$.

$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\sin\frac{\gamma}{2}$ gibt $\frac{\alpha-\beta}{2} = 34^0\,46'\,50''$, und da

$\frac{\alpha+\beta}{2} = 90^0$, so ist

$\alpha = 124^0\,46'\,50''$, $\beta = 55^0\,13'\,10''$.

Digitized by Google

13) Da 115·5 Meilen $7^\circ 42'$ entsprechen, so sind zwei Seiten: $c = 7^\circ 42'$, $b = (90^\circ - 53^\circ 33')$ und der eingeschlossene Winkel $A = (180^\circ - 130^\circ 39' 45'')$ bekannt und es ist die dritte Seite a und der Winkel B zu bestimmen.

$$\cos a = \frac{\cos c \sin (b + \varphi)}{\sin \varphi}, \quad \operatorname{cotg} \varphi = \operatorname{tang} c \cos A;$$

$\varphi = 84^\circ 57' 54{\cdot}9''$ $(84^\circ 57' 55'')$, $a = 31^\circ 53' 51''$ $(31^\circ 53' 50'')$, somit ist die Breite $58^\circ 6' 9''$ $(58^\circ 6' 10'')$

$$\sin C = \frac{\sin c \sin A}{\sin a}, \quad C = 11^\circ 5' 23'' \ (11^\circ 5' 23''),$$

daher ist die westliche Länge

$$B - 6^\circ 15' = 4^\circ 50' 23'' \ (4^\circ 50' 23'').$$

14) $$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(A + B - C) \cos \frac{1}{2}(A + C - B)}{\sin B \sin C}}$$

oder wenn man $A + B - C = 2S$ setzt:

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos (S - C) \cos (S - B)}{\sin B \sin C}},$$

$$\cos \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\cos (S - A) \cos (S - C)}{\sin A \sin C}},$$

$$\cos \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\cos (S - A) \cos (S - B)}{\sin A \sin B}},$$

$a = 117^\circ 14' 34{\cdot}36''$ $(117^\circ 14' 34'')$, $b = 50^\circ 11' 17{\cdot}44''$ $(50^\circ 11' 20'')$, $c = 129^\circ 20' 36{\cdot}9''$ $(129^\circ 20' 40'')$.

15) $\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A + B - C) \cos \frac{1}{2}(A + C - B)}{\sin B \sin C}$, für $A = B = C$ ist

$$\cos^2 \frac{a}{2} = \frac{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{\sin^2 A} = \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{4 \sin^2 \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{1}{4 \sin^2 \frac{A}{2}} \text{ und}$$

$$\cos \frac{a}{2} = \frac{1}{2 \sin \frac{A}{2}}$$

oder wegen $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$

$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$ und für $A = B = C$.

$$\cos a = \frac{\cos A (1 + \cos A)}{\sin^2 A} = \frac{2 \cos A \cos^2 \frac{A}{2}}{2 \sin A \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} \frac{A}{2}.$$

$a = 78^\circ 58' 31{\cdot}84''$ $(78^\circ 58' 32'')$.

$$f = \frac{r^2 \pi}{180}(A + B + C - 180^\circ) = \frac{r^2 \pi}{60}(A - 60^\circ) =$$

$13{\cdot}77762\ m^2$ $(13{\cdot}778\ m^2)$.

Digitized by Google

16) Nach den in Nr. 14 angegebenen Formeln findet man:
$a = 129^\circ 36' 5''$, $b = 101^\circ 41' 32''$, $c = 78^\circ 43' 59{\cdot}5''$;
$f = 2766{\cdot}6083\ cm^2$ ($129^\circ 36' 2''$, $101^\circ 41' 25''$, $78^\circ 44'$; $2766{\cdot}6$).

17) Da $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}}$,

$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin s \sin(s-b)}}$ ist, so

$\operatorname{tg}\frac{A}{2}.\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{\sin(s-c)}{\sin s}$, woraus c berechnet werden kann, für $s - c$ ergeben sich die zwei Werte $106^\circ 54' 52''$ und $73^\circ 5' 8''$, somit ist c entweder $44^\circ 44' 3''$ oder $78^\circ 33' 47''$.

Nun sind $a + b$, c, A und B bekannt.

Die Gaußschen Gleichungen ergeben dann C und $a - b$; z. B.:

$$\sin\frac{C}{2} = \frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} \cdot \cos\frac{c}{2},\quad \cos\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} \cos\frac{c}{2}.$$

für $c = 44^\circ 44' 3''$ ergibt sich
$a = 124^\circ 17' 53''$, $b = 134^\circ 15' 54''$, $C = 57^\circ 35' 29''$.
für $c = 78^\circ 33' 47''$ ergibt sich
$a = 87^\circ 55' 51''$, $b = 136^\circ 48' 12''$, $C = 84^\circ 15' 34''$.

18) Aus $f = \frac{\pi}{180}(A + B + C - 180)$ folgt $A + B + C = 2S$.

Wegen $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}}$,

$$\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cos(S-B)}{\cos(S-A)\cos(S-C)}}$$

ist $\operatorname{tg}\frac{a}{2}.\operatorname{tg}\frac{b}{2} = \sqrt{\left[\frac{-\cos S}{\cos(S-C)}\right]^2} = -\frac{\cos S}{\cos(S-C)}$,

woraus C berechnet werden kann.

Nun sind $A + B$, C, a und b bekannt, die Gaußschen Gleichungen ergeben $\frac{c}{2}$ und $\frac{A-B}{2}$.

$$\cos\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}} \sin\frac{C}{2}$$

$$\cos\frac{A-B}{2} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} \sin\frac{C}{2}.$$

$c = 56^\circ 51' 49''$, $A = 130^\circ$, $B = 110^\circ$, $C = 80^\circ$.

Digitized by Google

19) $\cos \frac{1}{2}(a+b) = \cos \frac{1}{2}(a-b) \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(A+B) \operatorname{cotg} \frac{C}{2}$.

$\frac{1}{2}(a+b) = 46^\circ 46' 35{\cdot}6''$ $(46^\circ 46' 35'')$, somit

$a = 62^\circ 36' 33{\cdot}6''$ $(62^\circ 36' 35'')$, $b = 30^\circ 56' 33{\cdot}6''$ $(30^\circ 56' 35'')$.

$\cos \frac{c}{2} = \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)} \cdot \cos \frac{C}{2}$.

$c = 62^\circ 56' 39{\cdot}6''$ $(62^\circ 56' 40'')$

$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)} \operatorname{cotg} \frac{C}{2}$.

$\frac{1}{2}(A-B) = 23^\circ 9' 6{\cdot}8''$ $(23^\circ 9' 6{\cdot}6'')$.

$A = 81^\circ 12' 54{\cdot}8''$ $(81^\circ 12' 54{\cdot}6'')$, $B = 34^\circ 54' 41{\cdot}2''$ $(34^\circ 54' 41{\cdot}4'')$.

20) Nach dem Sinussatze ergibt sich

$\sin C = \frac{\sin c \sin A}{\sin a}$, $C = 34^\circ 42' 27''$ und aus

$$\operatorname{tg} \frac{a+c}{2} = \frac{\cos \frac{A-C}{2}}{\cos \frac{A+C}{2}} \operatorname{tg} \frac{b}{2} \text{ folgt } \operatorname{tg} \frac{b}{2} = \frac{\cos \frac{A+C}{2}}{\cos \frac{A-C}{2}} \operatorname{tg} \frac{a+c}{2}$$

$b = 82^\circ 46' 2{\cdot}5''$ $(82^\circ 46')$.

Der andere Wert von C nämlich $180^\circ - 34^\circ 42' 27''$ ist unbrauchbar.

21) $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(a+b+c) \sin \frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b \sin c}}$

und wenn man $a+b+c = 2s$ setzt, so

$$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}}, \quad \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-b)}{\sin a \sin c}},$$

$$\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-c)}{\sin a \sin b}}.$$

$A = 112^\circ 50' 50''$ $(112^\circ 50' 50'')$, $B = 120^\circ 51' 6''$ $(120^\circ 51' 6'')$,

$C = 86^\circ 31' 10''$ $(86^\circ 31' 10'')$.

22) Binnen 24 Stunden, d. i. binnen 1440 Minuten, beschreibt jeder Punkt der Erdoberfläche einen Kreis (seinen Parallelkreis) oder 360°, daher entsprechen 4 Zeitminuten einem Grade.

Die Entfernung zwischen Teschen und Philadelphia beträgt 941·67 geographische Meilen oder $62^\circ 46' 40{\cdot}8''$, und da die Breiten von Teschen und Philadelphia gegeben sind, so sind von dem Dreiecke alle drei Seiten bekannt:

$a = 62^\circ 46' 40{\cdot}8''$, $b = (90^\circ - 39^\circ 57' 7{\cdot}5'')$.

$c = (90^\circ - 49^\circ 45' 30'')$ und es ist A zu bestimmen.

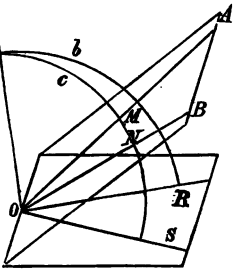
$\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}}$, $A = 93^\circ 47' 17{\cdot}6'' = 93{\cdot}788222^\circ$.

$(A = 93^\circ 47' 14'' = 93{\cdot}78722^\circ)$; sonach zeigt die Uhr in Teschen um $93{\cdot}788 \times 4$ Minuten, d. i. um $6^h 15^m 9''$ $(6^h 15^m 8'')$ mehr als in Philadelphia.

Digitized by Google

23) Da von O aus mit OP die Bogen PM, PN beschrieben sind, also auch MN konstruiert ist, so ist $< AOB = a = MN$. Es sind somit $PM = b$, $PN = c$ und $MN = a$ bekannt und es ist der Winkel bei P zu berechnen, sein Maß ist der Bogen RS; $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}}$.

Fig. 22.



$A = 63^\circ 25' 34{\cdot}6''$ $(63^\circ 25' 30'')$
und dieser Winkel ist gleich $< ROS$.

24) Von dem Dreiecke ZPS, wo Z das Zenith, P den Nordpol, S den Stand der Sonne bedeutet, sind alle drei Seiten bekannt; $a = SZ = 90^\circ - 44^\circ 15' 40''$, $b = SP = 90^\circ - 23^\circ 27' 10''$, $c = ZP = 90^\circ - 48^\circ 12' 36''$
und es ist der der Seite a gegenüberliegende Winkel A (der Stundenwinkel) zu berechnen.

Aus $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a)}{\sin b \sin c}}$ erhält man $A = 48^\circ 59' 12''$ $(48^\circ 59' 10'')$, und da auf eine Stunde 15° kommen, so entsprechen diesem Winkel 3 Stunden 15 Minuten und 57 Sekunden und die Sonne hat die Höhe von $44^\circ 15' 40''$ um $8^h 44' 2''$ vormittags und $3^h 15' 57''$ nachmittags.

Auf dieselbe Weise findet man, daß der Höhe der Sonne von $49^\circ 12''$ $A = 41^\circ 28' 52''$ $(41^\circ 29')$ oder die Zeit $9^h 14' 6''$ $(9^h 14' 4'')$ vormittags und $2^h 45' 54''$ $(2^h 45' 56'')$ nachmittags entspricht.

25) Vom früheren Dreiecke ZPS sind zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bekannt.
$b = SP = 90^\circ - 7^\circ 13' 55''$, $c = ZP = 90^\circ - 48^\circ 12' 36''$;
$< ZPS = 45^\circ$,
da von 9 Uhr bis 12 Uhr drei Stunden vergehen und einer Stunde 15° des Äquators entsprechen.

Die Seite a ist zu berechnen.

$\cos a = \frac{\cos b \sin (\varphi + C)}{\sin \varphi}$, wo $\operatorname{cotg} \varphi = \operatorname{tg} b \cos A$.
$a = 55^\circ 51' 8''$, somit ist die Höhe der Sonne
$90 - a = 34^\circ 8' 52''$ $(34^\circ 8' 54'')$.

26) Bezeichnet man die Rektaszension mit α, die Deklination mit δ und die Schiefe der Ekliptik mit ε, so ist ein Dreieck aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel aufzulösen;

Digitized by Google

$a = 90^0 - \delta$, $b = \varepsilon$, $C = 90^0 + \alpha$. Die dem Winkel $(90^0 + \alpha)$ gegenüberliegende Seite dieses Dreieckes ist 90^0 weniger die Breite, also $90^0 - \beta$ und der der Seite $90^0 - \delta$ gegenüberliegende Winkel ist 90^0 weniger die Länge also $90^0 - \lambda$. Nun ist

$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$ oder

$\cos(90^0 - \beta) = \cos(90^0 - \delta) \cos \varepsilon + \sin(90^0 - \delta) \sin \varepsilon \cos(90^0 + \alpha)$

und daraus

$\sin \beta = \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon \sin \alpha$.

$\beta = 34^0\,59'\,29{\cdot}4''$ $(34^0\,59'\,27'')$.

Ferner ist

$$\sin A = \frac{\sin C \sin a}{\sin c} \text{ oder } \sin(90^0 - \lambda) = \frac{\sin(90^0 + \alpha) \sin(90^0 - \delta)}{\sin(90^0 - \beta)}$$

daher $\cos \lambda = \frac{\cos \alpha \cos \delta}{\cos \beta}$, $\lambda = 54^0\,23'\,52{\cdot}6''$ $(54^0\,23'\,51'')$.

27) Ein Dreieck ist aufzulösen aus zwei Seiten $(90^0 - h)$, $(90^0 - \delta)$ und dem der letzteren gegenüberliegenden Winkel $(180^0 - \alpha)$. Die dritte Seite des Dreieckes ist 90^0 weniger die Polhöhe und der der Seite $(90^0 - h)$ gegenüberliegende Winkel ist der Stundenwinkel.

$$\sin w = \frac{\sin(180^0 - \alpha) \sin(90^0 - h)}{\sin(90^0 - \delta} = \frac{\sin \alpha \cos h}{\cos \delta}.$$

$w = 45^0\,42'$ oder $134^0\,18'$.

Wegen $\operatorname{tg} \frac{c}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A + B)}{\sin \frac{1}{2}(A - B)} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a - b)$ und

$A + B = 180 - \alpha + w = 175^0\,27'\,47''$, $A - B = 84^0\,3'\,37''$,

$a - b = (90^0 - \delta) - (90^0 - h) = h - \delta = 14^0\,51'\,12''$,

$c = 90^0 - \varphi$

ist die Polhöhe $\varphi = 67^0\,58'\,56''$.

C. Stereometrie.

§ 23. Prisma.

1) Ist x eine Grundkante, so ist die Oberfläche $3x^2 + \frac{x^2}{2}\sqrt{3} = a$,

$x^2[6 + \sqrt{3}] = 2a$, $x^2 = \frac{2a(6 - \sqrt{3})}{33}$, $x = \sqrt{\frac{2a(6 - \sqrt{3})}{33}}$, also

$s_3 = \sqrt{\frac{2a(6 - \sqrt{3})}{33}} = 0{\cdot}5085898\sqrt{a}$.

Digitized by Google

Ist die Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck, so ist die Oberfläche

$$6x^2 + 3x^2\sqrt{3} = a,\ x = \sqrt{\frac{a\,(2-\sqrt{3})}{3}},\ \text{somit}$$

$$s_6 = \sqrt{\frac{a\,(2-\sqrt{3})}{3}} = 0{\cdot}2988585\,\sqrt{a}.$$

2) Ist die Diagonale des Parallelepipedes d, so ist
$a = d\cos\alpha$, $b = d\cos\beta$, $c = d\cos\gamma$. Daher
$a^2 + b^2 + c^2 = d^2\,[\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma]$.
Bezeichnet man die Diagonale des aus den Seiten a und b gebildeten Rechteckes mit d_1, so ist $d_1^2 = a^2 + b^2$ und $d^2 = d_1^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$, somit
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.
$\alpha = 74^\circ\,29'\,55{\cdot}1''$, $\beta = 57^\circ\,41'\,18{\cdot}47''$, $\gamma = 36^\circ\,41'\,57{\cdot}2''$
$(74^\circ\,29'\,55'',\ 57^\circ\,41'\,20'',\ 36^\circ\,41'\,58'')$.

3) Die drei Seiten der Grundfläche seien a, b, c, so ist wegen $\frac{a}{\sin\alpha} = 2r$, $a = 2r\sin\alpha$, $b = 2r\sin\beta$, $f = \frac{ab\sin\gamma}{2} = 2r^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$; $h = s\sin\delta$, somit
$V = 2r^2 s\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\sin\delta = 188{\cdot}90144\ (188{\cdot}9)\ dm^3$.

4) $V = f\,.\,h = ab\,.\,h$, $ab = \frac{V}{h}$; $O = 2ab + 2\,(a+b)\,h = \frac{2V}{h} + 2\,(a+b)\,h$. Dies ist ein Minimum, wenn $a = b$ oder wenn die Grundfläche ein Quadrat ist; für diesen Fall ist

$$O = \frac{2V}{h} + 4ah,\ a^2h = V,\ a = \sqrt{\frac{V}{h}},\ O = \frac{2V}{h} + 4\sqrt{Vh}.$$

Speziell $O = 90\ cm^2$, $27\ K$.

5) Ist $b = 18$, $c = 15$, $\alpha = 75^\circ\,36'\,30''$, so ist
$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} = 20{\cdot}36624$. $2f = bc\sin\alpha = ah$, somit $h = \frac{bc\sin\alpha}{a}$ und

$$V = f\,.\,h = \frac{bc\sin\alpha}{2}\,.\,\frac{bc\sin\alpha}{a} = \frac{(bc\sin\alpha)^2}{2a} = 1679{\cdot}164\ cm^3$$
$(1679{\cdot}16)$.

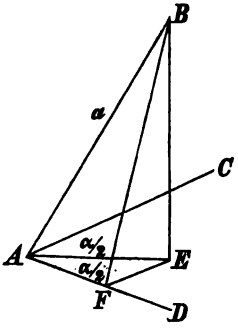
$$O = bc\sin\alpha + (a+b+c)\,\frac{bc\sin\alpha}{a} = \frac{2a+b+c}{a}\,bc\sin\alpha =$$
$946{\cdot}814\ cm^2\ (946{\cdot}8)$.

6) $\gamma = \text{arc}\cos\frac{a^2}{f}$; $V = \frac{a}{2}\sqrt{f^2 - a^4}$.
$\gamma = 39^\circ 57'\,44{\cdot}3''\ (39^\circ 57'\,45'')$; $V = 214{\cdot}52273\,dm^3\ (214{\cdot}52\,dm^3)$.

Digitized by Google

7) Eine Fläche ist $a^2 \sin\alpha$, daher die Oberfläche $6a^2 \sin\alpha$; der Inhalt ist $a^2 \sin\alpha . h$.

Fig. 23.



Seien AB, AC, AD die in einer Ecke zusammenstehenden Kanten, so ist die Höhe des Rhomboeders $h = BE = \sqrt{BF^2 - EF^2}$, nun ist $BF = a \sin\alpha$ $EF = AF.\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = a\cos\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, daher

$$h = \sqrt{a^2\sin^2\alpha - a^2\cos^2\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\left(\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$= \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} \text{ und } J = a^2\sin\alpha . \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$$

oder $J = 2a^3 \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$. J kann man auch mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie leicht finden, $J = a^2\sin\alpha . h$, und $h = a\sin i$, wo i die eine Kathete eines rechtwinkligen sphärischen Dreieckes mit $\frac{\alpha}{2}$ als anderer Kathete und α als Hypotenuse vorstellt. Aus $\cos\alpha = \cos\frac{\alpha}{2}\cos i$ folgt

$$\sin i = \sqrt{1 - \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha} =$$

$$\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}, \text{ somit}$$

$$J = a^3\sin\alpha . \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

$O = 345 \cdot 72246\ cm^2$, $J = 395 \cdot 4716\ cm^3$
($O = 345 \cdot 725\ cm^2$, $J = 395 \cdot 468\ cm^3$).

8) Sind b und c die Basiskanten und α der von ihnen eingeschlossene Winkel, so ist

$J = bc\sin\alpha . H$; $H = a\sin i$

$\sin i = \sin C . \sin\beta$ $\quad \alpha + \beta + \gamma = 2s.$

Digitized by Google

$\sin C = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} = 2 \sqrt{\frac{\sin s . \sin (s-\gamma)}{\sin \alpha . \sin \beta} \cdot \frac{\sin (s-\alpha) . \sin (s-\beta)}{\sin \alpha . \sin \beta}} =$

$\frac{2}{\sin \alpha . \sin \beta} \sqrt{\sin s \sin (s-\alpha) \sin (s-\beta) \sin (s-\gamma)}$, somit

Fig. 24.

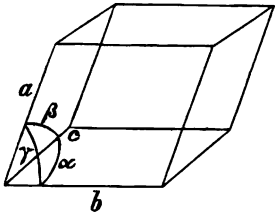
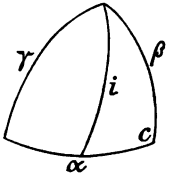


Fig. 25.



$H = \frac{2a}{\sin \alpha} \sqrt{\sin s \sin (s-\alpha) \sin (s-\beta) \sin (s-\gamma)}$ und

$J = 2abc \sqrt{\sin s \sin (s-\alpha) \sin (s-\beta) \sin (s-\gamma)}$.

§ 24. Zylinder.

1) $O = 2R^2\pi + M$, $M = 2R\pi H$, $O - M = 2R^2\pi$, $R = \sqrt{\frac{O-M}{2\pi}}$.

$H = \frac{M}{2R\pi} = \frac{M}{2\pi \sqrt{\frac{O-M}{2\pi}}} = \frac{M}{\sqrt{2\pi (O-M)}} = 5\,m$ nahezu, genauer $5 \cdot 00002\,m$.

2) Die obere Fläche ist eine Ellipse, deren große Achse $\sqrt{4R^2 + (S-s)^2}$ und deren kleine Achse $2R$ ist. Die Fläche der Ellipse ist

$$f = \pi ab = \frac{\pi R}{2} \sqrt{4R^2 + (S-s)^2},$$

die Mantelfläche ist $2R\pi \cdot \frac{S+s}{2} = R\pi (S+s)$, somit ist die Oberfläche:

$O = R^2\pi + R\pi (S+s) + \frac{R\pi}{2} \sqrt{4R^2 + (S-s)^2} = 132\pi =$
$414 \cdot 6902\,dm^2$.

$V = R^2\pi \frac{S+s}{2} = 192\pi = 603 \cdot 1858\,dm^3$, $v = R^2\pi \frac{S-s}{2} =$
$48\pi = 150 \cdot 7964\,dm^3$.

3) $V = r^2\pi . h$, $h : 2r = 4 : 3$, $V = \frac{8r^3\pi}{3}$, sonach $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{8\pi}}$ und

$O = r^2\pi + 2r\pi \cdot \frac{8r}{3} = \frac{19r^2\pi}{3} = \frac{19\pi}{3} \left(\sqrt[3]{\frac{3V}{8\pi}}\right)^2 =$

$^{19}/_4 \sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{3}} = 4 \cdot 82358\ (4 \cdot 8236)\,m^2$.

Digitized by Google

4) Die Sehne sei AB und die vom Mittelpunkte des Kreises zu den Endpunkten der Sehne gezogenen Radien OA, OB; da AOB ein gleichseitiges Dreieck ist, so hat es zur Fläche $\frac{r^2}{4}\sqrt{3}$ und der Sektor $AOB = \frac{r^2\pi}{6}$, daher hat das Segment $\frac{r^2\pi}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{r^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$ zur Fläche, die übrige Fläche ist $\frac{r^2}{12}(10\pi + 3\sqrt{3})$, somit sind die Volumina der beiden Teile

$$V = \frac{r^2}{12}(10\pi + 3\sqrt{3})\,h, \quad V_1 = \frac{r^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})\,h.$$
$$V = 1952{\cdot}644\ cm^3, \qquad V_1 = 57{\cdot}975\ cm^3.$$

5) $O = 2\pi(a+b)(b+d) = 238\pi = 747{\cdot}69905\ cm^2$,
$V = \pi bd(a+b) = 170\pi = 534{\cdot}07075\ cm^3$.

6) Durch die Rotation entsteht ein hohler Zylinder, auf dem eine hohle Halbkugel aufgesetzt ist, somit ist

$(R^2 - r^2)\pi h + \frac{2\pi}{3}(R^3 - r^3)$ der Inhalt der Wand und

$r^2\pi h + \frac{2r^3\pi}{3}$ der Inhalt des Hohlraumes, daher

$$4\left[(R^2 - r^2)\pi h + \frac{2\pi}{3}(R^3 - r^3)\right] = r^2\pi h + \frac{2r^3\pi}{3} \text{ und daraus}$$
$$h = \frac{10r^3 - 8R^3}{3(4R^2 - 5r^2)} = \frac{2(4R^3 - 5r^3)}{3(5r^2 - 4R^2)} = 94^2/_3\ cm.$$

7) Der Inhalt des Prismas ist $\frac{h^3\sqrt{3}}{3}$, somit $\pi ab.H = \frac{h^3\sqrt{3}}{3}$, wegen $a : b = 4 : 3$ und $H : h = 2 : 3$ ist $b = \frac{3a}{4}$, $H = \frac{2h}{3}$, daher

$$\frac{\pi a^2 h}{2} = \frac{h^3\sqrt{3}}{3} \text{ und}$$
$$2a = 2h\sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}} = 72{\cdot}7513\ (72{\cdot}752)\ cm,$$
$$2b = h\sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}} = 54{\cdot}5635\ (54{\cdot}564)\ cm,$$
$$L = {}^1/_3\sqrt{4h^2 + 9d^2} = 40{\cdot}31129\ (40{\cdot}311)\ cm.$$
$$\alpha = 82^0\,52'\,29{\cdot}9''\ (82^0\,52'\,30'').$$

8) Das Volumen des gleichseitigen Zylinders ist $V = 2r^3\pi$; der der Seite des Vierundzwanzigeckes entsprechende Zentriwinkel ist 15^0, somit

$$24f = 24\frac{r^2 \sin 15^0}{2} = 12r^2 \sin 15^0 \text{ und}$$
$$V_1 = 24r^3 \sin 15^0 = 24 \cdot \frac{V}{2\pi} \sin 15^0 = \frac{12V}{\pi} \sin 15^0 =$$
$$79{\cdot}00028\ (79)\ m^3.$$

Digitized by Google

9) Aus $r^2\pi : \varphi = 360^0 : 20^1/_2{}^0$ folgt als Fläche des Sektors $\varphi = \frac{41r^2\pi}{2.360}$, somit $2\varphi = \frac{41r^2\pi}{360} = 4{\cdot}509$ und $r = \sqrt{\frac{4{\cdot}509.360}{41\pi}}$.

Aus $2r.h = 4{\cdot}509$ folgt $h = \frac{4{\cdot}509}{2r} = {}^1/_2\sqrt{\frac{4{\cdot}509\,.\,41\,.\,\pi}{360}}$.

$V = \varphi\,.\,h$

$V = 1{\cdot}43178\ (1{\cdot}4318)\ m^3$.

10) Ist d der Durchmesser der Grundfläche des Zylinders, also eine Diagonale der Grundfläche des Prismas und α der Winkel, den die beiden gleichen Diagonalen miteinander bilden, so ist $\frac{d^2 \sin\alpha}{2}\,.\,h$ der Kubikinhalt; dieser ist ein Maximum, wenn $\sin\alpha = 1$, also $V = \frac{d^2h}{2}$ ist, dann beträgt der Abfall

$$\frac{d^2\pi}{4}h - \frac{d^2h}{2} = \frac{d^2h}{4}(\pi - 2).$$

Speziell $2{\cdot}56\ m^3$, $1{\cdot}4612386\ m^3$.

11) Ist der Radius r, so ist die Fläche des Achteckes $\frac{8r^2}{2}\sin 45^0 = 2\sqrt{2}r^2$ und der Inhalt $2r^2\sqrt{2}\,l$, das Gewicht

$$2\sqrt{2}r^2hs = 136{\cdot}5316 \text{ Gramm.}$$

$r^2\pi l s$ ist das Gewicht des ganzen Zylinders, somit der Abfall $r^2 l s\,(\pi - 2\sqrt{2}) = 15{\cdot}1169$ Gramm.

12) Der Zylinder taucht bis $\frac{r}{2}$ ein, somit ist der vom Wasser bedeckte Teil der Grundfläche gleich dem Segmente, das dem Zentriwinkel 120^0 entspricht, als $= \frac{r^2\pi}{3} - \frac{r^2}{4}\sqrt{3} = \frac{r^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$.

Hat der Zylinder die Länge l und das Wasser das (spezifische) Gewicht 1, so ist das Gewicht der verdrängten Wassermasse $\frac{r^2l}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$, das Gewicht des Zylinders ist $r^2\pi l\sigma$, wo σ das spezifische Gewicht des Materiales des Zylinders ist

$$r^2\pi l\sigma = \frac{r^2l}{12}(4\pi - 3\sqrt{3}), \quad \sigma = \frac{1}{12\pi}(4\pi - 3\sqrt{3}) = 0{\cdot}1955.$$

13) $\frac{d^2\pi ls}{4}$ ist das Gewicht des Kupferdrahtes, $\left[\left(D + \frac{d}{2}\right)^2 - \frac{d^2}{4}\right]\pi l s_1$ das Gewicht der Korkschicht, wo D die Dicke der Korkschicht bedeutet, daher

$$\frac{d^2\pi ls}{4} + \left[\left(D + \frac{d}{2}\right)^2 - \frac{d^2}{4}\right]\pi l s_1 = \left(D + \frac{d}{2}\right)^2\pi l\,.\,1, \text{ daraus}$$

$$\frac{d^2}{4}(s - s_1) = \left(D + \frac{d}{2}\right)^2(1 - s_1) \text{ und}$$

Digitized by Google

$$D = \frac{d}{2}\left[\sqrt{\frac{s - s_1}{s - s_1}} - 1\right] = 2{\cdot}371709\ cm.$$

$$P = \pi l (R^2 - r^2) s_1 = 781{\cdot}7612 \text{ Gramm.}$$

14) Da die Höhen der beiden Körper gleich sind, so verhalten sich die Volumina wie die Grundflächen

$J : V = r^2 \pi : \frac{a b \sin \gamma}{2}$, wo a, b zwei Seiten des Grunddreieckes und r der Radius des diesem Dreiecke eingeschriebenen Kreises ist.

Drückt man nun a und b durch r aus,

$$a = r\left(\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\right) = -\frac{r \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}, \text{ so erhält man:}$$

$$J : V = r^2\pi : \frac{r^2 \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\gamma}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}} = r^2\pi : r^2 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$$

$$J = V.\pi.\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

§ 25. Pyramide.

1) $O = 2r^2(1 + \sqrt{3}) = 21{\cdot}856406\ m^2$

$V = \frac{2r^3}{3} = 5^1/_3\ m^3.$

2) Aus $2R^2\pi = 402{\cdot}123$ folgt $R = \sqrt[3]{\frac{402{\cdot}123}{2\pi}}$; die Grundfläche der Pyramide ist sonach $6 . \frac{R^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$, die Seitenkante ist $\sqrt{R^2 + 4R^2} = R\sqrt{5}$, die Höhe eines Seitendreieckes $\sqrt{5R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R}{2}\sqrt{19}$, somit ist die Gesamtoberfläche:

$$O = \frac{3}{2}R^2[\sqrt{19} + \sqrt{3}] = 146{\cdot}183\ m^2\ (146{\cdot}185).$$

3) Die Fläche des regelmäßigen Achteckes ist $2R^2\sqrt{2}$, somit

$$V = \frac{2R^2H\sqrt{2}}{2} = 2{\cdot}828427\ m^3.$$

4) Die Grundfläche ist $^9/_4\sqrt{3}$, die Höhe einer Seitenfläche ist $^1/_2\sqrt{91}$, somit ist die ganze Oberfläche:

$$O = {}^9/_4(\sqrt{3} + \sqrt{91}) = 25{\cdot}360746\ m^2.$$

Der Radius des der Grundfläche umgeschriebenen Kreises ist $R = \frac{abc}{4f} = \frac{27}{9\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, daher ist die Höhe der Pyramide

Digitized by Google

$H = \sqrt{25-3} = \sqrt{22}$ und der Inhalt

$$^9/_4 \sqrt{3} . \frac{\sqrt{22}}{3} = {}^3/_4 \sqrt{66} = 6{\cdot}093029\ m^3.$$

5) $O = a^2 + 4a . {}^1/_2 \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} = a^2 + a\sqrt{4h^2 + a^2} = 40{\cdot}176\ m^2.$

6) Einfach gestaltet sich die Rechnung mit Hilfe der Trigonometrie. Die Grundfläche ist $\frac{5r^2}{2} \sin 2\alpha = 90 \sin 72^0$. Die Seitenflächen betragen $\frac{5s^2}{4}\sqrt{3} = 5r^2\sqrt{3}\sin^2\alpha = 180\sqrt{3}\sin^2 36^0$.

$O = 5r^2 \sin\alpha (\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha) = 193{\cdot}3087\ dm^2$ (193·31).

$H = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{4\sin^2\alpha - 1}$,

$V = \frac{5r^2}{2} \sin 2\alpha . \frac{H}{3} = 105{\cdot}801346\ dm^3$ (105·8).

7) Die Fläche des regelmäßigen Achteckes ist $2R^2\sqrt{2}$, aus $s = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$ folgt $r = \frac{s}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$, somit $f = s^2(2+\sqrt{2})\sqrt{2}$ $= 293{\cdot}7615$; die Höhe eines Seitendreieckes ist $h = \sqrt{12^2 - 3{\cdot}9^2}$, daher $O = 293{\cdot}7615 + 354{\cdot}0753 = 647{\cdot}8368\ m^2$, die Höhe der Pyramide $H = \sqrt{12^2 - r^2} = 6{\cdot}3356$, daher $V = 620{\cdot}3832\ m^3$.

Auch hier gestaltet sich die Rechnung einfacher mit Zuhilfenahme der Trigonometrie.

8) Die Diagonale der Basis ist $\sqrt{a^2 + b^2}$, daher ist die Höhe der Pyramide $H = {}^1/_2\sqrt{4c^2 - (a^2+b^2)}$; die Höhen der Seitendreiecke sind ${}^1/_2\sqrt{4c^2 - a^2}$, ${}^1/_2\sqrt{4c^2 - b^2}$.

$$O = ab + \frac{a}{2}\sqrt{4c^2 - a^2} + \frac{b}{2}\sqrt{4c^2 - b^2} = 99{\cdot}541\ m^2.$$

$$V = {}^1/_6\, ab\sqrt{4c^2 - (a^2+b^2)} = 45{\cdot}827\ m^3.$$

9) Die Grundfläche der Pyramide ist $\frac{3s^2}{2}\sqrt{3}$, die Höhe $H = \sqrt{h_s^2 - \frac{3s^2}{4}}$, wo h_s die Höhe eines Seitendreieckes bedeutet;

$V = \frac{3s^2}{4.3}\sqrt{3}\sqrt{4h_s^2 - 3s^2} = \frac{s^2}{4}\sqrt{12h_s^2 - 9s^2} = 142{\cdot}26885\ m^3.$

$\frac{s}{2}\sqrt{3} = h_s \cos\alpha$,

$\alpha = \text{arc cos}\left(\frac{s\sqrt{3}}{2h_s}\right) = 64^0\,20'\,27{\cdot}94''$ (64° 20′ 28″).

10) $O = 6\frac{r^2}{4}\sqrt{3} + 6 . \frac{r^2}{4} . \text{cotg}\frac{\alpha}{2} = \frac{3r^2}{2}\left(\sqrt{3} + \text{cotg}\frac{\alpha}{2}\right) =$ $148{\cdot}1988\ dm^2$. $a = r$.

$V = \frac{3r^2}{2}\sqrt{3} . \frac{H}{3}$; $H = \frac{r}{2}\sqrt{\text{cotg}^2\frac{\alpha}{2} - 3}$, $V = 75{\cdot}1569\ dm^3$.

Digitized by Google

11) Da $a^2 . \frac{H}{3} = V$ und $H = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha$ ist, so ist auch $\frac{a^3}{6} \operatorname{tg} \alpha = V$ und

$a = \sqrt[3]{6 V \operatorname{cotg} \alpha} = 5 \cdot 2093$ Längeneinheiten,

$s = \frac{a}{2} \sqrt{2 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{a}{2 \cos \alpha} \sqrt{1 + \cos^2 \alpha} = 7 \cdot 4693$ Längeneinheiten.

12) Die Grundfläche ist $2 r^2 \sqrt{2}$, daher $V = \frac{2 r^2 \sqrt{2} . h}{3}$; nun ist $r = s \sin \alpha$ und $h = s \cos \alpha$, also $V = \frac{2\sqrt{2}}{3} s^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3} s^3 \sin \alpha \sin 2\alpha = 23124 \cdot 813$ (23125) m^3.

13) Die Grundlinie der durch die erste und vierte folgende (also die fünfte) Seitenkante gelegten Dreiecksfläche ist die Seite eines dem Kreise eingeschriebenen gleichseitigen Dreieckes, somit, wenn R der Radius ist: $R\sqrt{3}$; der Mittelpunkt dieser Grundlinie steht vom Mittelpunkt des Kreises um $\frac{R}{2}$ ab, daher ist die Höhe der Dreiecksfläche $= \frac{R}{2 \cos 60^0}$ und diese Dreiecksfläche selbst beträgt $\frac{R^2 \sqrt{3}}{4 \cos 60^0} = 1$, daraus ergibt sich $R = \sqrt{\frac{4 \cos 60^0}{\sqrt{3}}}$, die Höhe der Pyramide ist $h = \frac{R \operatorname{tg} 60^0}{2}$ und ihre Basis $3R^2$, daher

$V = \frac{4 \sin 60^0}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\cos 60^0}{\sqrt{3}}}$, und wegen $\sin 60^0 = {}^1/_2 \sqrt{3}$ und $\cos 60^0 = {}^1/_2$

$V = {}^1/_3 \sqrt{6} \sqrt{3} = \sqrt{{}^4/_3} = 1 \cdot 0746\ m^3$.

14) Die Länge einer Seitenkante beträgt

$\frac{2}{2an} \sqrt{16 M^2 + n^2 a^4} = {}^1/_8 \sqrt{17} = 0 \cdot 515388\ m$;

die Höhe der Pyramide ist:

$\sqrt{\frac{4 M^2}{n^2 a^2} - \frac{a^2}{4} \left(\operatorname{cotg} \frac{180^0}{n}\right)^2} = 0 \cdot 398656\ m$ (0·39866).

In jedem Seitendreiecke beträgt der Winkel an der Grundlinie

$\operatorname{arc\,tg} \left(\frac{4M}{na^2}\right) = 75^0\, 57'\, 49 \cdot 5''$ ($75^0\, 57'\, 50''$).

Der Neigungswinkel einer Seitenfläche gegen die Grundfläche ist

$\operatorname{arc\,cos} \left[\frac{na^2}{4M} \operatorname{cotg} \frac{180^0}{n}\right] = 52^0\, 52'\, 30 \cdot 65''$ ($52^0\, 52'\, 30''$).

$O = M + \frac{na^2}{4} . \operatorname{cotg} \frac{180^0}{n} = 0 \cdot 801777\ m^2$ (0·80178).

$V = \frac{na^2}{4} . \operatorname{cotg} \frac{180^0}{n} . \frac{H}{3} = 0 \cdot 040102\ m^3$.

Digitized by Google

15) Zunächst bestimmt man die dritte Seite der Grundfläche $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} = 23$, das Basisdreieck ist also gleichschenklig und sein Flächeninhalt $= 133{\cdot}2216198$.

$$J = \frac{f.h}{3},\quad f = \frac{b\,c\sin\alpha}{2},\quad r = \frac{a}{2\sin\alpha},\quad h = \sqrt{s^2 - r^2};$$

$V = 1695{\cdot}684$ (1695·68) Kubikeinheiten.

16) $V = \frac{5a^2}{12}\operatorname{tg} 54^0 \sqrt{S^2 - \frac{a^2}{4\sin^2 36^0}}$, wenn mit a die Grundkante und mit S die Seitenkante bezeichnet wird.

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{S^2 - \frac{a^2}{4\sin^2 36^0}}}{\frac{a}{2}\operatorname{tg} 54^0}.$$

$V = 49{\cdot}90535$ Kubikmeter; $\varphi = 77^0\,56'\,48{\cdot}5''$.

Die Rechnung gestaltet sich einfacher, wenn man schon die Grundfläche trigonometrisch bestimmt.

17) Da die Seitendreiecke gleichschenklig sind und von jedem zwei Seiten und die Winkel bekannt sind, so können mit Hilfe des Sinussatzes die dritten Seiten, das sind die Seiten der Grundfläche, berechnet werden: $a = 4{\cdot}40441\ m$, $b = 4{\cdot}84917\ m$, $c = 6{\cdot}63695\ m$, $f = 10{\cdot}67509\ m^2$; $R = 3{\cdot}31965\ m$ = Radius des der Grundfläche umgeschriebenen Kreises; die Höhe der Pyramide ist $h = \sqrt{9^2 - R^2} = 8{\cdot}36592$ und

$$V = f\,\frac{h}{3} = 29{\cdot}76712\ m^3.$$

18) Bezeichnet man den der Achtecksseite entsprechenden Zentriwinkel mit α (45°), so ist die Grundfläche: $2s^2\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$ und die Höhe der Pyramide

$$H = \sqrt{\frac{s^2}{4}\operatorname{cotg}^2\frac{\delta}{2} - \frac{s^2}{4}\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{s}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2}}\sqrt{\sin\frac{\alpha+\delta}{2}\sin\frac{\alpha-\delta}{2}}.$$

Der Inhalt der ganzen Pyramide ist:

$$V = \frac{s^3\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}{3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2}}\sqrt{\sin\frac{\alpha+\delta}{2}\sin\frac{\alpha-\delta}{2}},\ \text{wo}\ \alpha = 45^0.$$

$V = 30437{\cdot}175\ cm^3$, $V_1 = 21306{\cdot}0225\ cm^3$.

19) Die Ergänzungspyramide hat den Inhalt $V - V_1$, daher, wenn B und b die Grundflächen $(h + x)$, x die Höhen bedeuten:

$$B : b = (h + x)^2 : x^2,\quad \frac{B.(h+x)}{3} = V,\quad \frac{b.x}{3} = V - V_1.$$

Digitized by Google

$$h + x = \frac{3V}{B}, \quad b = \frac{3(V - V_1)}{x}.$$

$$B : \frac{3(V - V_1)}{x} = \left(\frac{3V}{B}\right)^2 : x^2, \text{ daraus}$$

$x = \frac{3}{B}\sqrt[3]{V^2(V - V_1)}$ und $h = \frac{3V}{B} - x$; somit ist die Pyramide $\frac{3}{B}\left[V - \sqrt[3]{V^2(V - V_1)}\right]$ Meter über der Basis abzustumpfen.

a) 6 Meter, *b*) 4·00667 Meter.

20) $x : a = H : (H - h_1)$, $x = \frac{aH}{H - h_1}$, somit ist die Grundfläche $\left(\frac{aH}{H - h_1}\right)^2$; die vier Seitenflächen sind Trapeze mit den parallelen Seiten $\frac{aH}{H - h_1}$ und a und dem Abstande $h_1\sqrt{1 + \frac{a^2}{4(H - h_1)^2}}$, daher

$$O = \left(\frac{aH}{H - h_1}\right)^2 + a^2 + 2ah_1\frac{2H - h_1}{H - h_1}\sqrt{1 + \frac{a^2}{4(H - h_1)^2}} = 48000.$$

21) Aus $V = \frac{h}{3}[s + \sqrt{Bb}]$ und $s = B + b$ folgt:

$$B = \frac{s}{2} + \frac{1}{2h}\sqrt{s^2h^2 - 4(3V - hs)^2};$$

$$b = \frac{s}{2} - \frac{1}{2h}\sqrt{s^2h^2 - 4(3V - hs)^2}.$$

Die Höhe der Ergänzungspyramide ist $x = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$.

$V = \frac{B(h + x)}{3}$,

a) $B = 289\ cm^2$, $b = 169\ cm^2$, $x = 48^3/_4\ cm$, $V = 6141^1/_4\ cm^3$.

b) $B = 100\ dm^2$, $b = 64\ dm^2$, $x = 192\ dm$, $V = 8000\ dm^3$ oder $B = 1\ m^2$, $b = 0{\cdot}64\ m^2$, $x = 19{\cdot}2\ m$, $V = 8\ m^3$.

22) Die Höhe der Pyramide ist $H = \sqrt{c^2 - {}^1/_4(a^2 + b^2)}$, daher ist der Inhalt $\frac{ab}{3}\sqrt{c^2 - {}^1/_4(a^2 + b^2)}$; hat die kleine Pyramide f zur Basis und x zur Höhe, so ist $V_1 = \frac{fx}{3} = \frac{ab}{6}\sqrt{c^2 - {}^1/_4(a^2 + b^2)}$.

Wegen $F : f = H^2 : x^2$ ist $f = \frac{Fx^2}{H^2}$, somit

$\frac{Fx^3}{H^2} = \frac{ab}{2}\sqrt{c^2 - {}^1/_4(a^2 + b^2)}$ und $x^3 = {}^1/_2\left[\sqrt{c^2 - {}^1/_4(a^2 + b^2)}\right]^3$

oder $x = \sqrt[3]{{}^1/_2}\sqrt{c^2 - {}^1/_4(a^2 + b^2)}$,

$x = 27{\cdot}42577\ m$ von der Spitze entfernt ist der Schnitt zu führen.

Digitized by Google

23) Bezeichnet man mit R und r die Radien des der unteren und oberen Grundfläche eingeschriebenen Kreises, so ist

$$R = \frac{2F}{3S} = \frac{S^2\sqrt{3}}{6S} = \sqrt{3},\ r = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

die beiden Mittelpunkte liegen übereinander, daher ist die Höhe einer Seitenfläche $h_1 = \sqrt{h^2 + (R-r)^2} = {}^1/_3\sqrt{156}$.

a) $O = 67{\cdot}280492\ m^2$, $V = 30{\cdot}0222139\ m^3$.

b) $O = 22{\cdot}7376507\ dm^2$, $V = 4{\cdot}272392\ dm^3$.

24) $\frac{a+b}{2}.h = c$, h = Höhe einer Seitenfläche $= \frac{2c}{a+b}$.

Die Höhe des Pyramidenstumpfes ist $\sqrt{h^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4c^2}{(a+b)^2} - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$ oder kurz h_1; nun ist

$(h_1 + x)^2 : x^2 = a^2 : b^2$ oder $(h_1 + x) : x = a : b$, daher $x = \frac{h_1 b}{a-b}$

und $h_1 + x = h_1 + \frac{h_1 b}{a-b} = h_1 \frac{a}{a-b} = \sqrt{\frac{4a^2c^2}{(a^2-b^2)^2} - \frac{a^2}{4}}$.

Die Höhe eines Seitendreieckes der ganzen Pyramide ist:

$H\sqrt{\frac{a^2}{4} + (h_1 + x)^2} = \frac{2ac}{a^2 - b^2}$;

$O = a^2 + 2a\frac{2ac}{a^2-b^2} = a^2 + \frac{4a^2c}{a^2-b^2}$.

$V = a^2.\frac{h_1+x}{3} = \frac{a^3}{6(a^2-b^2)}\sqrt{16c^2 - (a^2-b^2)^2}$,

$O = 174{\cdot}96\ dm^2$, $V = 96{\cdot}8885\ dm^3$.

§ 26. Kegel.

1) Ist $S = 1{\cdot}5\ m$ und x der dem Zentriwinkel von $\alpha^0 = 120^0$ entsprechende Bogen, der den Umfang des Grundkreises des Kegels bildet, so ist

$$x : 2S\pi = \alpha^0 : 360^0,\ x = \frac{2S\pi\alpha^0}{360^0} = 2r\pi,\ r = \frac{S\alpha^0}{360^0};$$

die Höhe des Kegels ist $H = \sqrt{S^2 - r^2} = \frac{S}{360}\sqrt{360^2 - \alpha^2}$

und $V = \frac{r^2\pi H}{3} = \frac{S^3\alpha^2\pi}{3.360^3}\sqrt{360^2 - \alpha^2}$.

Speziell $V = \frac{2S^3\pi\sqrt{2}}{81} = 0{\cdot}37024\ m^3$.

Digitized by Google

2) $f = r\pi S$, $S^2\pi : f = 360^0 : \alpha^0$, $S = \sqrt{\frac{360\,f}{\pi\alpha}}$, somit ist

$f = r\pi\sqrt{\frac{360\,f}{\pi\alpha}}$ und $r = \sqrt{\frac{f\alpha}{360\pi}}$;

$h = \sqrt{S^2 - r^2} = \sqrt{\frac{f(360^2 - \alpha^2)}{360\pi\alpha}}$ und $V = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{f^3(360^2 - \alpha^2)\alpha}{360^3\pi}}$,

$V = 2864{\cdot}64\ (2864{\cdot}6)\ dm^3$.

3) Aus $2s\pi : x = 360^0 : \alpha^0$ folgt $x = 2r\pi = \frac{2s\pi\alpha^0}{360^0}$, also $r = \frac{s\alpha^0}{360^0}$,

$h = \sqrt{s^2 - r^2} = \frac{s}{360}\sqrt{360^2 - \alpha^2}$ und

$V = \frac{r^2\pi h}{3} = \frac{s^3\alpha^2\pi}{3.360^3}\sqrt{360^2 - \alpha^2}$.

Speziell $V = \frac{s^3\pi}{648}\sqrt{35} = 0{\cdot}02868196\,s^3$ $(0{\cdot}028682\,s^3)$.

4) Aus $V = \frac{r^2\pi h}{3}$ folgt $h = \frac{3V}{r^2\pi}$, $s = \sqrt{r^2 + h^2} = \frac{1}{r^2\pi}\sqrt{9V^2 + r^6\pi^2}$

und $r\pi s$ = Mantelfläche = M.

$x^0 : 360^0 = r\pi s : s^2\pi$, $x^0 = \frac{r}{s}\,360^0 = \frac{360\,r^3\pi}{\sqrt{9V^2 + r^6\pi^2}} =$

$157^0\,53'\,27''$.

5) $13{\cdot}345\ m^2 = O$ und $31{\cdot}4\ m^2 = O_1$

$r\pi(r + S) = O$, $(r + \frac{1}{2})(r + s + \frac{3}{2})\pi = O_1$; wegen $r + s = \frac{O}{r\pi}$

erhält man $6r^2\pi + r(4O - 4O_1 + 3\pi) + 2O = 0$, daraus ist r zu bestimmen.

$r^2 - 3{\cdot}33139\,r + 1{\cdot}41595 = 0$, $r_1 = 2{\cdot}83128$

ist unbrauchbar, da es $r_1^2\pi$ größer als O ergibt.

$r_2 = 0{\cdot}5\ m$, $s = 8\ m$; genauer: $r_2 = 0{\cdot}5001\ m$, $s = 7{\cdot}9937\ m$.

6) Ist R der Radius der Grundfläche des Zylinders, so beträgt die Oberfläche $6R^2\pi$; $5R^2\pi$ = Mantelfläche des Kegels = $R\pi S$, $S = 5R$, somit

$h = \sqrt{S^2 - R^2} = R\sqrt{24}$ und $V = \frac{2R^3\pi}{3}\sqrt{6} = 226{\cdot}04573\ m^3$.

7) Ist R der Radius der Grundfläche des Kegels und r der des Zylinders, so ist $\frac{R^3\pi\sqrt{3}}{3} = 2r^2\pi$ und $3R^2\pi = 6r^2\pi + 15$.

Daraus folgt: $R = r\sqrt[6]{12}$

$R^2 = r^2\sqrt[3]{12}$ und $r^2\pi(6 - 3\sqrt[3]{12}) + 15 = 0$, also

$r = \sqrt{\frac{5}{\pi(\sqrt[3]{12} - 2)}} = 2{\cdot}3447\ m$, $R = 3{\cdot}5478\ m$.

Digitized by Google

8) Aus $s^2 = h^2 + r^2$ und $h^2 = r^2 + 2rd + d^2$ folgt $s^2 = 2r^2 + 2rd + d^2$ und $r = \frac{-d \pm \sqrt{2s^2 - d^2}}{2}$; es ist nur $r = \frac{-d + \sqrt{2s^2 - d^2}}{2}$ brauchbar, daher

$$M = r\pi s = \frac{\pi s}{2}\left[\sqrt{2s^2 - d^2} - d\right] = 3471\pi\ cm^2,$$

$$V = \frac{r^2\pi h}{3},\ h = d + r = \frac{d + \sqrt{2s^2 - d^2}}{2},$$

$$V = \frac{\pi}{12}(s^2 - d^2)\left[\sqrt{2s^2 - d^2} - d\right] = 40560\pi\ cm^3.$$

9) $r\pi(r + s) = R^2\pi$, $h^2 = s^2 - r^2 = sr$. Daraus folgt durch Addition von $r^2 + rs = R^2$, $s^2 - r^2 = sr$, $s = R$, somit

$$r^2 + rR = R^2,\ r = \frac{R\sqrt{5} - R}{2} \text{ und } h = \frac{R}{2}\sqrt{2\sqrt{5} - 2}$$

$$V = \frac{R^3\pi}{12}(3 - \sqrt{5})\sqrt{2(\sqrt{5} - 1)} = \frac{R^3\pi}{3}\sqrt{\frac{5\sqrt{5} - 11}{2}} = 8{\cdot}4903\ cm^3.$$

10) $O = R^2\pi + R\pi S$, daraus folgt $R = -\frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} + \frac{O}{\pi}}$; nur das obere Zeichen ist zulässig, daher $R = 16{\cdot}89992\ m$,

$$h = \sqrt{S^2 - R^2} = \sqrt{\frac{S^2}{2} - \frac{O}{\pi} + S\sqrt{\frac{S^2}{4} + \frac{O}{\pi}}} = 31{\cdot}78668\ m.$$

$$V = \frac{R^2\pi h}{3} = 9506{\cdot}98\ m^3.$$

11) Aus $O - M = R^2\pi$ folgt $R = \sqrt{\frac{O - M}{\pi}}$ und wegen $R\pi S = M$ $S = \frac{M}{R\pi} = \frac{M}{\sqrt{(O - M)\pi}}$. Nun ist $S^2\pi : M = 360 : \alpha$, daher

$$\alpha = \frac{360\,(O - M)}{M};\ h = \sqrt{S^2 - R^2} = \sqrt{\frac{2\,O\,M - O^2}{(O - M)\pi}}.$$

$$V = \frac{1}{3\pi}\sqrt{O\,(O - M)\,(2M - O)}\,\pi.$$

$V = 10\ m^3$, $\alpha = 129^0\,43'\,4{\cdot}4''$.

12) $B : M = m : n$, $B = r^2\pi$, $M = r\pi s$, daher $r : s = m : n$ und $(r + s) : (m + n) = r : m$, $r + s = \frac{(m + n)\,r}{m}$. Nun ist $O = r\pi(r + s)$, daher $O = \frac{m + n}{m}r^2\pi$; wegen $r : \sqrt{r^2 + h^2} = m : n$ ist auch

$$r^2 = \frac{h^2 m^2}{n^2 - m^2},\ \text{daher } O = \frac{h^2 m\pi}{n - m} = \frac{2000\pi}{11} = 571{\cdot}1986\ m^2 \text{ und}$$

$$V = \frac{r^2\pi h}{3} = \frac{h^3 m^2\pi}{3(n^2 - m^2)} = \frac{200000\pi}{693} = 906{\cdot}6645\ m^3.$$

Digitized by Google

13) $\frac{R^2\pi H}{3} : \frac{r^2\pi h}{3} = n : m$, $R : r = H : h$, $h = \frac{Hr}{R}$, daher

$R^2 H : \frac{r^3 H}{R} = n : m$ oder $R^3 : r^3 = n : m$, somit

$$r = R\sqrt[3]{\frac{m}{n}} = 2\sqrt[3]{4} = 3{\cdot}174802\ cm,$$

$$h = H\sqrt[3]{\frac{m}{n}} = 5\sqrt[3]{4} = 7{\cdot}937005\ cm,$$

$$r^2\pi = R^2\pi\sqrt[3]{\left(\frac{m}{n}\right)^2} = 8\pi\sqrt[3]{2} = 31{\cdot}66527\ cm^2.$$

14) Ist a eine Zehnecksseite und r der Radius des umgeschriebenen Kreises, so ist $r = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$,

$r^2\pi = \frac{a^2}{2}(3 + \sqrt{5})\pi$ und

$$V = \frac{a^2}{2}(3 + \sqrt{5})\frac{\pi h}{3} = \frac{u^2 h\pi}{600}(3 + \sqrt{5}) = 4{\cdot}54798\ dm^3.$$

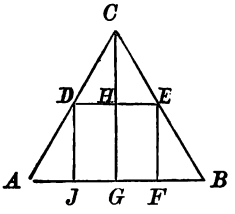
15) $2r^2\pi = R^2\pi$, $R^2 : r^2 = H^2 : h^2$, daher $2 : 1 = H^2 : h^2$, $h = \frac{H}{2}\sqrt{2}$.
Die Entfernung von der Grundfläche ist sonach

$$x = H - \frac{H}{2}\sqrt{2} = \frac{H}{2}(2 - \sqrt{2}).$$

$$H = \frac{3V}{R^2\pi} = 74{\cdot}852672\ cm,\ x = 21{\cdot}923843\ cm.$$

16) Legt man durch den Kegel einen Achsenschnitt und bezeichnet die Kante des Würfels mit a, so ist $DE = a\sqrt{2}$ und $AG : GC = DH : CH$ oder

Fig. 26.



$R : R\sqrt{3} = \frac{a}{2}\sqrt{2} : (R\sqrt{3} - a)$; daraus

$a = \frac{2R\sqrt{3}}{2+\sqrt{6}}$, somit $V : V_1 = \frac{R^3\pi\sqrt{3}}{3} : \frac{8R^3 . 3\sqrt{3}}{(2+\sqrt{6})^3}$

oder $V : V_1 = 1 : 0{\cdot}260167$.

17) Sind die beiden Katheten a und b, so ist die Hypotenuse $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ und die auf die Hypotenuse gefällte Höhe r, so ist wegen $cr = ab$, $r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ und $O = r\pi(a + b)$,

$$O = \frac{ab\pi(a+b)}{\sqrt{a^2 + b^2}},\ V = \frac{r^2\pi c}{3} = \frac{a^2 b^2 \pi}{3\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$O = 50{\cdot}30013\ (50{\cdot}299)\ m^2$, $V = 27{\cdot}189294\ (27{\cdot}189)\ m^3$.

Digitized by Google

Mit Trigonometrie.

18) $r = \frac{p}{2\pi}$, $h = r \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$, $S = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{p}{2\pi \sin \frac{\alpha}{2}}$, daher

$$O = \frac{p^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{4} + 45^0\right)}{2\pi \sin \frac{\alpha}{2}} = 1565 \cdot 4\ m^2,$$

$$V = \frac{p^3 \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}}{24\pi^2} = 3644 \cdot 342\ (3644 \cdot 4)\ m^3.$$

19) Wegen $r \,.\, h = f$ ist $V = \frac{r^2 \pi h}{3} = \frac{f r \pi}{3}$, da $r = h \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, also $h = \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$ ist, so ist $\frac{r^2}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = f$ oder $r = \sqrt{f \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$ und

$$V = \frac{f\pi}{3} \sqrt{f \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = 22 \cdot 61335\ (22 \cdot 6134)\ dm^3.$$

20) Aus $V = \frac{r^2 \pi h}{3} = \frac{r^3 \pi \operatorname{tg} \alpha}{3}$ folgt $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi} \operatorname{cotg} \alpha}$, $S = \frac{r}{\cos \alpha}$, daher $M = r \pi S = \sqrt[3]{\left(\frac{3V}{\sin \alpha}\right)^2 \frac{\pi}{\cos \alpha}} = 140 \cdot 0012\ (140)$ Flächeneinheiten.

21) $V = \frac{r^2 \pi h}{3} = \frac{r^3 \pi}{3} \operatorname{cotg} \alpha$, daraus $r = \sqrt[3]{\frac{3\,V \operatorname{tg} \alpha}{\pi}}$ und

$h = \sqrt[3]{\frac{3\,V \operatorname{cotg}^2 \alpha}{\pi}}$; $r = 2 \cdot 63803\ (2 \cdot 6381)\ cm$,

$h = 6 \cdot 17482\ (6 \cdot 1747)\ cm$.

22) $O = r\pi\,(r + s)$, wegen $r = h \operatorname{tg} \alpha$, $S = \frac{h}{\cos \alpha}$ ist

$$O = \frac{\pi h^2 \sin \alpha\,(\sin \alpha + 1)}{\cos^2 \alpha} = \frac{2\pi h^2 \sin \alpha \,.\, \sin^2\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2 \alpha}$$ und

$$h = \frac{\cos \alpha}{\sin\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right)} \sqrt{\frac{O}{2\pi \sin \alpha}} = 1 \cdot 185535\ (1 \cdot 1856)\ dm.$$

23a) Die größere Kathete sei a, $ac = m$, $a = c \sin \alpha$, daher

$$c = \sqrt{\frac{m}{\sin \alpha}},\ b = c \cos \alpha = \cos \alpha \sqrt{\frac{m}{\sin \alpha}},$$

$$O = b\pi\,(b + c) = \frac{m\pi}{\operatorname{tg} \alpha}(1 + \cos \alpha) = 2\,m\,\pi \cos^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{cotg} \alpha = 159 \cdot 7264\ (159 \cdot 73)\ m^2.$$

Digitized by Google

23*b*) $V_a = \frac{a^2\pi \cdot b}{3}$, $V_b = \frac{b^2\pi \cdot a}{3}$, $V_c = \frac{h^2\pi \cdot c}{3} = 1200 \cdot \pi$;

wo h die auf die Hypotenuse gezogene Höhe ist.

$V_a : V_b = a : b = 3 : 4$, $a = b \operatorname{tg} \alpha$, somit

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$, $\alpha = 36^0\,52'\,12''$, $\beta = 53^0\,7'\,48''$.

$h^2 c = 3600$, $h = a \sin \beta = c \sin \beta \cos \beta = \frac{c \sin 2\beta}{2}$,

somit $c^3 = \frac{14400}{\sin^2 2\beta}$; $c = 25$, $a = 15$, $b = 20$, $h = 12$.

Oder weil $ab = ch$ ist, so $1200\pi = \frac{a^2 b^2 c\pi}{3c^2} = \frac{a^2 b^2 \pi}{3\sqrt{a^2 + b^2}}$ und

wegen $b = \frac{4a}{3}$ ist $1200\pi = \frac{16 a^3 \pi}{45}$, daher

$a = 15$, $b = 20$, $h = 12$.

$O_a = a\pi\,(a + c) = 600\pi$

$O_b = b\,\pi\,(b + c) = 900\pi$

$O_c = h\pi\,(a + b) = 420\pi$.

24) Sind die Seitenlinien mit S und s und der Radius der gemeinsamen Grundfläche mit r bezeichnet, so ist

$$O = r\,\pi\,(S + s) = \frac{r^2\pi}{\cos\alpha \cos\beta}\,(\cos\alpha + \cos\beta) =$$

$$\frac{2\,r^2\pi}{\cos\alpha \cos\beta} \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = M \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$V = \frac{r^2\pi}{3}\,(r \operatorname{tg}\alpha + r \operatorname{tg}\beta) = \frac{r^3\pi}{3}\,\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{Mr}{3} \sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

wenn man $\frac{2r^2\pi}{\cos\alpha\cos\beta} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ gleich M setzt.

$O = 511 \cdot 2889$ $(511 \cdot 29)$ m^2, $V = 759 \cdot 5795$ $(759 \cdot 6)$ m^3.

$V_1 = \frac{r^3\pi \sin(\alpha-\beta)}{3\cos\alpha\cos\beta} = 659 \cdot 743$ $(659 \cdot 7)$ m^3.

25) Rotiert das Dreieck um die Achse a, so

$V_a = \frac{h_a^2 a\pi}{3} = \frac{2F\pi}{3} h_a$ und da $h_a = \frac{2F}{a}$ ist, so

$V_a = \frac{4\pi}{3a} F^2$, um b, so $V_b = \frac{4\pi}{3b} \cdot F^2$, um c, so $V_c = \frac{4\pi}{3c} F^2$,

wo $F^2 = s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)$ und $s = \frac{a+b+c}{2}$; ist das Dreieck gleichschenklig, so ist $a = c$ und

$V_a = V_c = \frac{\pi b^2\,(2a + b)\,(2a - b)}{12a}$; $V_b = \frac{\pi b^2\,(2a + b)\,(2a - b)}{12b}$;

ist das Dreieck rechtwinklig, c die Hypotenuse, so ist

$$V_a = \frac{\pi a b^2}{3},\quad V_b = \frac{\pi a^2 b}{3},\quad V_c = \frac{\pi a^2 b^2}{3c}.$$

Digitized by Google

26) Ist die auf die Seite c gefällte Höhe h, so

$O = h\pi(a+b)$, $V = \frac{h^2\pi c}{3}$; wegen $a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}$, $b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}$

und $h = b\sin\alpha = \frac{c\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}$ ist

$$O = \frac{\pi c^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin^2\gamma}(\sin\alpha+\sin\beta) =$$

$$\frac{2\pi c^2}{\sin^2\gamma}\sin\alpha\sin\beta\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} =$$

$$\frac{\pi c^2\sin\alpha\sin\beta\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}};\quad V = \frac{c^3\pi\sin^2\alpha\sin^2\beta}{3\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

1) $O = 35{\cdot}35602$ $(35{\cdot}356)\ m^2$, $V = 13{\cdot}07301$ $(13{\cdot}0724)\ m^3$.

2) $O = 306{\cdot}4905$ $(306{\cdot}49)\ dm^2$, $V = 277{\cdot}8492$ $(277{\cdot}86)\ dm^3$.

27) $V = \frac{b^3\pi.\sin\alpha.\sin^2\gamma}{12\sin^2\beta}$.

$\gamma = 61^\circ\ 25'\ 10''$ und $V = 2894{\cdot}3847$ $(2894{\cdot}4)\ m^3$.

28) Wenn man den Abstand des Fußpunktes der Höhe vom Mittelpunkt der Basis mit x bezeichnet, so sind h, R, x aus $h^2 = b^2-(R+x)^2$, $h^2 = a^2-x^2$, $h^2 = c^2-(R-x)^2$ zu bestimmen.

$R = \sqrt{55} = 7{\cdot}4161985\ m$,

$V = 5\pi\sqrt{561} = 372{\cdot}05\ m^3$.

29) Aus $D^2 = (2R)^2 = S^2+s^2-2Ss\cos\alpha =$

$S^2+s^2-2Ss+2Ss(1-\cos\alpha)$ folgt

$$D^2 = (S-s)^2+4Ss\sin^2\frac{\alpha}{2} = (S-s)^2\left[1+\frac{4Ss\sin^2\frac{\alpha}{2}}{(S-s)^2}\right].$$

Setzt man nun $\frac{2\sqrt{Ss}\sin\frac{\alpha}{2}}{S-s} = \operatorname{tg}\varphi$, so ist $D = \frac{S-s}{\cos\varphi}$ und da $2f = Ss\sin\alpha = DH$ ist, so $H = \frac{Ss\sin\alpha}{D}$,

$V = \frac{D^2\pi H}{12} = \frac{DSs\pi\sin\alpha}{12}$,

$V = 5334450\ m^3$ $(5334500\ m^3)$; $\varphi = 64^\circ\ 50'\ 54''$.

30) Bezeichnet man die Verbindungslinie des Scheitels mit dem Mittelpunkte der Basis mit t, so

$t = \sqrt{\frac{S^2+s^2-2R^2}{2}} = 43{\cdot}26951\ m$ und

$V = \frac{R\pi F}{3} = 8670\pi = 27237{\cdot}61\ m^3$, wo

$F = \frac{1}{4}\sqrt{(2R+S+s)(2R+S-s)(2R+s-S)(S+s-2R)}$.

Digitized by Google

31) Es sind zwei Fälle möglich: 1) Die Höhe fällt innerhalb der beiden Linien, dann ist $V = \frac{\pi h}{12}(\sqrt{S^2 - h^2} + \sqrt{s^2 - h^2})^2 = 625\pi = 1963 \cdot 4954$ Kubikmeter, die Verbindungslinie des Scheitels mit dem Mittelpunkte der Basis ist $12 \cdot 5\ m$ und $\alpha = 90^0$.
2) Die Höhe fällt außerhalb, dann ist
$V = \frac{\pi h}{12}(\sqrt{S^2 - h^2} - \sqrt{s^2 - h^2})^2 = 49\pi = 153 \cdot 9380$ Kubikmeter, die Verbindungslinie des Scheitels mit dem Mittelpunkte der Basis ist $17 \cdot 3277\ m$ und $\alpha = 16^0\ 15'\ 36 \cdot 5''$ $(16^0\ 15'\ 36'')$.

32) Der Radius des Kreises ist $r = 3 \cdot 73848\ m$, somit sind wieder die drei Seiten des Achsenschnittes bekannt.
$V = \frac{r^2 \pi h}{3} = \frac{r \pi f}{3}$, wo $f = \sqrt{\sigma(\sigma - S)(\sigma - s)(\sigma - 2r)}$ und $\sigma = {}^1/_2 (S + s + 2r)$ bedeutet.
$V = 153 \cdot 0103\ m^3$ $(153 \cdot 01\ m^3)$.

33) Die Basiskante ist $a = \sqrt[3]{6 . V . \operatorname{cotg} \alpha}$.
$h = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \alpha$; die Seitenkante $s = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}$.
Der eingeschriebene Kegel hat $\frac{a}{2}$, der umgeschriebene $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ zum Radius, daher $U = \frac{a^2 \pi h}{12} = \frac{V\pi}{4}$.
$a = 12 \cdot 6992\ m$, $h = 11 \cdot 9055\ m$, $s = 14 \cdot 9123\ m$;
$U = 160 . \pi = 502 \cdot 6548$ Kubikmeter.

Kegelstutz.

34) Die Radien der Grundflächen des Stutzes sind $R_1 = \frac{4R}{5}$ und $r_1 = \frac{4r}{5}$; wegen $2r_1\pi : 2r\pi = 288 : 360$.
$S =$ Seite des Stutzes $= R - r$, $h =$ Höhe des Stutzes $= \sqrt{(R-r)^2 - \left(\frac{4R}{5} - \frac{4r}{5}\right)^2} = {}^3/_5 (R - r)$, somit $V = \frac{16\pi}{125}(R^3 - r)^3$.

35) Das Volumen ist $148 \cdot 989795\ dm^3$, somit ist das Gewicht des Wassers $148 \cdot 989795$ Kilogramm (wobei destilliertes Wasser von 4^0 Celsius vorausgesetzt ist), der Bodendruck beträgt aber 180, somit um $31 \cdot 010205$ Kilogramm mehr.

36) $B : b = (h + x)^2 : x^2$, da $R : r = (h + x) : x = m : n$, so ist $b = \frac{B n^2}{m^2}$ und $V = \frac{Bh}{3m^2}(m^2 + mn + n^2) = 3904\ m^3$.

Digitized by Google

37) $V = \frac{\pi h}{3}\left[\frac{D^2}{4} + \frac{Dd}{4} + \frac{d^2}{4}\right] = \frac{\pi h}{12}[D^2 + d^2 + Dd]$.

Wegen $d : D = 5 : 6$, $h = 8D$ ist $V = \frac{91\pi D^3}{54}$; $V \,.\, S =$ Volumen $\times$ Spez. Gewicht $= 6175000$ Gramm, daher

$V = 2470000 = \frac{91\pi D^3}{54}$. Daraus

$D = 77{\cdot}5592\ cm$, $d = 64{\cdot}6327\ cm$, $h = 620{\cdot}4736\ cm$.

38) Aus $V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{37\pi H}{3} = 1414{\cdot}715\ cm^3$ folgt

$$H = 36{\cdot}51225\ cm.$$

Aus $(H + x) : x = 4 : 3$ folgt $x = 3H$ als Höhe des das Maß ergänzenden Kegels.

$\frac{R^2\pi}{3}.4H = 2447{\cdot}0746 =$ Inhalt des ganzen Kegels, somit ist der Inhalt des das Litermaß ergänzenden Kegels $1447{\cdot}0746 = \frac{bh_1}{3}$.

$B : b = (4H)^2 : h_1^2$, $B : bh_1 = (4H)^2 : h_1^3$,

$h_1 = \sqrt[3]{\frac{H^2(bh_1)}{\pi}} = 122{\cdot}5876\ cm$,

somit ist die Höhe des Litermaßes $4H - h_1 = 23{\cdot}4614\ cm$ und das Gefäß ist um $36{\cdot}51225 - 23{\cdot}4614 = 13{\cdot}05085\ cm$ abzukürzen.

39) $V = \frac{\pi h}{3}[R^2 + r^2 + Rr] = \frac{39\pi R^2}{25}$; R ist zu bestimmen.

$M = (R + r)S\pi = \frac{7RS\pi}{5}$, $S = \sqrt{9 + (R-r)^2} = {}^3/_5\sqrt{25 + R^2}$,

somit $\frac{5M}{7\pi} = RS = \frac{3R}{5}\sqrt{25 + R^2}$, daraus

$R^2 = -{}^{25}/_2 + \frac{25}{42\pi}\sqrt{(21\pi)^2 + (2M)^2}$,

$V = {}^{13}/_{14}[\sqrt{(21\pi)^2 + (2M)^2} - 21\pi] = 47{\cdot}6230374\ m^3$.

Da nun ein Kubikmeter 112 Zentner wiegt, so ist das Gewicht

$$47{\cdot}6230374 \times 112 = 5333{\cdot}78 \text{ Zentner.}$$

40) $O = R^2\pi + R\pi S = B + M$, $M = 4B$, $O = 5B$,

$$R = \sqrt{\frac{O}{5\pi}}, \quad b = \frac{B}{2}.$$

$V = \frac{h}{3}[B + b + \sqrt{Bb}] = \frac{Bh}{3}(1 + {}^1/_2 + \sqrt{{}^1/_2}) = \frac{Bh}{6}(3 + \sqrt{2})$.

Aus $B : b = (h + x)^2 : x^2 = 2 : 1$ folgt $x = h(1 + \sqrt{2})$ als Höhe des Ergänzungskegels; aus $R\pi S = 4B$ ergibt sich $S = 4R$ und aus $(h + x)^2 = S^2 - R^2 = 15R^2$, $h + x = R\sqrt{15}$, somit

Digitized by Google

$h + h(1 + \sqrt{2}) = h(2 + \sqrt{2}) = R\sqrt{15}$, $h = \frac{R\sqrt{15}(2 - \sqrt{2})}{2}$

$V = \frac{R^3\pi\sqrt{15}(4 - \sqrt{2})}{12} = \frac{O}{60}\sqrt[3]{\frac{3O}{\pi}}(4 - \sqrt{2}) = 20{\cdot}976\ m^3$.

41) Wegen $R : h : r = m : n : p$ ist

$V = \frac{n\pi R^3}{3m^3}(m^2 + mp + p^2)$ und $R = m\sqrt[3]{\frac{3V}{n\pi(m^2 + mp + p^2)}}$;

setzt man dafür abkürzend $R = mA$, so ist $r = pA$, $h = nA$,

$O = R^2\pi + r^2\pi + (R + r)\pi S = R\pi(R + S) + r\pi(r + S)$.

Nun ist $S = \sqrt{h^2 + (R - r)^2} = A\sqrt{n^2 + (m - p)^2}$, daher

$O = A^2\pi[m^2 + p^2 + (m + p)\sqrt{n^2 + (m - p)^2}] = 737{\cdot}4617\ cm^2$.

42) $O = R^2\pi + r^2\pi + (R + r)\pi S = 200$ gibt

$r^2 + 5r = \frac{200}{\pi} - 36$, $r = 3{\cdot}3233993$, $V = 209{\cdot}2695\ m^3$.

43) $V = \frac{\pi h}{3}(AB + ab + \sqrt{AB.ab})$, für $V = 2430{\cdot}619$, $A = 27$, $B = 12$, $h = 7$ ergibt sich daraus $ab = 0{\cdot}169559$.

Wegen $\sqrt{AB} : \sqrt{ab} = (h + x) : x$ ist $x = \frac{h\sqrt{ab}}{\sqrt{AB} - \sqrt{ab}} = 0{\cdot}163884$.

$A : a = (h + x) : x$, $a = 0{\cdot}61766\ dm$, $b = 0{\cdot}27452\ dm$.

Mit Trigonometrie.

44) $V = \frac{\pi h r^2}{3}(1 + n + n^2)$, $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{\pi h(1 + n + n^2)}} = 6{\cdot}621843\ dm$,

$R = nr$.

Neigungswinkel $= 90^0 + \text{arc tg}\frac{R - r}{h} = 118^0\,53'\,27''$.

45) $R^2\pi = (2R\pi + 2r\pi)\,{}^1/_2 = R\pi + r\pi$, $R^2 = R + r$.

Da $R - r = 1 \cdot \cos\alpha = \cos\alpha$, so ist $r = R - \cos\alpha$ und $R^2 - 2R + \cos\alpha = 0$. $R = 1 + \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$, der andere Wert ist unbrauchbar, da er r negativ macht; $r = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$;

$R^2\pi = M = \pi\left(1 + \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$.

$R = 1{\cdot}7071$, $r = 1{\cdot}2071$, $R^2\pi = M = 9{\cdot}1553$.

46) $M = (R + r)\pi s$, $R - r = s\cos\alpha$ geben $R = \frac{M + \pi s^2\cos\alpha}{2\pi s}$,

$r = \frac{M - \pi s^2\cos\alpha}{2\pi s}$; mit diesen Werten und mit $h = s\sin\alpha$ geht

Digitized by Google

$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$ über in

$V = \frac{\sin\alpha}{12\pi s}(3M^2 + \pi^2 s^4 \cos^2\alpha) = 379{\cdot}9036\ (379{\cdot}9)\ cm^3.$

47) $R^2\pi - r^2\pi = 8$, $2R\pi : 2r\pi = 5 : 3$ geben $r = \frac{3}{2\pi}\sqrt{2\pi}$,

$R = \frac{5}{2\pi}\sqrt{2\pi}$. $S = \frac{R-r}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $h = (R-r)\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{tg}\alpha$, daher ist

$O = R^2\pi + r^2\pi + (R+r)\pi S = 17 + \frac{8}{\cos\alpha} = 25{\cdot}4853\ dm^2.$

$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{49\sqrt{2\pi}}{6\pi}\operatorname{tg}\alpha = 2{\cdot}30378\ (2{\cdot}3038)\ dm^3.$

48) Die Mantelfläche des ganzen Kegels ist $R\pi S$, die Oberfläche des Stutzes $O = R^2\pi + r^2\pi + \pi(R+r)s = R\pi S$.

Da $R = H\operatorname{cotg}\alpha$, $S = \frac{H}{\sin\alpha}$, $r = x\operatorname{cotg}\alpha$, $s = \frac{H-x}{\sin\alpha}$ ist, so ist

$$\pi\operatorname{cotg}^2\alpha\,[H^2 + x^2] + \frac{\pi\operatorname{cotg}\alpha}{\sin\alpha}[H^2 - x^2] = \frac{\pi H^2\operatorname{cotg}\alpha}{\sin\alpha}.$$

Ist $H = 1$, so $x = \sqrt{\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$. Da $x < 1$ sein muß, so muß $\cos\alpha < 1 - \cos\alpha$ oder $\cos\alpha < {}^1/_2$, $\alpha > 60^0$ sein.

Für $H = 1$ ist $x = \sqrt{\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{2\cos\alpha}$, somit

$$H : x = 2\sin\tfrac{\alpha}{2} : \sqrt{2\cos\alpha} = 1 : 0{\cdot}58574.$$

49) Da $R = r + d$ und $h = (R-r)\operatorname{tg}\alpha = d\operatorname{tg}\alpha$ ist, so ist $V = \frac{\pi d\operatorname{tg}\alpha}{3}(3r^2 + 3rd + d^2)$, daraus folgt

$$r = -\frac{d}{2} + {}^1/_2\sqrt{\frac{12V\operatorname{cotg}\alpha - \pi d^3}{3\pi d}} = 7{\cdot}8758\ dm,$$

$$R = r + d = 12{\cdot}1258\ dm,$$

50) Wegen $R - r = h\operatorname{cotg}\alpha$ ist

$V = \frac{\pi h}{3}(3r^2 + 3rh\operatorname{cotg}\alpha + h^2\operatorname{cotg}^2\alpha)$, daher

$$r = -\frac{h\operatorname{cotg}\alpha}{2} + \sqrt{\frac{V}{\pi h} - \frac{h^2\operatorname{cotg}^2\alpha}{12}} = 4{\cdot}5\ m.$$

$$R = h\operatorname{cotg}\alpha + r = \frac{h\operatorname{cotg}\alpha}{2} + \sqrt{\frac{V}{\pi h} - \frac{h^2\operatorname{cotg}^2\alpha}{12}} = 7{\cdot}5\,m.$$

Digitized by Google

51) Aus $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$ folgt für $V = 36$ und $h = 2$ $R^2 + r^2 + Rr = \frac{54}{\pi}$, und aus $R^2\pi : r^2\pi = 5 : 3$; $r^2 = \frac{3R^2}{5}$, daher

$$R^2(1 + {}^3/_5 + \sqrt{}{}^3/_5) = \frac{54}{\pi}, \quad R = 2{\cdot}69046\ m.$$

$R : r = (h + x) : x = \sqrt{5} : \sqrt{3}$ gibt $x = \frac{h}{2}(3 + \sqrt{15})$, somit ist die Höhe des ganzen Kegels $\frac{h}{2}(5 + \sqrt{15}) = 8{\cdot}87298\ m$ und $V = 67{\cdot}2593\ m^3$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{R}, \quad \alpha = 73^0\,7'\,54''.$$

52) $V = a^2\pi b - \frac{a^2\pi b}{3} = \frac{2a^2\pi b}{3}$, wenn die Basiskathete mit a, die andere mit b bezeichnet wird. Wegen $a = \frac{p}{\cos\alpha}$ und $b = \frac{p}{\sin\alpha}$ ist, dann

$$V = \frac{2p^3\pi}{3\cos^2\alpha\,\sin\alpha} = 459{\cdot}1753\ (459{\cdot}18)\ m^3.$$

53) Bezeichnet man den Abstand des Eckpunktes A von der Achse mit d und von der Seite a mit h, so entsteht durch die Rotation des Dreieckes ein Kegelstutz ($R = a$, $r = d$, $h = h$), aus dem ein Kegel herausgebohrt ist ($R = d$, $h = h$), daher

$$V = \frac{\pi h}{3}(a^2 + d^2 + ad) - \frac{d^2\pi h}{3} = \frac{\pi h}{3}(a^2 + ad).$$

Wegen $h = b\sin\gamma$, $d = b\cos\gamma$ ist dann $V = \frac{\pi ab\sin\gamma}{3}(a + b\cos\gamma)$.

Ist $a = b$ und $\gamma = 60^0$, so ist $V = \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{4}$.

54) Da die kleinere Diagonale gleich a ist, so ist die größere Diagonale $a\sqrt{3}$. Durch die Rotation entsteht ein Doppelkegelstutz $\left(R = a\sqrt{3},\ r = \frac{a}{2}\sqrt{3},\ h = \frac{a}{2}\right)$, aus dem zwei Kegel herausgebohrt sind $\left(R = \frac{a}{2}\sqrt{3},\ h = \frac{a}{2}\right)$, daher

$$O = 4a^2\pi\sqrt{3} = 3400{\cdot}874\ cm^2,$$
$$V = \frac{3a^3\pi}{2} = 9203{\cdot}883\ cm^3,$$

was sich auch und recht einfach mit der Guldinschen Regel ergibt.

Ist f die Fläche und ϱ der Abstand des Schwerpunktes derselben von der Drehungsachse, so $V = 2\varrho\pi f$;
ist der Umfang u, so $O = 2\varrho\pi u$.

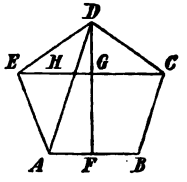
Digitized by Google

55) Es entsteht ein Zylinder ($r = s\sqrt{3}$, $h = s$) und zwei Kegelstutze $\left(R = s\sqrt{3},\ r = \frac{s}{2}\sqrt{3},\ h = \frac{s}{2}\right)$, aus denen Kegel herausgebohrt sind $\left(R = \frac{s}{2}\sqrt{3},\ h = \frac{s}{2}\right)$, daher

$$V = \frac{9s^3\pi}{2} = 3053{\cdot}628\ dm^3.$$

56) Das Fünfeck sei $ABCDE$ und rotiere um die von der Ecke D auf AB gefällte Normale DF. Fällt man von E eine Normale EG auf DF, so ist

Fig. 26a.



$EG = s \sin 54^0 = s \sin \alpha$, somit

$$O = AF^2\pi + (2\pi AF + 2\pi . EG)\frac{s}{2} + 2\pi . EG . \frac{s}{2} =$$

$$\frac{\pi s^2}{4} + \frac{\pi s^2}{2} + \pi s^2 \sin\alpha + \pi s^2 \sin\alpha = \frac{3\pi s^2}{4} + 2\pi s^2 \sin\alpha =$$

$29{\cdot}75759\ dm^2$.

$$V = \frac{\pi h}{3}(EG^2 + AF^2 + EG . AF) + \frac{EG^2\pi . FD}{3}.$$

Fällt man von A eine Normale auf EG, so ist diese h und schließt mit AE den Winkel von 18^0 ein, daher $h = s \cos 18^0$ und

$$V = \frac{\pi s^3 \cos 18}{3}[\sin^2\alpha + {}^1/_2 \sin\alpha + {}^1/_4] + \frac{\pi s^3}{3}\sin^2\alpha \cos\alpha.$$

Nun ist $\frac{\pi s^3}{3}\sin^2\alpha\cos\alpha = \frac{\pi s^3}{6}\sin 2\alpha \sin\alpha = \frac{\pi s^3}{6}\cos 18 \sin\alpha$,

daher $V = \frac{\pi s^3 \cos 18}{3}(\sin^2\alpha + {}^1/_2 \sin\alpha + {}^1/_4 + {}^1/_2 \sin\alpha) =$

$\frac{\pi s^3 \cos 18}{3}(\sin\alpha + {}^1/_2)^2 = \frac{\pi s^3 \cos 18}{3}(\sin\alpha + \sin 30)^2$,

daher $V = \frac{4\pi s^3}{3}\cos 18 \sin^2 42 \cos^2 12 = \frac{4\pi s^3}{3}\cos 18 \cos^2 48 \times \cos^2 12 = 13{\cdot}6526\ dm^3$.

Oder ohne Trigonometrie. Da $EG = \frac{EC}{2}$ und

$EC : s = s : (EC - s)$, so $EC = \frac{s}{2} + \frac{s}{2}\sqrt{5}$ und

$EG = \frac{s}{4}(\sqrt{5} + 1)$, $AF = \frac{s}{2}$; daher

$$O = \frac{s^2}{4}\pi + \left[\frac{s}{2} + \frac{s}{4}(\sqrt{5} + 1)\right]\pi s + \frac{s}{4}(\sqrt{5} + 1)\pi s =$$

$$\frac{s^2}{4}\pi + \frac{s^2\pi}{2} + \frac{\pi s^2}{2}(\sqrt{5} + 1) = \frac{\pi s^2}{4}(5 + 2\sqrt{5}) = 29{\cdot}75759$$

$$V = EG^2 . \pi . \frac{DG}{3} + \frac{FG\pi}{3}[EG^2 + AF^2 + EG . AF].$$

Digitized by Google

Da $EG = \frac{s}{4}(\sqrt{5}+1)$, $AF = \frac{s}{2}$ ist, so

$$V = \frac{DG \cdot \pi}{24} s^2 (3+\sqrt{5}) + \frac{FG\pi}{24} s^2 (6+2\sqrt{5}).$$

Nun ist $AD = EC = \frac{s}{2}(\sqrt{5}+1)$, daher

$$DH = \frac{s}{2}(\sqrt{5}+1) - s = \frac{s}{2}(\sqrt{5}-1),$$

$$DF = \sqrt{AD^2 - AF^2} = \frac{s}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}, \text{ somit}$$

$$DG : DH = DF : DA,$$

$$DG = \frac{s}{4}(3-\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

$$GF = DF - DG = \frac{s}{4}(\sqrt{5}-1)\sqrt{5+2\sqrt{5}} \text{ und}$$

$$V = \frac{\pi s^3}{24}(2+\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}} = 13{\cdot}6526.$$

57) Das Volumen des ersteren ist: $V = R^3\pi$, das des anderen $V_1 = {}^7/_{12} R^3\pi\sqrt{3}$, daher

$$V : V_1 = R^3\pi : \frac{7R^3\pi}{12}\sqrt{3} = 12 : 7\sqrt{3} = 0{\cdot}9897433 : 1.$$

58) Zieht man im ersteren Falle von den Ecken Normale auf die Achse, so sind diese die halben Seiten eines regelmäßigen Sechseckes, Dreieckes, der Radius, oder $\frac{r}{2}$, $\frac{r}{2}\sqrt{3}$, r, daher

$$O = \frac{2\pi r}{2} s + 2\pi\left(\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\sqrt{3}\right)s + 2\pi\left(\frac{r}{2}\sqrt{3} + r\right)s =$$
$$2r\pi s(2+\sqrt{3}),$$

und da die Seite des Zwölfeckes $s = r\sqrt{2-\sqrt{3}}$ ist, so

$$O = 2r^2\pi(2+\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}} = 2r^2\pi \cdot 1{\cdot}9318517 =$$
$$121381{\cdot}87\ cm^2.$$

Zieht man im zweiten Falle von den Ecken Normale auf die Achse, so sind diese die halbe Zwölfecksseite ϱ_3, die Hälfte der Seite eines eingeschriebenen Quadrates ϱ_2, und $\frac{r}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} = \varrho_1$, somit

$$O_1 = 2\varrho_1\pi s + 2\pi s(\varrho_1+\varrho_2) + 2\pi s(\varrho_2+\varrho_3) =$$
$$2\pi s(2\varrho_1 + 2\varrho_2 + \varrho_3) =$$
$$2\pi r\sqrt{2-\sqrt{2}}\,[r\sqrt{2+\sqrt{3}} + r\sqrt{2} + \tfrac{r}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}] =$$
$$2\pi r^2[2 - {}^1/_2\sqrt{3} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}] =$$
$$2r^2\pi \cdot 1{\cdot}8660254 = 117245{\cdot}88\ cm^2, \text{ daher}$$
$$O - O_1 = 2r^2\pi \cdot 0{\cdot}0658263 = 4135{\cdot}988\ cm^2.$$

Digitized by Google

59) Aus $a:b=5:3$ und $\frac{a+b}{2}=28{\cdot}5$ folgt $a=36\,dm$, $b=21{\cdot}6\,dm$

$$h=\frac{a-b}{2}\operatorname{tg}\alpha=7{\cdot}2\operatorname{tg}\alpha,\quad S=\frac{7{\cdot}2}{\cos\alpha}.$$

$$O=2h\pi(b+S)=2136{\cdot}65\,dm^2,$$

$$V=\frac{2}{3}\cdot\frac{h^2\pi}{}\cdot\frac{a-b}{2}+h^2\pi b=\frac{h^2\pi}{3}(a+2b)=8326{\cdot}78$$

$(8326{\cdot}8)\,dm^3$.

60) $V=\frac{\pi}{3}(h_1+h_2)(r^2+p^2+pr)-\frac{\pi h_1}{3}(p^2+q^2+pq)-$

$$\frac{\pi h_2}{3}(r^2+q^2+qr)$$

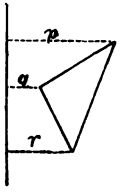
$$=\frac{\pi}{3}(h_1r^2+h_1pr+h_2p^2+h_2pr-h_1q^2-h_1pq-h_2q^2-h_2qr).$$

Beachtet man nun, daß der Flächeninhalt des Dreieckes ausgedrückt werden kann durch

$$F=(p+r)\frac{h_1+h_2}{2}-(p+q)\frac{h_1}{2}-(r+q)\frac{h_2}{2}=$$

$$\tfrac{1}{2}(rh_1+ph_2-qh_1-qh_2),$$

Fig. 27.



so erhält man:

$$V=\frac{\pi}{3}(rh_1+ph_2-qh_1-qh_2)(p+q+r)=$$

$\frac{2\pi F}{3}(p+q+r)$. Da $\frac{p+q+r}{3}=d$, d. i. dem Abstande des Schwerpunktes des Dreieckes von der Umdrehungsachse ist, so ist auch $V=F.2d\pi$, d. h. gleich dem Inhalte eines Prismas, welches die Dreiecksfläche zur Basis und die vom Schwerpunkt beschriebene Kreisperipherie zur Höhe hat (Guldinsche Regel).

61) Bei der Rotation entsteht ein Hohlzylinder ($R=S+s\sqrt{3}$, $r=S$, $h=s$), auf dem oben und unten ein ausgehöhlter Kegelstutz sich befindet. Der Kegelstutz hat $R=S+s\sqrt{3}$, $r=S$, $h=\frac{s}{2}$, der herausgebohrte Kegelstutz hat $R=S+\frac{1}{2}s\sqrt{3}$, $r=S$, $h=\frac{s}{2}$, daher ist

$$O=6\pi s(2S+s\sqrt{3})=1424{\cdot}537\ (1424{\cdot}55)\,cm^2.$$

$$V=\frac{3\pi s^2}{2}(2\sqrt{3}S+3s)=2775{\cdot}792\ (2775{\cdot}8)\,cm^3.$$

Dieselben Resultate erhält man auch und schneller nach der Guldinschen Regel.

Digitized by Google

62) $V - v = \frac{\pi h}{3}(R^2 - r^2)$

h ist zu bestimmen. Da $h = R \operatorname{tg} \alpha$ und $h = r \operatorname{tg} 3\alpha$ ist, so ist $R \operatorname{tg} \alpha = r \operatorname{tg} 3\alpha$ und $R \operatorname{tg} \alpha = r \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha} = r \operatorname{tg} \alpha \frac{3 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$

daraus $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{R - 3r}{3R - r}}$, somit

$h = R\sqrt{\frac{R - 3r}{3R - r}}$ und $V - v = \frac{\pi R}{3}(R^2 - r^2)\sqrt{\frac{R - 3r}{3R - r}}$.

Speziell: $V - v = \frac{910\pi}{27}\sqrt{3}$.

63) Da der Kegel die Höhe $2a$ hat und die im Achsenschnitte in der halben Höhe zur Basis parallel gezogene Gerade $a\sqrt{2}$ ist, so ist die Basis dieses Achsenschnittes $2a\sqrt{2}$, und der Inhalt des Kegels $\frac{4a^3\pi}{3}$. Der zweite Würfel hat die Kante $\frac{a}{2}$, der dritte $\frac{a}{4}$ etc. Daher ist ihr Inhalt $a^3 + \frac{a^3}{8} + \frac{a^3}{64} + \ldots = \frac{8a^3}{7}$ und

$J : J_1 = \frac{8a^3}{7} : \frac{4a^3\pi}{3} = 6 : 7\pi.$

$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\alpha = 70^\circ 31' 43{\cdot}6''$.

§ 27. Kugel.

1) $O = 4r^2\pi$, $V = \frac{4r^3\pi}{3}$, $O_1 = \frac{n-1}{n} 4r^2\pi = 4\varrho^2\pi$

daher $\varrho = r\sqrt{\frac{n-1}{n}}$ und $V_1 = 4\varrho^3\pi = \frac{4\pi r^3}{3}\sqrt{\left(\frac{n-1}{n}\right)^3}$

$V - V_1 = U = \frac{4\pi r^3}{3}\left[1 - \sqrt{\left(\frac{n-1}{n}\right)^3}\right] = 1{\cdot}4681\, r^3.$

2) Ist R der Radius der Kugel, so ist $x + d = 2R$ und $r^2 = dx$, daher

$R = \frac{r^2 + d^2}{2d}$ und $O = \pi\left(\frac{d^2 + r^2}{d}\right)^2 = 9524{\cdot}93\ cm^2.$

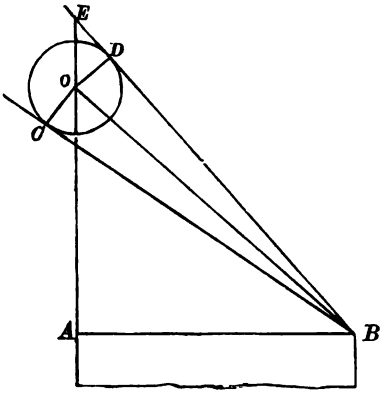
$V = \frac{\pi}{6}\left(\frac{d^2 + r^2}{d}\right)^3 = 87411{\cdot}04\ cm^3.$

3) AB sei $d = 19{\cdot}3\ m$ und der Beobachter bestimme von B aus den Elevationswinkel der Spitze, also den Winkel, den die von B aus an den Kreis gezogene obere Tangente BDE mit AB

Digitized by Google

bildet, $\alpha = < DBA$, ferner den Gesichtswinkel der Kugel, also den Winkel, den die beiden von B aus an den Kreis gezogenen Tangenten bilden, $\delta = < CBD$.

Fig. 28.



Wegen $CO \perp CB$ und wegen $< CBO = < DBO = \frac{\delta}{2}$ ist $CO = BO \sin \frac{\delta}{2}$, nun ist $AB = d = BO \cos\left(\alpha - \frac{\delta}{2}\right)$, daher

$$BO = \frac{d}{\cos\left(\alpha - \frac{\delta}{2}\right)} \text{ und } r = CO = \frac{d \sin \frac{\delta}{2}}{\cos\left(\alpha - \frac{\delta}{2}\right)}.$$

$4r^2\pi = 10 \cdot 1623\ m^2$ $(10 \cdot 162\ m^2)$.

4) $\frac{4R^3\pi}{3} - \frac{4r^3\pi}{3} = a$, $R = r + d$, daraus

$$r = -\frac{d}{2} + {}^1/_2 \sqrt{\frac{a}{\pi d} - \frac{d^2}{3}} = 1\ m.$$

$$R = \frac{d}{2} + {}^1/_2 \sqrt{\frac{a}{\pi d} - \frac{d^2}{3}} = 3\ m.$$

5) Der Inhalt der Kugel ist $V = \frac{4\pi}{3} \sqrt{\left(\frac{O}{4\pi}\right)^3}$, der des Zylinders $\varrho^2\pi h$, somit $\varrho^2\pi h = \frac{4\pi}{3} \sqrt{\left(\frac{O}{4\pi}\right)^3}$ und da $2\varrho\pi h = O$, also $\varrho\pi h = \frac{O}{2}$ und $\varrho^2\pi h = \frac{\varrho O}{2}$ sein muß, so

$$\frac{\varrho O}{2} = \frac{4\pi}{3} \sqrt{\left(\frac{O}{4\pi}\right)^3} \text{ und } \varrho = {}^1/_3 \sqrt{\frac{O}{\pi}} = 1 \cdot 13\ m.$$

6) $\varrho^2\pi h = \frac{4\pi}{3} \sqrt{\left(\frac{O}{4\pi}\right)^3} = {}^1/_6 \sqrt{\frac{O^3}{\pi}}$, $h = 2r = 2\sqrt{\frac{O}{4\pi}} = \sqrt{\frac{O}{\pi}}$, daher

$$\varrho = \sqrt{\frac{O}{6\pi}},\ M = 2\pi\varrho h = \frac{O\sqrt{6}}{3} = 23 \cdot 0859\ m^2.$$

7) Ist ϱ der Grundradius und $2s$ die Höhe des Zylinders, so $V = 2\varrho^2\pi s$.

Aus $2\varrho^2\pi + 4\varrho s\pi = 3r^2\pi$ und $r^2 = \varrho^2 + s^2$ folgt $20s^4 - 12r^2s^2 + r^4 = o$ oder $(10s^2 - r^2)\ (2s^2 - r^2) = o$ $s^2{}_1 = \frac{r^2}{10}$,

Digitized by Google

$s_2^2 = \frac{r^2}{2}$, somit $\varrho_1^2 = \frac{9r^2}{10}$, $\varrho_2^2 = \frac{r^2}{2}$ und $V_1 = \frac{9r^3\pi}{50}\sqrt{10}$,

$$V_2 = \frac{r^3\pi}{2}\sqrt{2}.$$

8) Die Seite des regelmäßigen Sechseckes ist $\frac{2r\sqrt{3}}{3}$, daher sind beide Grundflächen $4r^2\sqrt{3}$, die Mantelfläche $8r^2\sqrt{3}$, folglich $O_1 = 12r^2\sqrt{3}$ und $V_1 = 2r^2\sqrt{3} \cdot 2r = 4r^3\sqrt{3}$; nun ist aus $V = \frac{4r^3\pi}{3}$ $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$, somit

$$O_1 = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\sqrt[3]{36\pi V^2}, \quad V_1 = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}V.$$

9) Der in der halben Höhe des Prismas parallel zur Grundfläche geführte Schnitt muß die Kugel in einem größten Kreise schneiden.

$O = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3} = 41{\cdot}56922$, $V = \frac{a^3}{4} = 16$;

$O_1 = \frac{a^2\pi}{3} = 16{\cdot}75516$, $V_1 = \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{54} = 6{\cdot}44907$;

$O : O_1 = 1 : 0{\cdot}4030665$.

10) $\frac{4R^3\pi}{3} + \frac{4r^3\pi}{3} = a^3$, $R : r = 1 : n$, daher $R^3 = \frac{3a^3}{4\pi(1+n^3)}$ und $r^3 = \frac{3a^3n^3}{4\pi(1+n^3)}$, $V = \frac{a^3}{1+n^3}$, $V_1 = \frac{a^3n^3}{1+n^3}$.

11) Die Höhe eines Seitendreieckes ist $\frac{a}{2}\sqrt{3}$, daher ist zunächst die Frage, wie groß ist der Radius des einem Dreiecke mit den Seiten a, $\frac{a}{2}\sqrt{3}$, $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ eingeschriebenen Kreises?

$r = \frac{a}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) = 0{\cdot}258819\,a$,

$V = \frac{a^3\pi}{12}\sqrt{2}(3\sqrt{3} - 5) = 0{\cdot}0726235\,a^3$.

12) Die Diagonale der Grundfläche ist $a\sqrt{2}$, somit ist zunächst die Frage, wie groß ist der Radius des einem Dreiecke mit den Seiten $a\sqrt{2}$, $\frac{3a}{\sqrt{2}}$, $\frac{3a}{\sqrt{2}}$ umgeschriebenen Kreises?

$R = \frac{9a}{8}$, $V = \frac{2a^3}{3}$.

13) Die Pyramide hat als Basiskante $\frac{R}{2}\sqrt{3}$, somit als Basisfläche $\frac{9R^2}{8}\sqrt{3}$ und die Höhe der Pyramide ist entweder $\frac{3R}{2}$ oder $\frac{R}{2}$, daher ist der Kubikinhalt entweder

Digitized by Google

$\frac{9R^3\sqrt{3}}{16}$ oder $\frac{3R^3\sqrt{3}}{16}$, daher der Radius $\frac{3R}{4}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{\pi}}$ oder $\frac{R}{4}\sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}}{\pi}}$; $V_1 = 324$ Kubikmeter, $V_2 = 108$ Kubikmeter,

$$r_1 = 4{\cdot}260744\ m, \qquad r_2 = 2{\cdot}954235\ m.$$

14) Aus $(r - x) : x = x : r$ folgt $x = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Ist ϱ der Radius der Schnittfläche, so ist

$$\varrho^2 = \left[r + \tfrac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)\right]\left[r - \tfrac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)\right] \text{ und}$$

$$\varrho = \tfrac{r}{2}\sqrt{2(\sqrt{5} - 1)}.$$

Die Pyramide hat als Basis ein Quadrat, dessen eine Seite $\varrho\sqrt{2}$ ist; die Höhe der Pyramide ist $\frac{r}{2}(\sqrt{5} + 1)$, somit $V = \frac{2r^3}{3}$.

Die Seitenkante der Pyramide ist $r\sqrt{\sqrt{5} + 1}$, daher ist die Höhe eines Seitendreieckes $\frac{r}{2}\sqrt{3\sqrt{5} + 5}$, die Mantelfläche $= r^2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$ und die Oberfläche

$= r^2[(\sqrt{5} - 1) + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}]$.

$$\sin\alpha = \frac{\text{Höhe der Pyramide}}{\text{Höhe einer Seitenfläche}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{3\sqrt{5} + 5}} = 0{\cdot}945742,$$

$\alpha = 71^\circ\,2'\,21{\cdot}5''$ $(71^\circ\,2'\,20'')$.

15) $O = r^2\pi + r\pi\sqrt{r^2 + h^2} = 4r_1^2\pi$, ist nun $2r_1 = d$, so

$$d^2 = r(r + \sqrt{r^2 + h^2}).$$

Man bestimmt zunächst $S = \sqrt{r^2 + h^2}$, d. h. die Seite eines Quadrates, welches flächengleich ist mit den Quadraten über r und h, dann ist $d^2 = r(r + S)$. Die mittlere geometrische Proportionale d ist auf mehrere Arten zu konstruieren.

$$r_1 = 4{\cdot}8989795.$$

16) Aus $O : O_1 = 3 : 1$ oder $3r^2\pi : 4r_1^2\pi = 3 : 1$ folgt $r = 2r_1$, daher $V = \frac{8r_1^3\pi\sqrt{3}}{3}$, $V_1 = \frac{4r_1^3\pi}{3}$ und der Inhalt der Kugel verhält sich zu dem des Kegels wie $1 : 2\sqrt{3}$ oder wie $1 : 3{\cdot}4641016$.

17) Ist ϱ der Radius der Grundfläche des Kegels, so $m\varrho^2\pi = \varrho\pi\sqrt{h^2 + \varrho^2}$, wo h die Höhe des Kegels bedeutet.

Aus $\frac{\varrho^2\pi h}{3} = \frac{4r^3\pi}{3}$ folgt $\varrho^2 h = 4r^3$ und wegen $m\varrho = \sqrt{h^2 + \varrho^2}$

Digitized by Google

oder $\varrho^2 = \frac{h^2}{m^2-1}$ ist dann $\frac{h^3}{m^2-1} = 4r^3$,

$$h = r\sqrt[3]{4(m^3-1)} = 4{\cdot}95265\ dm.$$

$$\varrho = r\sqrt[6]{\frac{16}{m^2-1}} = 1{\cdot}75104\ dm.$$

18) Der größte Kugelkreis ist $R^2\pi$, daher ist der Grundkreis des Kegels $\frac{R^2\pi}{2} = \varrho^2\pi$, $\varrho = \frac{R}{2}\sqrt{2}$, $h = \sqrt{R^2-\varrho^2} = \frac{R}{2}\sqrt{2}$.

Nun ist $\frac{R^3\pi\sqrt{2}}{12} = V$, daher $\frac{4R^3\pi}{3} = 8\sqrt{2}V = 1502{\cdot}46\ m^3$.

19) Man bestimme zunächst den Radius des Kreises, der sich dem Dreiecke mit den Seiten $2r$, $\sqrt{r^2+h^2}$, $\sqrt{r^2+h^2}$ einschreiben läßt.

$$O = \frac{4r^2h^2\pi}{(r+s)^2} = \frac{4r^2\pi}{h^2}(\sqrt{r^2+h^2}-r)^2 = 144\pi =$$
$$452{\cdot}38933\ dm^2.$$

$$V = \frac{4r^3h^3\pi}{3(r+s)^3} = \frac{4r^3\pi}{3h^3}(\sqrt{r^2+h^2}-r)^3 = 288\pi =$$
$$904{\cdot}77867\ dm^3.$$

20) Ist ϱ der Radius der Grundfläche des Kegels, so $h:\varrho = \varrho:(2r-h)$, wegen $h = 2\varrho$ folgt dann $\varrho = \frac{4r}{5}$.

$$O = \frac{16r^2\pi}{25}(1+\sqrt{5}) = 416{\cdot}416\ dm^2,$$

$$V = \frac{128r^3\pi}{375} = 549{\cdot}033\ dm^3.$$

21) $3\varrho^2\pi = R^2\pi$ gibt $\varrho = \frac{R}{3}\sqrt{3}$, $h = \sqrt{R^2-\varrho^2} = \sqrt{3\varrho^2-\varrho^2} = \varrho\sqrt{2}$, daher

$\frac{\varrho^3\pi\sqrt{2}}{3} = V$ und $\varrho^3 = \frac{3V\sqrt{2}}{2\pi} = \left(\frac{R}{3}\sqrt{3}\right)^3$, daher

$$R = \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{6}V}{2\pi}} = 11{\cdot}89761\ m.$$

22) Aus $h:s = m:n$ folgt $h = \frac{ms}{n}$, daher $s^2 = \frac{m^2s^2}{n^2} + r^2$ und

$s = \frac{nr}{\sqrt{n^2-m^2}}$. $O = r^2\pi\left[1+\frac{n}{\sqrt{n^2-m^2}}\right] = O_1 = 4\varrho^2\pi$. Daraus

$$\varrho = \frac{r}{2}\sqrt{1+\frac{n}{\sqrt{n^2-m^2}}} = 4{\cdot}8989795\ m.$$

23) Da $s = \sqrt{R^2+h^2}$, so ist $\varrho_1 = \frac{2f}{u} = \frac{Rh}{R+\sqrt{R^2+h^2}}$ und

$\varrho_2 = \frac{R^2+h^2}{2h}$ der Radius der ein- respektive umgeschriebenen Kugel und

Digitized by Google

$$o = 4\pi\left(\frac{Rh}{R+\sqrt{h^2+R^2}}\right)^2;\quad v = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{Rh}{R+\sqrt{h^2+R^2}}\right)^3;$$
$$O = \pi\left(\frac{h^2+R^2}{h}\right)^2;\quad V = \frac{\pi}{6}\left(\frac{h^2+R^2}{h}\right)^3.$$

24) Die Oberfläche des Kegels ist $\frac{O}{2}(1+\sqrt{3}) = 428{\cdot}9319756\ m^2$.

25) $\varrho^2\pi + \varrho\pi S = {}^1/_{128}\cdot 4R^2\pi$, somit $\varrho^2 + \varrho s = \frac{3}{32}R^2$, und wegen $R = 2\varrho + 2s$ ist $\varrho^2 + \varrho s = \frac{3}{8}(\varrho^2 + 2\varrho s + s^2)$, daraus

$5\varrho^2 + 2\varrho s - 3s^2 = 0$, $(5\varrho - 3s)(r+s) = 0$.

Nur der Wert $5\varrho - 3s = 0$ ist zulässig.

$s = \frac{5\varrho}{3}$. Nun ist aber auch $\varrho h = F = \varrho\sqrt{s^2-\varrho^2}$, daher

$$\varrho\sqrt{\frac{25\varrho^2}{9}-\varrho^2} = \frac{4\varrho^2}{3} = F;\quad \varrho = {}^1/_2\sqrt{3F},\quad s = \frac{5}{6}\sqrt{3F}.$$

Speziell $\varrho = 21\ m$, $s = 35\ m$.

26) Ist R der Radius der Kugel und r der Radius der Grundfläche des Kegels, so

$R : S = \sin\frac{\alpha}{2} : \sin(180-\alpha) = \sin\frac{\alpha}{2} : 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ oder

$S = 2R\cos\frac{\alpha}{2}$, $r = S\sin\frac{\alpha}{2} = R\sin\alpha$, $h = S\cos\frac{\alpha}{2} = 2R\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

$M = r\pi S = 2R^2\pi\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$, $V = \frac{r^2\pi h}{3} = \frac{2R^3\pi}{3}\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$

und $R = \sqrt{\frac{O}{4\pi}} = 1{\cdot}99471\ m$.

$M = 13{\cdot}46482\ m^2$, $V = 4{\cdot}8219917\ m^3$.

27) $r = R\sin\alpha$, $h = R + R\cos\alpha = 2R\cos^2\frac{\alpha}{2}$, somit

$V_1 = \frac{r^2\pi h}{3} = \frac{2\pi R^3}{3}\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$, aus $\frac{4R^3\pi}{3} = V$ folgt

$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$, daher $V_1 = \frac{V}{2}\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

$R = 8{\cdot}652584\ cm$, $V_1 = 800{\cdot}00013\ cm^3$

$(R = 8{\cdot}6525\ cm$, $V_1 = 800\ cm^3)$.

28) Bezeichnet man die beiden Sehnen mit s und s_1, so ist

$O = h\pi(s+s_1)$, $V = \frac{h^2\pi}{3}2r$ und $O_1 = 4r^2\pi$, $V_1 = \frac{4r^3\pi}{3}$,

$s = 2r\cos\alpha$, $s_1 = 2r\sin\alpha$, $h = s\sin\alpha = r\sin 2\alpha$ und

$O = 2r^2\pi\sin 2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha) = 2\sqrt{2}r^2\pi\sin 2\alpha\cos(45-\alpha) = 10322{\cdot}75$

$V = \frac{2r^3\pi}{3}\sin^2 2\alpha = 79778{\cdot}2$; $O_1 = 20106{\cdot}2$, $\Delta O = 9783{\cdot}45$

$V_1 = 268082{\cdot}6$, $\Delta V = 188304{\cdot}4$.

Digitized by Google

29) Die Ebene des kleinen Kreises zerteilt den auf ihr normalen Durchmesser in die beiden Teile x und $(2R - x)$, daher $r^2 = x(2R - x)$ oder wegen $2r\pi = 8\pi$ ist $r = 4$ und $x^2 - 10x + 16 = 0$; die Höhe der beiden Kegel ist sonach 2 und 8, daher $\frac{4R^3\pi}{3} : \frac{8r^2\pi}{3} : \frac{2r^2\pi}{3} = 125 : 32 : 8$.

Der Inhalt des Doppelkegels ist $\frac{r^2\pi}{3}(8+2) = 167{\cdot}551608\ dm^3$.

30) Ist O die Oberfläche des Kegels, also $O = 3r^2\pi$, so ist $r = \sqrt{\frac{O}{3\pi}}$ und der Inhalt des Kegels und der Halbkugel $J = \frac{r^3\pi\sqrt{3}}{3} + \frac{2r^3\pi}{3} = \frac{r^3\pi}{3}(2+\sqrt{3}) = a^3 =$ Inhalt des Würfels, daher:

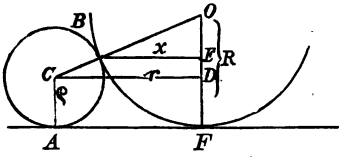
$$a = \sqrt{\frac{O}{3\pi}}\sqrt[3]{\frac{\pi}{3}(2+\sqrt{3})} = \sqrt[6]{\frac{O^3(7+4\sqrt{3})}{243\pi}} = 6{\cdot}681154\ cm.$$

Die Mantelfläche des Kegels und der Halbkugel sind $2r^2\pi + 2r^2\pi = 4r^2\pi$, somit $4r^2\pi = 6b^2$, wenn mit b die Seite des andern Würfels bezeichnet wird;

$$b = \frac{r}{3}\sqrt{6\pi} = {}^1/_3\sqrt{20} = 6{\cdot}138403\ cm.$$

31) Um das Volumen des Kegels bestimmen zu können, muß man den Radius R der Kugel, den Radius x der Grundfläche des Kegels und dessen Höhe $h = R + OE$, $h_1 = R - OE$ durch r und ϱ ausdrücken.

Fig. 29.



$CD^2 + DO^2 = OC^2$ oder

$$r^2 + (R-\varrho)^2 = (R+\varrho)^2, \text{ daraus } R = \frac{r^2}{4\varrho}.$$

$$BO : CO = x : r = R : (R+\varrho), \text{ daraus } x = \frac{Rr}{R+\varrho} = \frac{r^3}{r^2+4\varrho^2}$$

$$OE : OD = R : (R+\varrho),\ OE = \frac{R(R-\varrho)}{R+\varrho},$$

$$h = R + OE = \frac{2R^2}{R+\varrho} = \frac{r^4}{2\varrho(r^2+4\varrho^2)},$$

$$h_1 = R - OE = \frac{2R\varrho}{R+\varrho} = \frac{2\varrho r^2}{r^2+4\varrho^2},$$

daher ist

$$J_1 = \frac{x^2\pi h}{3} = \frac{r^{10}\pi}{6\varrho(r^2+4\varrho^2)^3},\quad J_2 = \frac{x^2\pi h_1}{3} = \frac{2\varrho r^8\pi}{3(r^2+4\varrho^2)^3}.$$

Digitized by Google

32) Aus $J = \frac{\pi h}{3}[R_1^2 + r_1^2 + R_1 r_1]$ folgt für $R_1^2 = 2r_1^2$ und $h = 2r$ = Durchmesser der Kugel

$$J = \frac{2\pi r r_1^2}{3}(3 + \sqrt{2}) = \pi r r_1^2 . 2{\cdot}9428091.$$

Die Seite des Kegelstumpfes sei s, $s^2 = (R_1 - r_1)^2 + 4r^2$. Da der Achsenschnitt ein Tangentenviereck ist, so ist $s = R_1 + r_1 = r_1(\sqrt{2} + 1)$, daher $r_1^2(\sqrt{2} + 1)^2 = (R_1 - r_1)^2 + 4r^2$, daraus $r_1^2 = \frac{r^2\sqrt{2}}{2}$, somit $J = \frac{\pi r^3}{3}(3\sqrt{2} + 2) = 1000\ m^3$

(genauer $1000{\cdot}0063\ m^3$).

33) Aus $J = \frac{\pi h}{3}(R_1^2 + r_1^2 + R_1 r_1)$ folgt für $R_1 = r_1\sqrt{2}$, $J = \frac{r_1^2 \pi h}{3}(3 + \sqrt{2})$. Da die größere Grundfläche um den vierten Teil ihres Radius vom Mittelpunkte abstehen soll, so muß $R^2 = R_1^2 + \frac{R_1^2}{16}$, also $R_1 = \frac{4R}{17}\sqrt{17}$ und $r_1 = \frac{2R}{17}\sqrt{34}$ sein.

Es sind zwei abgestutzte Kegel möglich. Ist d der Abstand des Mittelpunktes der Kugel von der kleineren Grundfläche, so ist

$$d = \sqrt{R^2 - r_1^2} = \frac{3R\sqrt{17}}{17} \text{ und } h = d + \frac{R_1}{4} = \frac{4R}{17}\sqrt{17},$$

$$h_1 = d - \frac{R_1}{4} = \frac{2R\sqrt{17}}{17}, \text{ somit}$$

$$J_1 = \frac{32\sqrt{17}}{867} R^3\pi(3 + \sqrt{2}) = 658{\cdot}1668\ m^3,\ J_2 = {}^1/_2\, J_1.$$

34) Wegen $h = (R - r)\operatorname{tg}\alpha$ ist

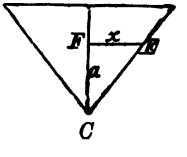
$$J = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{\pi \operatorname{tg}\alpha}{3}(R^3 - r^3); \text{ aus}$$

$$\frac{\pi \operatorname{tg}\alpha}{3}(R^3 - r^3) = {}^1/_4 \cdot \frac{4\varrho^3\pi}{3} \text{ folgt:}$$

$$\varrho = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\alpha\,(R^3 - r^3)} = 5{\cdot}65466\ cm.$$

35) Der Kegel sei bis F mit Wasser gefüllt, also $CF = a$ und $\frac{x^2\pi a}{3}$ das Volumen des Wassers;

Fig. 30.



$\frac{R^2\pi H}{3} = \frac{x^2\pi a}{3} + \frac{4\varrho^3\pi}{3}$; x, R und H sind nun zu bestimmen. $EF : BD = FC : DC$ oder $x : r = a : h$, $x = \frac{ra}{h}$.

$R : H = r : h$, $R = \frac{rH}{h}$, somit

$$\frac{r^2 H^3}{h^2} = \frac{r^2 a^3}{h^2} + 4\varrho^3,\quad H = \sqrt[3]{a^3 + \frac{4\varrho^3 h^2}{r^2}} = 6{\cdot}7824229\ cm.$$

Digitized by Google

36) Die Gleichsetzung der Formeln für den Inhalt ergibt bei Beachtung, daß $h = \varrho$ ist:

$\frac{2\pi\varrho^3}{3} = \frac{\pi\varrho}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$

$2\varrho^2 = R^2 + r^2 + Rr$, daraus folgt

$R + r = \sqrt{2\varrho^2 + Rr}$ und $R - r = \sqrt{2\varrho^2 - 3Rr}$.

Die Gleichsetzung der Formeln für die Oberflächen liefert die Gleichung:

$3\varrho^2\pi = R^2\pi + r^2\pi + \pi(R + r)\sqrt{(R - r)^2 + \varrho^2}$,

mit den früher gefundenen Werten für $R + r$, $R - r$, dann mit $R^2 + r^2 = 2\varrho^2 - Rr$ geht sie über in

$3\varrho^2 = 2\varrho^2 - Rr + \sqrt{2\varrho^2 + Rr}\sqrt{3\varrho^2 - 3Rr}$ oder

$4R^2r^2 + 5\varrho^2 Rr = 5\varrho^4$.

Da Rr positiv sein muß, so ergibt sich aus der letzten Gleichung

$Rr = \frac{\varrho^2}{8}[\sqrt{105} - 5]$, somit $R + r = 4{\cdot}88905$.

$R - r = 0{\cdot}53995$ und $R = 2{\cdot}7145\ cm$, $r = 2{\cdot}1746\ cm$.

37) Die rationale Gleichung ist $47x^2 + 230x = 3913$, ihre Wurzeln sind $x = \frac{\pm 444 - 115}{47}$, es ist nur die positive Wurzel zulässig, also $x = 7$.

Die Oberfläche des gleichseitigen Zylinders ist $6R^2\pi = 230{\cdot}90706$.

Der Inhalt ist $2R^3\pi = 269{\cdot}39157$.

Die Oberfläche des Kegels ist $R^2\pi(\sqrt{5} + 1) = 124{\cdot}53849$.

Der Inhalt $\frac{2R^3\pi}{3} = 89{\cdot}79719$.

Die Oberfläche der Kugel $4R^2\pi = 153{\cdot}93804$.

Der Inhalt $\frac{4R^3\pi}{3} = 179{\cdot}59438$.

Somit Oberfl. Zyl. : Ku : Ke $= 6 : 4 : 3{\cdot}236068$

Kub. Zyl. : Ku : Ke $= 3 : 2 : 1$.

38) Bezeichnet man den Radius des Kreises mit r, so ist eine Seite des Dreieckes $2r\sqrt{3}$ und die Höhe desselben $3r$; somit Mantelfläche des Kegels: $6r^2\pi$, des Zylinders: $4r^2\pi$, der Kugel: $4r^2\pi$. Oberfläche des Kegels: $9r^2\pi$, des Zylinders: $6r^2\pi$, der Kugel: $4r^2\pi$.

Ke : Zyl : Ku $= 9 : 6 : 4$.

Kubikinhalt des Kegels: $3r^3\pi$, des Zylinders: $2r^3\pi$, der Kugel: $\frac{4r^3\pi}{3}$.

Ke : Zyl : Ku $= 9 : 6 : 4$.

Digitized by Google

39*a*) Ist h die Höhe der Kalotte, so ist ihre Oberfläche $O_1 = 2r\pi h$ und ihr Kubikinhalt $J_1 = {}^1/_3 (3r - h) h^2\pi$; da $4r^2\pi = O$, also $r = \sqrt{\frac{O}{4\pi}}$ ist, so ist $O_1 = h\sqrt{O\pi}$, dazu kommt noch die Schnittfläche; ist deren Radius ϱ, so $\varrho^2\pi$, $\varrho^2 = h(2r - h)$, daher ist die Gesamtoberfläche:

$$h\sqrt{O\pi} + h\pi\left(\sqrt{\frac{O}{\pi}} - h\right) = 2h\sqrt{O\pi} - h^2\pi = 14{\cdot}58295\ m^2.$$

und $$J = \pi h^2\left(\sqrt{\frac{O}{4\pi}} - \frac{h}{3}\right) = 3{\cdot}38394\ m^3.$$

39*b*) $O = 2r\pi h + \varrho^2\pi$, $J = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$.

$r = 25$ findet man aus $7^2 + \left(\frac{r+23}{2}\right)^2 = r^2$, $h = r - 7$,

$\varrho^2 = h(2r - h)$, daher $O = 1476\pi\ cm^2$, $J = 6156\pi\ cm^3$.

40) $4r^2\pi = 2r\pi h$ gibt $h = \frac{2r}{3}$, somit

$$J = {}^1/_3 (3r - h_1) h_1^2\pi = \frac{28r^3\pi}{81} = 46{\cdot}5615\ dm^3.$$

41*a*) $2r\pi h : 2r\pi H = m : n$, daraus $h : H = m : n$ und wegen $h + H = 2r$ ist $H = \frac{2nr}{m+n}$, $h = \frac{2mr}{m+n}$, somit

$$J_1 = \frac{4m^2r^3\pi}{3(m+n)^3}(m + 3n) = 435{\cdot}634\ dm^3,$$

$$J_2 = \frac{4n^2r^3\pi}{3(m+n)^3}(n + 3m) = 3753{\cdot}156\ dm^3.$$

41*b*) Der Inhalt des Segmentes ist $\frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$, der Inhalt der eingeschriebenen Kugel, deren Durchmesser h ist, beträgt $\frac{\pi h^3}{6}$, somit $3\frac{\pi h^3}{6} = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$, daraus $h = \frac{6r}{5}$ und $\frac{\pi h^2}{3}(3r - h) = \frac{108r^3\pi}{125}$; für $r = 5$ ist $J = 108\pi$.

42) Ist ϱ der Radius der Schnittfläche, so ist $\varrho^2 = x(2r - x)$ und $x = r \pm \sqrt{r^2 - \varrho^2}$. Die Teile des Radius der Kugel sind somit $x_1 = r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}$ und $r - x_1 = \sqrt{r^2 - \varrho^2} = x_2$ und weil $r = \sqrt[3]{\frac{3J}{4\pi}}$ und $\varrho = \sqrt{\frac{f}{\pi}}$, so ist

$$x_1 = 5{\cdot}024851\ cm \text{ und } x_2 = 3{\cdot}347186\ cm.$$

$$2r\pi x_1 = 2r\pi(r - \sqrt{r^2 - \varrho^2}) =$$

$$2\pi\sqrt[3]{\frac{3J}{4\pi}}\left[\sqrt[3]{\frac{3J}{4\pi}} - \sqrt{\left(\sqrt[3]{\frac{3J}{4\pi}}\right)^2 - \frac{f}{\pi}}\right] = 264{\cdot}3225\ cm^2.$$

Digitized by Google

$$2r\pi\,(r+\sqrt{r^2-\varrho^2}) =$$

$$2\pi\sqrt[3]{\frac{3J}{4\pi}}\left[\sqrt[3]{\frac{3J}{4\pi}}+\sqrt{\left(\sqrt[3]{\frac{3J}{4\pi}}\right)^2-\frac{f}{\pi}}\right] = 616{\cdot}467\ cm^2.$$

43*a*) Ist h die Höhe der Kalotte und R der Radius der Kugel, so ist $2R\pi h+\varrho^2\pi = R^2\pi$ oder $(h^2+2\varrho^2)\,\pi = R^2\pi$, $\varrho^2 = h\,(2R-h)$, daher $h^2-4Rh = -R^2$ und $h = 2R\pm\sqrt{3R^2}$, da $h<2R$, so $h = R\,(2-\sqrt{3})$; $R-h = R\,(\sqrt{3}-1)$ und $R\,(\sqrt{3}-1) = R.\cos\alpha$, $\cos\alpha = \sqrt{3}-1$; $\alpha = 42^0\,56'\,29{\cdot}1''$, somit $2\alpha = 85^0\,52'\,58{\cdot}2''$. $2R\pi h+\varrho^2\pi = R^2\pi$, $\varrho = R\sin\alpha$,

$$h = R-R\cos\alpha;\quad 2\,(1-\cos\alpha)+\sin^2\alpha = 1;$$

$$\cos^2\alpha+2\cos\alpha = 1,\quad \cos\alpha = \sqrt{3}-1.$$

43*b*) $O = 2r\pi h+\varrho\pi r = 2r^2\pi.$

$$2h+\varrho = 2r.$$

$$\varrho = r\sin\alpha,\quad h = r-r\cos\alpha.$$

$$2r-2r\cos\alpha+r\sin\alpha = 2r,\quad 2\cos\alpha = \sin\alpha.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = 2;\quad \alpha = 63^0\,26'\,6'',$$

$$2\alpha = 126^0\,52'\,12''.$$

44) Ist AB die dem Zentriwinkel entsprechende Sehne, CD die vom Mittelpunkte auf die Sehne gefällte Normale und $DE = h = (r-CD)$, so ist

$$O = 2r\pi h+2\,.\,BD\,.\,\pi\,.\,\frac{r}{2} = r\pi\,(2h+BD);$$

$$BD = r\sin\alpha = 2r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$h = r-CD = r-r\cos\alpha = 2r\sin^2\frac{\alpha}{2},\ \text{daher}$$

$$O = 2r^2\pi\sin\frac{\alpha}{2}\left[2\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right] = 108{\cdot}895\ dm^2.$$

$$J = \frac{2r^2\pi h}{3} = \frac{4r^3\pi}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2} = 84{\cdot}4785\ (84{\cdot}48)\ dm^3.$$

45) $O = 2r\pi h$, $\varrho^2 = h\,(2r-h)$, daher $2rh = \varrho^2+h^2 = \frac{O}{\pi}$, daraus

$$h = \sqrt{\frac{O-\pi\varrho^2}{\pi}}\ \text{und}\ r = \frac{O}{2\pi h} = \frac{O}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{O-\pi\varrho^2}} = 3{\cdot}0683\ m.$$

46) $F = 2r\pi h$; $\varrho^2 = h\,(2r-h)$, somit ist die Basis $\varrho^2\pi = 2r\pi h-h^2\pi = F-h^2\pi = 0{\cdot}714602\ m^2$ und die Gesamtoberfläche

$$O = 2F-h^2\pi = 2{\cdot}214602\ m^2;\ \text{wegen}\ r = \frac{F}{2\pi h}\ \text{ist}$$

$$J = {}^1/_3\,(3r-h)\,h^2\pi = \frac{Fh}{2}-\frac{h^3\pi}{3} = 0{\cdot}2441003\ m^3.$$

Digitized by Google

47*a*) $2r\pi h = m\varrho^2\pi$, $\varrho^2 = h(2r - h)$, daher $2r = 2rm - mh$ und $h = \frac{2(m-1)r}{m}$, somit ist $r - h = \frac{r(2-m)}{m} = {}^5/_8$. Die ganze Kugel hat das Volumen $\frac{4r^3\pi}{3}$.

Der Abschnitt ${}^1/_3 (3r - h) h^2\pi = \frac{4r^3\pi}{3} \frac{m+2}{m} \left(\frac{m-1}{m}\right)^2$, sonach

Kugel : Abschnitt $= 1 : \frac{(m+2)(m-1)^2}{m^3} = 1 : {}^7/_{27}$.

47*b*) Ist h die Höhe des Segmentes und ϱ der Radius der Grundfläche des Kegels, so

$2r\pi h : \varrho r\pi = 2 : 3$, somit $h = \frac{\varrho}{3}$.

$\varrho^2 + (r - h)^2 = r^2$, $\varrho^2 + \left(r - \frac{\varrho}{3}\right)^2 = r^2$, daraus folgt

$\varrho = \frac{3r}{5}$ und $h = \frac{r}{5}$.

O Segment : O Kegel $= (2r\pi h + \varrho^2\pi) : (\varrho r\pi + \varrho^2\pi) =$

$$\left(\frac{2r^2}{5} + \frac{9r^2}{25}\right) : \left(\frac{3r^2}{5} + \frac{9r^2}{25}\right) =$$

$$19 : 24.$$

I Segment : I Kegel $= \frac{\pi h^2}{3}(3r - h) : \frac{\varrho^2\pi}{3}(r - h) =$

$$14 : 36 = 7 : 18.$$

48) Die Oberfläche des Zylinders ist $O = 6R^2\pi$, daher $R = \sqrt{\frac{O}{6\pi}}$ und $J = 2R^3\pi = 2\pi\sqrt{\left(\frac{O}{6\pi}\right)^3}$, da J auch der Inhalt einer Kugel sein soll, so $\frac{4r^3\pi}{3} = 2\pi\sqrt{\left(\frac{O}{6\pi}\right)^3}$, $r = \sqrt[6]{\frac{O^3}{96\pi^3}}$ und

$$J_1 = {}^1/_3 \left[3\sqrt[6]{\frac{O^3}{96\pi^3}} - h\right] h^2\pi = 22{\cdot}1457\ cm^3.$$

49) Ist h die Höhe des Kegels und r eine Seite desselben, so ist $r = \frac{h}{\cos\alpha}$ und $h_1 = r - h = \frac{2h}{\cos\alpha}\sin^2\frac{\alpha}{2}$, daher ist der Inhalt des Sektors:

$$J = \frac{2r^2\pi}{3} h_1 = \frac{4\pi h^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}}{3\cos^3\alpha} = 37{\cdot}07492\ cm^3.$$

Digitized by Google

50) Der beleuchtete Teil ist eine Kalotte, daher $h = \frac{O}{2r\pi}$. Da das Dreieck ACO rechtwinklig ist, so ist

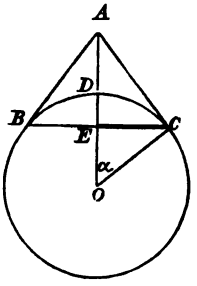


Fig. 31.

$$OC^2 = OA.OE,$$

somit

$$OA = \frac{OC^2}{OE} = \frac{r^2}{r-h} = \frac{r^2}{r - \frac{O}{2r\pi}} = \frac{2r^3\pi}{2r^2\pi - O} =$$

$$11{\cdot}28338\ m,$$

oder $OC = OA\cos\alpha$ und $OE = OC\cos\alpha$, daher

$$OA = \frac{OC}{\cos\alpha} = \frac{OC^2}{OE} = \frac{r^2}{r-h}.$$

51) Wegen $2r\pi h = \frac{4r^2\pi}{3}$ ist (Fig. 31) $ED = h = \frac{2r}{3}$, daher $OE = r - \frac{2r}{3} = \frac{r}{3}$. Nun ist $OC^2 = OE.OA$,

$$r^2 = \left(r - \tfrac{2r}{3}\right)(r + x),\ r + x = 3r.$$

52) Der herausgebohrte Kern ist ein Zylinder (mit dem Radius r und der Höhe 2ϱ) und zwei darauf gesetzten Kalotten (je mit der Höhe $R - \varrho$). Da $\varrho = \sqrt{R^2 - r^2}$ ist, so

$$O = 2R\pi h + 2R\pi h + 2r\pi.2\varrho = 4\pi\,[Rh + r\varrho] =$$

$$4\pi\,[R^2 - (R-r)\sqrt{R^2 - r^2}]$$

$$V = {}^2/_3\,(3R - h)h^2\pi + 2r^2\pi\varrho = \frac{4\pi}{3}\,[R^3 - (R^2 - r^2)\sqrt{R^2 - r^2}].$$

$$O = 213{\cdot}6283\ cm^2,\quad V = 255{\cdot}5162\ cm^3.$$

53) Um die Gesamtoberfläche zu erhalten, muß man von der Oberfläche der Kugel die Fläche der beiden Kalotten [je mit der Höhe $\frac{R}{2}(2 - \sqrt{3})$] abziehen und dazu die Mantelfläche eines Zylinders von $R\sqrt{3}$ Höhe und $\frac{R}{2}$ als Radius addieren. Daher ist

$$O = 4R^2\pi - \frac{4R^2\pi}{2}(2 - \sqrt{3}) + R\pi.R\sqrt{3} = 3R^2\pi\sqrt{3} =$$

$$48{\cdot}96972\ m^2\ (48{\cdot}97).$$

Um den Inhalt zu bekommen, hat man vom Inhalte der Kugel den des Zylinders und den der beiden Kalotten abzuziehen.

$$V = \frac{4R^3\pi}{2} - \frac{R^3\pi\sqrt{3}}{4} - {}^2/_3\left[3R - \frac{R}{2}(2 - \sqrt{3})\right]\frac{R^2}{4}(2 - \sqrt{3})^2\pi =$$

$$\frac{R^3\pi\sqrt{3}}{2} = 14{\cdot}13593\ m^3\ (14{\cdot}136).$$

Den abzuziehenden Teil kann man auch leicht erhalten, wenn man in V der vorigen Aufgabe $r = \frac{R}{2}$ setzt.

Digitized by Google

54) V ist gleich dem Inhalte der Kugel weniger den beiden Kalotten von der Höhe $R - \frac{h}{2}$ und dem Zylinder mit der Höhe h und dem Radius $\sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}}$, somit

$$V = \frac{4R^3\pi}{3} - {}^2/_3\left[3R - \left(R - \frac{h}{2}\right)\right]\left(R - \frac{h}{2}\right)^2\pi - \left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)\pi h =$$
$$\frac{h^3\pi}{6} = 1{\cdot}436755\ dm^3.$$

55) Man fälle von C eine Normale CD auf AB; AC ist die Seite eines Kegels, CD dessen Grundradius, BD die Höhe einer Kalotte, somit

$CD.\pi.AC = 2R\pi.BD$, daher $CD.AC = a.BD$,

$AC^2 = a\,(a - BD)$ und $CD^2 = BD\,(a - BD)$,

daher, wenn man $x = BD$ setzt,

$$\sqrt{ax\,(a - x)^2} = ax,\quad x = \frac{3a \pm a\sqrt{5}}{2},$$

$x_1 = 2{\cdot}618034a$ ist unbrauchbar, da der Punkt zwischen A und B liegen soll; $x_2 = 0{\cdot}381966a$.

56) Die Ekliptikschiefe beträgt $23^0\ 27'\ 28''$ (wofür gewöhnlich in runder Zahl $23^1/_2$ Grad gesetzt wird), daher ist die Höhe der halben heißen Zone $h = R \sin 23^0\ 27'\ 28''$ und die Oberfläche der heißen Zone

$4R^2\pi \sin 23^0\ 27'\ 28'' = 2029793$ (2029800) Quadrat-Myriameter.

Ist $\alpha = 66^0\ 32'\ 32''$, $\beta = 23^0\ 27'\ 28''$, so ist die Oberfläche der beiden gemäßigten Zonen:

$$4R^2\pi\,(\sin\alpha - \sin\beta) = 8R^2\pi \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2647840$$

Quadrat-Myriameter, somit eine 1323920.

Die Oberfläche der beiden kalten Zonen ist

$$4R^2\pi\,(1 - \sin\alpha) = 8R^2\pi \sin^2\left(45 - \frac{\alpha}{2}\right) = 421416\ (421440),$$

also jede 210708 (210720) Quadrat-Myriameter.

57) $O = 2R^2\pi\,(\sin 50^0 - \sin 40^0) = 2\sqrt{2\pi R^2} \sin 5^0 = 570770$ Quadrat-Meilen.

58a) Wegen $2r\pi = \frac{2R\pi}{5}$ ist $r = \frac{R}{5}$ und wegen $h^2 + r^2 = R^2$ ist $R = \frac{5h\sqrt{6}}{12}$, die Höhe der Kalotte ist $R - h$, somit der Inhalt derselben $\frac{\pi}{3}(R - h)^2\,(3R - R + h)$. Der Inhalt der Halbkugel ist $\frac{2R^3\pi}{3}$, somit ist der Inhalt der Kugelschicht

Digitized by Google

$\frac{2R^3\pi}{3} - \frac{\pi}{3}(R-h)^2(2R+h) = R^2h\pi - \frac{h^3\pi}{3}$ und wegen $R = \frac{5h\sqrt{6}}{12}$ ist $V = \frac{17\pi h^3}{24} = 17802{\cdot}36\ cm^3$.

58 *b*) Ist h die Höhe der kleinen Kalotte und ϱ der Radius des Schnittkreises derselben, so ist

$$V = \frac{2r^3\pi}{3} - \frac{\pi h^2}{3}(3r-h)$$

h ist zu bestimmen. Da $\varrho^2\pi = \frac{r^2\pi}{5}$ und $\varrho^2 = h(2r-h)$, so $\frac{r^2}{5} = h(2r-h)$, $h = r \pm \sqrt{\frac{4r^2}{5}}$. Nur das neg. Vorzeichen, ist hier brauchbar, daher $h = r\left(1 - \frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$,

$h^2 = \frac{r^2}{5}(9 - 4\sqrt{5})$, $3r - h = \frac{2r}{5}(5+\sqrt{5})$ und

$V = \frac{22r^3\pi}{75}\sqrt{5} = 2{\cdot}0606\,r^3$.

59) Der Radius der eingeschriebenen Kugel ist $\varrho = \frac{rh}{r+s}$, wo $s = \sqrt{r^2+h^2}$ und die Höhen der Abschnitte der Kugel sind:

$$H_1 = \varrho - \left(\frac{h}{2} - \varrho\right) = 2\varrho - \frac{h}{2} = \frac{h(3r-s)}{2(s+r)} \text{ und } H_2 = \frac{h}{2},$$

somit sind die Oberflächen:

$$O_1 = 2\varrho\pi . H_1 = \frac{rh^2(3r-s)\pi}{(r+s)^2} = 48\pi.$$

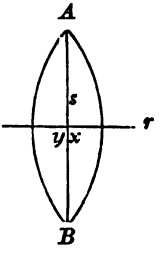
$$O_2 = 2\varrho\pi . H_2 = \frac{rh^2\pi}{r+s} = 96\pi.$$

$$V_1 = \frac{\pi H_1^2}{3}(3\varrho - H_1) = \frac{\pi h^3(3r-s)^2(3r+s)}{24(r+s)^3} = \frac{224\pi}{3}.$$

$$V_2 = \frac{\pi H_2^2}{3}(3\varrho - H_2) = \frac{\pi h^3(5r-s)}{24(r+s)} = \frac{640\pi}{3}.$$

60) $x + y = d$, $s^2 = y(2r-y) = x(2R-x)$, da s die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Stücken der Durchmesser ist. Führt man $y = d - x$ ein, so erhält man $x = \frac{2rd - d^2}{2(R+r-d)} = 0{\cdot}76875\ cm$ und

Fig. 32.



$$y = \frac{2Rd - d^2}{2(R+r-d)} = 1{\cdot}28125\ cm,$$

somit der Inhalt der beiden Kalotten:

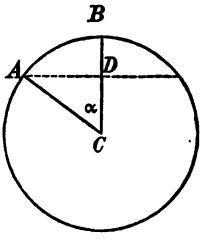
$$V = \frac{\pi x^2}{3}(3R-x) + \frac{\pi y^2}{3}(3r-y) =$$
$$10{\cdot}94238 + 18{\cdot}94212 = 29{\cdot}8845\ cm^3.$$

Digitized by Google

61) Der Sektor sei ACB, die Rotation erfolge um BC, so ist

$$O = 2r\pi . BD + AD\pi . r =$$
$$2r\pi (r - CD) + r^2\pi \sin\alpha =$$
$$4r^2\pi \sin^2\frac{\alpha}{2} + r^2\pi \sin\alpha = 59\cdot424\,cm^2.$$

Fig. 33.



$$V = \frac{2r^2\pi BD}{3} = 2r\pi . BD . \frac{r}{3} =$$
$$\frac{4r^3\pi}{3} \sin^2\frac{\alpha}{2} = 29\cdot337\ cm^3.$$

Spezifisches Gewicht.

62) Die Länge des Zylinders ist $h - d$, daher der Inhalt des Zylinders $\frac{d^2\pi}{4}(h - d)$, der Inhalt der Kugel $\frac{d^3\pi}{6}$, zusammen $\frac{d^2\pi}{12}(3h - d)\,m^3$, da h und d in Metern angegeben sind.

Da ein Kubikzentimeter s Gramm, somit ein Kubikmeter $1000000.s$ Gramm wiegt, so ist das Gewicht

$$\frac{d^2\pi}{12}(3h - d)\ 1000000\ s \text{ Gramm.}$$

Speziell 36 Ztr. 64 Kilogr. 353·7 Gramm.

63) $\frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3).7\cdot5 = 40500$ Gramm, wegen $R = r + 3$ folgt daraus $r^2 + 3r = \frac{450 - 3\pi}{\pi}$ und da nur der positive Wurzelwert zulässig ist, $r = 10\cdot4369\ cm$ als innerer Halbmesser.

64) Das Gewicht der schwimmenden Kugel ist gleich dem Gewichte der verdrängten Wassermasse, daher

$$\frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3).s = \frac{2R^3\pi}{3}, \text{ daraus } r = R\sqrt[3]{\frac{2s-1}{2s}} \text{ und}$$

$$D = R - r = R\left[1 - \sqrt[3]{\frac{2s-1}{2s}}\right] = 1\cdot931\ mm.$$

65) $\frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3).7\cdot7 = \frac{2R^3\pi}{3}$, daraus $R^3 = {}^{154}/_{144}\,r^3$, und

$\frac{2R^3\pi}{3} = 30$, daraus $R = \sqrt[3]{\frac{45}{\pi}} = 2\cdot42859\,dm$ und $r = R\sqrt[3]{\frac{72}{77}} =$ $2\cdot37484\ dm$, somit $D = R - r = 0\cdot5375\ cm$ oder $5\cdot375\ mm$.

66) Die Höhe der herausstehenden Kalotte ist $h = \frac{R}{2}$, daher ihr Inhalt $\frac{\pi}{3}\frac{R^2}{4}\left(3R - \frac{R}{2}\right) = \frac{5R^3\pi}{24}$ und der Inhalt des verdrängten Wassers $\frac{4R^3\pi}{3} - \frac{5R^3\pi}{24} = \frac{9R^3\pi}{8}$, somit $\frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3)\,d = \frac{9R^3\pi}{8}$,

Digitized by Google

daraus $r = \frac{R}{4d}\sqrt[3]{(32d-27).2d^2}$ und

$$D = R - r = R\left[1 - \frac{1}{4d}\sqrt[3]{2(32d-27)d^2}\right] = 0{\cdot}87069\ cm$$

oder $8{\cdot}7069\ mm$.

67) Nach der vorigen Aufgabe:

$$D = R\left[1 - \frac{1}{4d}\sqrt[3]{2(32d-27)d^2}\right] = 0{\cdot}4191\ cm \text{ oder } 4{\cdot}191\ mm.$$

68) Da der herausragende Teil der Oberfläche eine Kalotte ist, so $2R\pi h = \frac{4R^2\pi}{n}$, also $h = \frac{2R}{n}$ und der Inhalt der Kalotte $\frac{4R^3\pi}{3n^3}(3n-2)$, somit ist

$$\frac{4R^3\pi}{3} - \frac{4R^3\pi}{3n^3}(3n-2) = \frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3)s \text{ und}$$

$$r = \frac{R}{n}\sqrt[3]{\frac{n^3(s-1)+3n-2}{s}}.$$

$$D = R - r = 0{\cdot}32815\ cm \text{ oder } 3{\cdot}2815\ mm.$$

69) Ist h die Höhe des herausragenden Teiles, so ist wegen $r^2 = h(2R-h)$, $h = R \pm \sqrt{R^2 - r^2}$ und der Inhalt der Kalotte für $h = R + \sqrt{R^2 - r^2}$

$$\frac{\pi}{3}(R + \sqrt{R^2 - r^2})^2(3R - R - \sqrt{R^2 - r^2}) =$$

$$\frac{\pi}{3}[2R^3 + (2R^2 + r^2)\sqrt{R^2 - r^2}] \text{ und der restliche Teil}$$

$$\frac{\pi}{3}[2R^3 - (2R^2 + r^2)\sqrt{R^2 - r^2}] = \frac{4R^3\pi}{3}s_1, \text{ daher}$$

$$s_1 = \frac{2R^3 - (2R^2 + r^2)\sqrt{R^2 - r^2}}{4R^3} = 0{\cdot}104.$$

Für $h = R - \sqrt{R^2 - r^2}$ erhält man

$$s_2 = \frac{2R^3 + (2R^2 + r^2)\sqrt{R^2 - r^2}}{4R^3} = 0{\cdot}896.$$

70) Mit der Korkschicht habe die Kugel den Radius R, daher $\frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3)\sigma + \frac{4r^3\pi}{3}s = \frac{2R^3\pi}{3}$, wegen $\frac{4r^3\pi}{3}s = a$ ist $\frac{4r^3\pi}{3} = \frac{a}{s}$ und $\frac{4R^3\pi}{3}\sigma - \frac{a}{s}\sigma + a = \frac{2R^3\pi}{3}$, daraus

$$R = \sqrt[3]{\frac{3a(s-\sigma)}{2\pi s(1-2\sigma)}} \text{ und}$$

$$D = R - r = \sqrt[3]{\frac{3a(s-\sigma)}{2\pi s(1-2\sigma)}} - \sqrt[3]{\frac{3a}{4\pi s}} = 5{\cdot}46872\ cm;$$

$9{\cdot}93732\ cm$.

Digitized by Google

71) Da die Hohlkugel im Wasser 7 Kilogramm verliert, so ist das Gewicht des verdrängten Wassers 7 Kilogramm oder $\frac{4R^3\pi}{3} = 7000$ und $\frac{4\pi}{3}(R^3 - r^3)\,7 \cdot 5 = 12000$, daraus $R = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 7000}{4\pi}}$ und $r = \sqrt[3]{\frac{16200}{4\pi}}$.

$D = R - r = 0 \cdot 9834\ cm = 9 \cdot 834\ mm\ (10\ mm)$.

72) $\frac{122 \cdot 8 - x}{10 \cdot 62} + \frac{x}{9} = 12$; da der Gewichtsverlust gleich ist dem Quotienten aus dem absoluten und dem spezifischen Gewichte des Körpers. 97·0222 Gramm Silber und 25·7778 Gramm Kupfer.

Da $25 \cdot 7778 : 9 = 2 \cdot 8642$ und $2 \cdot 8642 \times 10 \cdot 62 = 30 \cdot 4178$, so wiegt eine gleich große silberne Kugel $(97 \cdot 0222 + 30 \cdot 4178)$ Gramm $= 127 \cdot 44$ Gramm und $\frac{4R^3\pi}{3} \cdot 10 \cdot 62 = 127 \cdot 44$, daher

$$R = 1 \cdot 42025\ cm.$$

73) $\frac{4\pi}{3}(r^3 - \varrho^3)\,s_1 + \frac{4\varrho^3\pi}{3}\,s_3 = \frac{4r^3\pi}{3}\,s_2$, daraus $\varrho = r\sqrt[3]{\frac{s_1 - s_2}{s_1 - s_3}}$ und

$$D = r - \varrho = r\left[1 - \sqrt[3]{\frac{s_1 - s_2}{s_1 - s_3}}\right] = 0 \cdot 0004035\,r\ (0 \cdot 0004\,r).$$

Das Gewicht der Seifenblase ist

$G = \frac{4\pi}{3}(r^3 - \varrho^3)\,s_1 + \frac{4\pi}{3}\varrho^3 s_3 = \frac{4\pi}{3}[r^3 s_1 + \varrho^3(s_3 - s_1)]$ und für $r = 30\ mm$, $\varrho = 29 \cdot 99\ mm$ ist $G = \frac{4\pi}{3} \cdot 29 \cdot 38 = 123 \cdot 067$ $(123 \cdot 11)$.

$\frac{4r^3\pi}{3}\,s_2 = 146 \cdot 914\ (147 \cdot 04)$; daher ist die Seifenblase um

$$146 \cdot 914 - 123 \cdot 067 = 23 \cdot 847\ (23 \cdot 93)$$ leichter.

Da das spezifische Gewicht auf 1 Kubikzentimeter bezogen ist und $1\ cm^3 = 1000\ mm^3$, so ist das Gewicht der Seifenblase um 0·023847 (0·02393) mal dem Gewichte eines Kubikzentimeters Seifenwassers leichter als eine gleich große Luftmenge.

§ 28. Die regelmäßigen Körper.

1) Ist s eine Kante des Tetraeders, so ist die Seitenhöhe $\frac{s\sqrt{3}}{2}$, der Radius des einer Fläche eingeschriebenen Kreises $\frac{s}{6}\sqrt{3}$, daher die Höhe $\frac{s}{3}\sqrt{6}$, somit die Oberfläche $s^2\sqrt{3}$ und der Inhalt

Digitized by Google

$\frac{s^3}{12}\sqrt{2}$, ferner ist $R = \frac{s\sqrt{6}}{4}$, daher $s = \frac{2R}{3}\sqrt{6}$ und

$$O = \frac{8R^2}{3}\sqrt{3} = 166{\cdot}2769\ dm^2,\quad V = \frac{8R^3\sqrt{3}}{27} = 110{\cdot}8513\ dm^3.$$

2) Da die Höhe des Tetraeders $H = R + r$ ist, und $H = \frac{s}{3}\sqrt{6}$, $R = \frac{s}{4}\sqrt{6}$, so ist $r = \frac{s}{12}\sqrt{6}$ und $s = 2r\sqrt{6}$, $O = s^2\sqrt{3} = 24r^2\sqrt{3}$, $V = 8r^3\sqrt{3}$.

$s = 29{\cdot}39388\ cm$, $O = 1496{\cdot}4919\ cm^2$, $V = 2992{\cdot}9838\ cm^3$.

3) $O_1 = s^2\sqrt{3}$, $O_2 = 4R^2\pi = 4\pi\left(\frac{s\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \frac{3s^2\pi}{2}$, da $R = \frac{s\sqrt{6}}{4}$ (siehe Aufg. 1), somit $\frac{3s^2\pi}{2} - 2 = s^2\sqrt{3}$ und

$$s = \sqrt{\frac{4}{3\pi - 2\sqrt{3}}} = 0{\cdot}819185\ m.\quad R = \frac{s\sqrt{6}}{4} = 0{\cdot}501647\ m.$$

4) Der Inhalt des Kegels ist $\frac{r^2\pi h}{3} = a$, wenn man den Grundradius mit r, die Höhe mit h bezeichnet, nun ist $r = \frac{h}{3}\sqrt{3}$, daher $\frac{h^3\pi}{9} = a$ und $h = \sqrt[3]{\frac{9a}{\pi}}$. Ersetzt man in $O = s^2\sqrt{3}$ und $V = \frac{s^3}{12}\sqrt{2}$ (siehe Aufg. 1) s durch $\sqrt[3]{\frac{9a}{\pi}}$, so erhält man

$$O = 3\sqrt[6]{\frac{3^5a^4}{\pi^4}} = 7{\cdot}26725\ m^2,$$

$$V = \frac{3a}{4\pi}\sqrt{2} = 1{\cdot}01286\ m^3.$$

5) Die Oberflächen sind $s^2\sqrt{3}$, $3r^2\pi$, $4R^2\pi$; $s^2\sqrt{3} = 3r^2\pi$ gibt $2r = 2s\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3\pi}}$ und $s^2\sqrt{3} = 4R^2\pi$ gibt $2R = s\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\pi}}$, daher:

$$s : 2r : 2R = 1 : 2\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3\pi}} : \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{\pi}} = 1 : 0{\cdot}857383 : 0{\cdot}742515.$$

6) Ist s eine Seite des Oktaeders, so ist

$$O = 2s^2\sqrt{3} \text{ und } J = 2 . s^2\frac{h}{3} = \frac{2s^2}{3}\sqrt{s^2 - \left(\frac{s\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{s^3\sqrt{2}}{3}.$$

Die Höhe $h = \frac{s}{2}\sqrt{2}$ des halben Oktaeders, die Seitenhöhe $h_1 = \frac{s}{2}\sqrt{3}$ und die Verbindungslinie der Fußpunkte der beiden Höhen $a = \frac{s}{2}$ bilden ein rechtwinkliges Dreieck; der Radius tangiert die Seitenhöhe, daher bildet auch der Radius, die Ver-

Digitized by Google

bindungslinie und ein Teil der Seitenhöhe ein rechtwinkliges Dreieck; sonach

$$r : a = h : h_1 \text{ oder } r : \frac{s}{2} = \frac{s}{2}\sqrt{2} : \frac{s}{2}\sqrt{3} \text{ und } r = \frac{s\sqrt{6}}{6}$$

$$s = r\sqrt{6};\ O = 12r^2\sqrt{3} = 519{\cdot}61524\ cm^2,$$

$$J = 4r^3\sqrt{3} = 866{\cdot}0254\ cm^3.$$

7) Da $O = 12r^2\sqrt{3}$, also $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{O}{3\sqrt{3}}}$, so ist die Oberfläche der Kugel $\frac{O\pi\sqrt{3}}{9}$ und es verhalten sich die beiden Oberflächen wie $1 : \frac{\pi\sqrt{3}}{9} = 1 : 0{\cdot}6045998$. Speziell ist die Oberfläche der Kugel $6{\cdot}045998\ m^2$. Die Volumina sind $\frac{O}{18}\sqrt{O\sqrt{3}}$ und $\frac{O\pi}{54}\sqrt{\frac{O\sqrt{3}}{3}}$, daher verhalten sie sich wie

$$1 : \frac{\pi\sqrt{3}}{9} = 1 : 0{\cdot}6045998.$$

8) Die Diagonale des Quadrates mit der Seite s ist $s\sqrt{2}$, daher ist $R = \frac{s}{2}\sqrt{2}$ und

$$O = 2s^2\sqrt{3};\ V = \frac{s^3\sqrt{2}}{3};\ O_1 = 2s^2\pi;\ V_1 = \frac{s^3\pi\sqrt{2}}{3};$$

$$O = 44{\cdot}89476\ m^2,\ V = 21{\cdot}99385\ m^3;$$

$$O_1 = 81{\cdot}43008\ m^2,\ V_1 = 69{\cdot}09572\ m^3.$$

9) Der Inhalt des Oktaeders ist $\frac{s^3\sqrt{2}}{3}$, der Inhalt der eingeschriebenen Kugel $\frac{4r^3\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}\cdot\left(\frac{s\sqrt{6}}{6}\right)^3 = \frac{s^3\pi\sqrt{6}}{27}$. (Siehe Aufg. 6.) Daher $\frac{s^3\sqrt{2}}{3} - 5 = \frac{\pi s^3\sqrt{6}}{27}$, daraus $s = 2{\cdot}993502\,m$ und $r = 1{\cdot}222092\,m$.

10) Der Inhalt des Kegelstutzes ist $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$. Da V, h und $R - r = d$ bekannt sind, erhält man daraus

$$r^2 + rd = \frac{V}{\pi h} - \frac{d^2}{3},\quad r = -\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{V}{\pi h} - \frac{d^2}{12}},$$

$$R = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{V}{\pi h} - \frac{d^2}{12}}.$$

Die Oberfläche des Kegelstutzes ist

$$O = (R^2 + r^2)\pi + (R + r)\pi S,$$

$$S = \sqrt{(R - r)^2 + h^2} = \sqrt{d^2 + h^2}.$$

Aus $2s^2\sqrt{3} = O$ folgt $s = \sqrt{\frac{O\sqrt{3}}{6}}$ und $V_1 = \frac{O}{18}\sqrt{O\sqrt{3}}$.

$R = 6\,dm,\ r = 4\,dm,\ O_1 = 134{\cdot}462113\,\pi\,dm^2 = 422{\cdot}4252\,dm^2,$

$$V_1 = 634{\cdot}7936\ dm^3.$$

Digitized by Google

11) Die Oberfläche des Zwölfeckes ist $O = 716 \cdot 5537\, dm^2 = 12 . \frac{\sigma^2}{4} \operatorname{tg} 75^0$ oder $\sigma = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ und der Radius des dem Zwölfecke umgeschriebenen Kreises $r = \frac{\sigma}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}$, daher ist die auf s vom Zentrum gefällte Höhe $h = \frac{\sigma}{2}(2 + \sqrt{3})$, $O = 3\sigma^2(2 + \sqrt{3}) = 716 \cdot 5537\, dm^2$.

$$V = \frac{O}{18}\sqrt{O\sqrt{3}} = 1402 \cdot 429\, dm^3.$$

12) Sind s und s_1 die Kanten des Oktaeders und Tetraeders, so ist $O = 2s^2\sqrt{3}$ und $O_1 = s_1^2\sqrt{3}$, daher $2s^2\sqrt{3} - 5 = s_1^2\sqrt{3}$. Die Radien der eingeschriebenen Kugeln sind

$r = \frac{s\sqrt{6}}{6}$, $r_1 = \frac{s_1\sqrt{6}}{12}$ (siehe Aufg. 6 und 2), daher

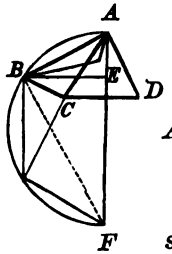
$\frac{s\sqrt{6}}{6} : \frac{s_1\sqrt{6}}{12} = 8 : 5$. Aus beiden Gleichungen ergibt sich

$s = 2 \cdot 56871\, m$, $r = 1 \cdot 04867\, m$;

$s_1 = 3 \cdot 21089\, m$, $r_1 = 0 \cdot 65542\, m$.

13) $ABCD$ sei ein Teil des Ikosaeders. Fällt man von A eine Normale auf die Ebene BCD, so ist E der Mittelpunkt des dem regelmäßigen Fünfecke $BCD..$ umgeschriebenen Kreises, also BE dessen Radius und AF der Durchmesser der dem Ikosaeder umgeschriebenen Kugel. Nun ist

Fig. 34.



$AB^2 = AF . AE$ oder $s^2 = 2R . \sqrt{AB^2 - BE^2}$.

Der Radius BE ist $s\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$, daher

$s^2 = 2Rs\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$ und

$s = 2R\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$, $R = \frac{s}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$.

Da die eingeschriebene Kugel die Mittelpunkte der Flächen berührt und der Abstand dieses Punktes von der Ecke $\frac{s}{3}\sqrt{3}$ beträgt, so ist

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{s^2}{3}} = \frac{s}{12}\sqrt{42 + 18\sqrt{5}} = \frac{s(3 + \sqrt{5})\sqrt{3}}{12} \text{ und}$$

$s = r(3 - \sqrt{5})\sqrt{3}$.

$O = 20f = 5s^2\sqrt{3} = 8 \cdot 660254\, m^2$,

$V = 20 . \frac{s^2\sqrt{3}}{4} . \frac{r}{3} = \frac{5s^3(3 + \sqrt{5})}{12} = 2 \cdot 181695\, m^3$.

Digitized by Google

14) Nach der vorigen Nummer ist $s = r\,(3 - \sqrt{5})\sqrt{3}$, daher

$$O = 30\sqrt{3}\,[7 - 3\sqrt{5}]\,r^2 = 379{\cdot}054125\ cm^2,$$

$$V = O.\frac{r}{3} = 631{\cdot}756875\ cm^3.$$

15) Da nach Nr. 13 $s = 2R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$ ist, so

$$O = 5\sqrt{3}\left(2R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)^2 = 2\sqrt{3}R^2\,(5 - \sqrt{5}) \text{ und}$$

$$\Delta O = 4R^2\pi - 2\sqrt{3}R^2\,(5 - \sqrt{5}) = 47{\cdot}8692656\ dm^2,$$

$$V = O\,\frac{r}{3} \text{ oder } \frac{5\,(3+\sqrt{5})}{12}\left(2R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\right)^3.$$

Nach beiden ergibt sich $V = \frac{2R^3}{3}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$, daher

$$\Delta V = \frac{4R^3\pi}{3} - \frac{2R^3}{3}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = 105{\cdot}768896\ dm^3.$$

16) Wegen $O = 4R^2\pi$ ist $R = \sqrt{\frac{O}{4\pi}}$ und da $O_1 = 2\sqrt{3}R^2(5 - \sqrt{5})$ (siehe Nr. 15), so ist $O_1 = \frac{O\sqrt{3}}{2\pi}\,(5 - \sqrt{5}) = 40\ m^2$.

17) Ist V der Kubikinhalt des ganzen Würfels, so

$$V_1 = \frac{F \sin\alpha}{2}\sqrt{F\cos\alpha},\quad V_2 = V - V_1 = \sqrt{(F\cos\alpha)^3} - V_1;$$

$$V_2 = {}^1/_2\sqrt{F^3\cos\alpha}\,[2\cos\alpha - \sin\alpha].$$

$V_1 = 188{\cdot}596$ Kubikdezimeter, $V_2 = 260{\cdot}924$ Kubikdezimeter.

18) $O_1 = \frac{O}{48}\,[3 + \sqrt{3}]$; $V_1 = \frac{O}{288}\sqrt{\frac{O}{6}}$.

Der Neigungswinkel einer Seitenfläche gegen die Basisfläche ist $\alpha = \text{arc cos}\,({}^1/_3\sqrt{3}) = 54^0\,44'\,8''$; zwei Seitenflächen stehen aufeinander senkrecht.

$O = 115{\cdot}9352\ cm^2$, $V = 57{\cdot}1667\ cm^3$.

19) Da der Radius des dem regelmäßigen Fünfecke umgeschriebenen Kreises $r = s\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ ist, so ist die vom Mittelpunkte auf eine Seite des Fünfeckes gefällte Normale $\frac{s}{2}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$ und die Fläche eines Fünfeckes $\frac{5s^2}{4}\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$, daher

$$O = 15s^2\sqrt{1 + {}^2/_5\sqrt{5}}. \text{ Daraus}$$

$$s = \sqrt{\frac{O}{15}\sqrt{(5 - 2\sqrt{5})}} = 2{\cdot}41088\ cm.$$

$$\left(s = \sqrt{\frac{O}{15\,\text{tg}\,54^0}}\right);\ d : s = \sin 108^0 : \sin 36^0,$$

$$d = \frac{s\cos 18^0}{\sin 36^0} = \frac{s}{2\sin 18^0} = 3{\cdot}900884\ cm.$$

Digitized by Google

20) Setzt man in $O = 15 s^2 \sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}$ $s = \frac{1}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$, so $O = \frac{15}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = 28{\cdot}531695$ Flächeneinheiten.

21) Beim Dodekaeder ist $r = \frac{s}{2}\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}$ und $R = \frac{s\sqrt{6}\sqrt{3+\sqrt{5}}}{4}$. Der Inhalt des Dodekaeders ist:

$$V = O.\frac{r}{3} = \frac{5s^3}{2}\sqrt{\frac{47 + 21\sqrt{5}}{10}} = \frac{s^3\sqrt{5}}{4}(7 + 3\sqrt{5})$$

und da $s = \frac{R\sqrt{3}\,(\sqrt{5} - 1)}{3}$ ist, so ist

$$V = \frac{2}{9}R^3(\sqrt{5} + 1)\sqrt{15} \text{ und}$$

$$\Delta V = \frac{4R^3\pi}{3} - \frac{2}{9}R^3(\sqrt{5} + 1)\sqrt{15} = 37{\cdot}89791\ dm^3.$$

22) Wie in Nr. 1 ist

$O = a^2\sqrt{3}$; $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$; $R = \frac{a}{4}\sqrt{6}$; $r = \frac{a}{12}\sqrt{6}$; $\cos A = \frac{1}{3}$;

$O = 1{\cdot}7320508\ dm^2$, $V = 0{\cdot}1178511$ Kubikdezimeter;

$R = 0{\cdot}6123724\ dm$, $r = 0{\cdot}2041241\ dm$; $A = 70^0\,31'\,43{\cdot}61''$.

23) $O = 2a^2\sqrt{3}$; $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$; $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$; (s. Aufg. 6 u. 8).

$\cos A = -\frac{1}{3}$;

$O = 3{\cdot}4641016\ dm^2$, $V = 0{\cdot}4714045$ Kubikdezimeter;

$R = 0{\cdot}7071068\ dm$, $r = 0{\cdot}4082483\ dm$; $A = 109^0\,28'\,16{\cdot}39''$.

24) $O = 5a^2\sqrt{3}$; $V = \frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$; $R = \frac{a}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$; (s. Aufg. 13).

$r = \frac{a}{12}(3 + \sqrt{5})\sqrt{3}$; $\cos A = -\frac{1}{3}\sqrt{5}$;

$O = 8{\cdot}6602540\ dm^2$, $V = 2{\cdot}1816950$ Kubikdezimeter;

$R = 0{\cdot}9510565\ dm$, $r = 0{\cdot}7557613\ dm$; $A = 138^0\,11'\,22{\cdot}87''$.

25) $O = 15a^2\sqrt{1 + \frac{2}{5}\sqrt{5}}$; $V = \frac{a^3}{4}(7 + 3\sqrt{5})\sqrt{5}$;

$R = \frac{a}{4}\sqrt{18 + 6\sqrt{5}}$; $r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}$; (s. Aufg. 21).

$\cos A = -\frac{1}{5}\sqrt{5}$.

$O = 20{\cdot}6457291\ dm^2$, $V = 7{\cdot}6631191$ Kubikdezimeter;

$R = 1{\cdot}4012585\ dm$, $r = 1{\cdot}1135164\ dm$; $A = 116^0\,33'\,54{\cdot}18''$.

D. Analytische Geometrie.

§ 29. Gerade Linie.

1) Die Gleichung der Geraden durch den Punkt $x_1 y_1$ ist $y - 3 = a(x - 1)$, diese Gerade schneidet von den Achsen die Stücke $Y = 3 - a$, $X = 1 - \frac{3}{a}$ ab und $XY = 2.8 = 16$.

Digitized by Google

$(3-a)\left(1-\frac{3}{a}\right)=16$, somit $a_1=-1$, $a_2=-9$ und $y-3=-(x-1)$, $y-3=-9(x-1)$ oder $y=-x+4$ $y=-9x+12$ sind die gesuchten Geraden.

$y-3=a(x-8)$ gibt $X=\frac{8a-3}{a}$, $Y=3-8a$, somit $\frac{8a-3}{a}(3-8a)=100$ und daraus $a_1=-{}^9/_{16}$, $a_2=-{}^1/_4$ und $y=-\frac{9x}{16}+{}^{15}/_2$, $y=-\frac{x}{4}+5$.

2) Ist $y=ax+b$ eine Gerade und sind x_1y_1 die Koordinaten eines Punktes außerhalb der Geraden, so ist $y-y_1=-\frac{1}{a}(x-x_1)$ die Gleichung der durch x_1y_1 gehenden und auf $y=ax+b$ normalen Geraden, und die Koordinaten, welche den beiden Gleichungen genügen, sind die Koordinaten des Fußpunktes der von x_1y_1 auf $y=ax+b$ gefällten Normalen.

$ax+b=y_1-\frac{1}{a}(x-x_1)$ gibt $x=x_2=\frac{ay_1+x_1-ab}{1+a^2}$

$y_2=ax_2+b=a\frac{ay_1+x_1-ab}{1+a^2}+b=\frac{a^2y_1+ax_1+b}{1+a^2}$.

Die Entfernung der beiden Punkte x_1y_1, x_2y_2 oder die Länge der von x_1y_1 auf $y=ax+b$ gefällten Normalen ist

$P=\pm\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}$; nun ist

$x_2-x_1=\frac{a}{a^2+1}(y_1-ax_1-b)$ und

$y_2-y_1=-\frac{1}{a^2+1}(y_1-ax_1-b)$, daher

$P=\pm\frac{y_1-ax_1-b}{\sqrt{a^2+1}}$

a) $P=\frac{8\sqrt{5}}{5}=3{\cdot}5777088$;

b) $P=5{\cdot}2$.

3) $P=\pm\frac{y_1-ax_1-b}{\sqrt{1+a^2}}$; $x_2=\frac{ay_1+x_1-ab}{a^2+1}$, $y_2=\frac{a^2y_1+ax_1+b}{a^2+1}$; $P={}^2/_5$; $x_2={}^{12}/_5$, $y_2={}^{37}/_{15}$. (Siehe Nr. 2.)

4) Die durch A und B gehende Gerade ist $y=-x+3$.

Die durch B und C gehende Gerade ist $y=\frac{x}{2}$. Die durch A parallel zu BC gelegte Gerade ist $y=\frac{x}{2}+3$ und die durch C parallel zu AB gelegte Gerade ist $y=-x+12$, diese zwei letzteren Geraden schneiden sich in dem gesuchten Punkte D $(x=6,\ y=6)$.

Digitized by Google

5) Die durch $x_1 y_1$ gehende Gerade ist $y = ax + (y_1 - ax_1)$ und die Perpendikel von $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ sind

$$\pm \frac{y_2 - ax_2 + (ax_1 - y_1)}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \pm \frac{y_3 - ax_3 + (ax_1 - y_1)}{\sqrt{1+a^2}},$$

daher muß, wenn die beiden Punkte auf einer Seite der Geraden liegen, $y_2 - ax_2 + ax_1 - y_1 = y_3 - ax_3 + ax_1 - y_1$, also $a = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$ sein und $y = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}(x - x_1) + y_1$; $y = -\frac{x}{2} + {}^5/_2$ oder es muß die Gerade mit der durch die beiden Punkte gehenden Geraden parallel sein. Liegen die beiden Punkte auf entgegengesetzten Seiten der Geraden, so ist

$$y_2 - ax_2 + ax_1 - y_1 = -y_3 + ax_3 - ax_1 + y_1, \text{ also}$$

$a = \frac{y_3 + y_2 - 2y_1}{x_3 + x_2 - 2x_1}$ und

$$y = \frac{y_3 + y_2 - 2y_1}{x_3 + x_2 - 2x_1}(x - x_1) + y_1, \; y = \frac{x}{6} + {}^{11}/_6.$$

6) Die Gleichung der Geraden, welche durch den Punkt (2, 2) geht, ist $y - 2 = a(x - 2)$, daher ist

$$\operatorname{tg} 30^0 = \frac{a - \frac{1}{2}}{1 + \frac{a}{2}} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} 30^0 = \frac{\frac{1}{2} - a}{1 + \frac{a}{2}}.$$

Da $\operatorname{tg} 30^0 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ ist, so folgt daraus

$$a = \frac{8 + 5\sqrt{3}}{11} \text{ oder } a = \frac{8 - 5\sqrt{3}}{11},$$

und die Gleichungen der gesuchten Geraden sind

$$y - 2 = \frac{8 + 5\sqrt{3}}{11}(x - 2) \text{ oder } y = 1{\cdot}5145685x - 1{\cdot}0291370$$

$$y - 2 = \frac{8 - 5\sqrt{3}}{11}(x - 2) \text{ oder } y = -0{\cdot}0600231x + 2{\cdot}1200462.$$

7) Der Winkel, welchen die gegebene Gerade mit der X-Achse bildet, sei α und der Winkel der gesuchten Geraden α_1, da beide Gerade den Winkel 45° einschließen sollen, so ist entweder

$\operatorname{tg} 45^0 = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha_1}$ oder $\operatorname{tg} 45^0 = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha_1}$; somit

$$1 = \frac{\frac{3}{2} - a_1}{1 + \frac{3a_1}{2}} \text{ oder } 1 = \frac{a_1 - \frac{3}{2}}{1 + \frac{3a_1}{2}}, \text{ daraus folgt}$$

$a_1 = -5$ oder $a_1 = {}^1/_5$ und $y = -5x + {}^{23}/_{12}$, $X = {}^{23}/_{60}$, $Y = {}^{23}/_{12}$; $y = \frac{x}{5} + {}^{11}/_{60}$, $X = -{}^{11}/_{12}$, $Y = {}^{11}/_{60}$.

Digitized by Google

8) $\frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 1$ hat die Richtungskonstante $\frac{5}{3}$, die durch den Punkt $x_1\ y_1$ gehende Gerade $y + 2{\cdot}8 = a\,(x + 3{\cdot}4)$ hat die Richtungskonstante a, daher

$$\operatorname{tg} 50^0\,38'\,54'' = \frac{a - \frac{5}{3}}{1 + \frac{5a}{3}} \text{ oder } \operatorname{tg} 50^0\,38'\,54'' = \frac{\frac{5}{3} - a}{1 + \frac{5a}{3}}$$

somit $a = -2{\cdot}7953$ oder $a = 0{\cdot}14745$ und

$y = -2{\cdot}7953x - 12{\cdot}3039$, $y = 0{\cdot}14745x - 2{\cdot}29867$

$\varphi = 109^0\,41'\,4''$, $\varphi = 8^0\,23'\,16''$.

9) Die gesuchte Gerade geht durch die beiden Punkte $x_1 = -2$, $y_1 = 3$; $x_2 = -5{\cdot}2$, $y_2 = 0$, sie ist

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1);\ y = \frac{15x}{16} + {}^{39}/_{8}.$$

Die gegebene Gerade hat die Richtungskonstante $-{}^{5}/_{2}$, daher

$$\operatorname{tg} v = \frac{-\frac{5}{2} - \frac{15}{16}}{1 - \frac{75}{32}} = {}^{110}/_{43},\ v = 68^0\,38'\,56{\cdot}46''\ (68^0\,38'\,56'').$$

10) Die durch den gegebenen Punkt gehende Gerade ist $y - 4 = A\,(x + 2)$ oder $y = Ax + (2A + 4)$.

Die Tangente des Neigungswinkels von $y = \frac{5}{12}x + 3$ und $y = Ax + (2A + 4)$ ist

$\frac{A - \frac{5}{12}}{1 + \frac{5A}{12}}$, die Tangente des Neigungswinkels

von $y = {}^{4}/_{3}\,x - 7$ und $y = Ax + (2A + 4)$ ist

$\frac{A - \frac{4}{3}}{1 + \frac{4A}{3}}$, da die beiden Neigungswinkel supplementär sein sollen,

so muß (wegen $\varphi + \psi = 180$, $\operatorname{tg}\varphi = -\operatorname{tg}\psi$)

$\frac{A - \frac{5}{12}}{1 + \frac{5A}{12}} = -\frac{A - \frac{4}{3}}{1 + \frac{4A}{3}}$ sein, $A_1 = {}^{9}/_{7}$, $A_2 = -{}^{7}/_{9}$, $9y = 7x + 50$,

$7y = -9x + 10$.

11) Die Gerade sei $y = A\,(x + 4)$, so ist $\frac{\eta - A\xi - 4A}{\sqrt{1 + A^2}} = 1$,

und da $\eta = 11$, $\xi = 3$, so $11 - 7A = \sqrt{1 + A^2}$, daraus

$A_1 = {}^{15}/_{8}$, $A_2 = {}^{4}/_{3}$, somit

$$y = \frac{15x}{8} + \frac{15}{2},\ y = \frac{4x}{3} + \frac{16}{3}.$$

Digitized by Google

12) $y = -\frac{4x}{3} + \frac{52}{3}$; $v = 126^\circ 52' 11{\cdot}64''$ $(v_1 = 53^\circ 7' 48{\cdot}36'')$
$(126^\circ 52' 12'', 53^\circ 7' 48'')$;
$X = 5^{11}/_{25}$, $Y = 10^{2}/_{25}$.

13) Die durch x_1 y_1 gehende Gerade ist $y = ax + (7 - 5a)$, oder da $a = \operatorname{tg} 40^\circ$ ist, $y = 0{\cdot}8391x + 2{\cdot}8045$.
Die im Punkte x_1 y_1 darauf Senkrechte ist $y = -\frac{x}{a} + \left(7 + \frac{5}{a}\right)$ oder $y = -1{\cdot}19175x + 12{\cdot}95877$.

14) $p_1 = -\frac{y_1 + \frac{3x_1}{4}}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}} = -\frac{4y_1 + 3x_1}{5}$;

$p_2 = -\frac{y_1 + \frac{12x_1}{5}}{\sqrt{1 + \frac{144}{25}}} = -\frac{5y_1 + 12x_1}{13}$,

aus $y_1 + x_1 = 2$ und $p_1 = p_2$, $p_1 = -p_2$ folgt
$y_1 = {}^7/_8$, $x_1 = {}^9/_8$, $y_2 = 9$, $x_2 = -7$.

15) Die Koordinaten des Durchschnittspunktes der beiden Geraden $y = ax + b$, $y = a_1 x + b_1$ sind $X = \frac{b_1 - b}{a - a_1}$, $Y = \frac{ab_1 - a_1 b}{a - a_1}$, daher ist $y = \frac{ab_1 - a_1 b}{a - a_1}$ die Gleichung der Geraden, welche durch den Durchschnittspunkt geht und mit der X-Achse parallel ist. Speziell ist $y = 2$ die gesuchte Gerade.

16) $\operatorname{tg} v = \frac{-2-3}{1-6} = 1$, daher schließen die gegebenen Geraden den Winkel von 45° oder 135° ein, somit ist der Winkel, den die Winkelsymmetrale mit einer der beiden Geraden einschließt, entweder 22° 30′ oder 67° 30′; und da $y = 3x + 4$ mit der X-Achse den Winkel 71° 33′ 54·2″ einschließt, so ist der Winkel der Winkelsymmetrale mit der X-Achse 94° 3′ 54·2″ und 4° 3′ 54·2″, daher
$y = -14{\cdot}07107x - 30{\cdot}14214$ $(y = -14{\cdot}071x - 30{\cdot}142)$ und
$y = 0{\cdot}0710679x - 1{\cdot}8578642$ $(y = 0{\cdot}07107x - 1{\cdot}85786)$;
oder kürzer ist (ξ, η) ein Punkt der Winkelsymmetrale, so muß sein Abstand von den beiden gegebenen Geraden gleich sein. Die Abstände sind:

$\pm\frac{\eta - 3\xi - 4}{\sqrt{10}}$, $\pm\frac{\eta + 2\xi + 6}{\sqrt{5}}$, somit

$\frac{\eta + 2\xi + 6}{\sqrt{5}} = \frac{\eta - 3\xi - 4}{\sqrt{10}}$, daraus

Digitized by Google

$\eta = -(7+5\sqrt{2})\,\xi - (16+10\sqrt{2})$ oder
$\eta = -14{\cdot}07107\,\xi - 30{\cdot}14214$
$\frac{\eta+2\,\xi+6}{\sqrt{5}} = -\frac{\eta-3\,\xi-4}{\sqrt{10}}$, daraus
$\eta = -(7-5\sqrt{2})\,\xi - (16-10\sqrt{2})$
oder $\eta = 0{\cdot}07107\,\xi - 1{\cdot}85786$, und zwar halbiert die erste Gerade den Winkel von 45°, die zweite den Winkel von 135°.

17) Die Gerade liege in der X-Achse, und das von A auf die Gerade gefällte Lot in der Y-Achse. Der Punkt C habe die Koordinaten ξ, o, so sind durch die Punkte $x_1 = o$, $y_1 = a$ und $x_2 = \xi$, $y_2 = o$ und durch $x_2 = \xi$, $y_2 = o$, $x_3 = c$, $y_3 = b$ Gerade zu legen, sie sind: $y = -\frac{a}{\xi}x + a$, $y = \frac{b}{c-\xi}x - \frac{b\xi}{c-\xi}$ und diese müssen aufeinander normal, also $\frac{b}{c-\xi} = \frac{\xi}{a}$ sein, daher

$$\xi = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}.$$

Bezüglich der synthetischen Lösung siehe § 17, Aufg. 10.

18) Der Durchschnittspunkt hat die Koordinaten $x_1 = -2$, $y_1 = -7$, der Mittelpunkt der Strecke hat die Koordinaten $x_2 = {}^3/_2$, $y_2 = {}^7/_2$ und durch diese beiden Punkte ist eine Gerade zu legen. Dieselbe ist $y = 3x - 1$.

19) Der Durchschnittspunkt hat die Koordinaten $x_1 = 7$, $y_1 = 17$, daher ist $P = {}^{106}/_{41}\sqrt{41} = 16{\cdot}55442$.

20) Die durch die Punkte M_1 und M_2 gehende Gerade ist

$$y = {}^1/_2 x - {}^5/_2.$$

Die mit ihr parallele, durch M_3 gehende Gerade

$$y = {}^1/_2 x + {}^9/_2$$

und die Senkrechte

$$y = -2x - 8.$$

21) Die Koordinaten des Durchschnittspunktes der beiden gegebenen Geraden sind $\xi = {}^{196}/_{11}$, $\eta = {}^{60}/_{11}$.

$v = 97°\,45'\,54{\cdot}6''$ ($v_1 = 82°\,14'\,5{\cdot}4''$) = Neigungswinkel der beiden Geraden ($97°\,45'\,55''$, $82°\,14'\,5''$).

Die Gleichungen der beiden Senkrechten sind

$$y = -4x + 14{\cdot}7,\quad y = \frac{2x}{5} - 4{\cdot}22.$$

$V = 82°\,14'\,5{\cdot}4''$ ($V_1 = 97°\,45'\,54{\cdot}6''$) = Neigungswinkel der beiden Senkrechten ($82°\,14'\,5''$, $97°\,45'\,55''$).

$\alpha_1 = 14°\,2'\,10{\cdot}5''$; $\alpha_2 = 111°\,48'\,5{\cdot}07''$ ($14°\,2'\,10''$, $111°\,48'\,5''$)

$$P_1 = \frac{18{\cdot}3\sqrt{17}}{17} = 4{\cdot}438402;\quad P_2 = \frac{83{\cdot}5\sqrt{29}}{29} = 15{\cdot}505561.$$

Digitized by Google

22) $P = 3 = h$, daher $\frac{b\,h}{2} = 6$, $b = 4\,m$.

Die Seiten sind $4\,m$, $3{\cdot}6055513\,m$, $3{\cdot}6055513\,m$.
Die Winkel $67^\circ\,22'\,48{\cdot}46''$, $\beta = \gamma = 56^\circ\,18'\,35{\cdot}77''$
$(67^\circ\,22'\,48'',\ 56^\circ\,18'\,36'')$.

23) Der Schwerpunkt ist der Schnittpunkt zweier Schwerlinien. Die drei Schwerlinien sind

$$y = x,\quad y = -8x - 9,\quad y = -\frac{x}{8} - {}^9/_8.$$

Daher sind die Koordinaten des Schwerpunktes $X = -1$, $Y = -1$.

24) Die Gleichungen der drei Seiten sind

$$x = 0,\quad y = 0,\quad 4y + 3x - 12 = 0.$$

Alle Punkte der Geraden, welche den Winkel bei A halbiert, stehen von $y = 0$ und von $4y + 3x - 12 = 0$ gleich weit ab; daher ist, wenn $\xi\,\eta$ die Koordinaten eines Punktes der Winkelsymmetralen bedeuten,

$$p = -\frac{4\eta + 3\xi - 12}{\sqrt{16+9}} = -\frac{4\eta + 3\xi - 12}{5}.$$

Da p bezüglich der Geraden $4y + 3x - 12 = 0$ positiv ist, so ist es bezüglich der Geraden $y = 0$ negativ und gleich η, somit $\eta = -\frac{4\eta + 3\xi - 12}{5}$, oder $\eta = -\frac{\xi}{3} + {}^4/_3$, oder aber man erhält $3y + x - 4 = 0$ als Gleichung der einen Winkelhalbierenden.

Für die den Winkel bei B halbierenden Geraden ergibt sich $\xi = -\frac{4\eta + 3\xi - 12}{5}$, oder $\eta = -2\xi + 3$, daher $y + 2x - 3 = 0$.

Für die den Winkel bei C halbierenden Geraden erhält man $\eta = \xi$ oder $y = x$ als Gleichung.

25) Die Schwerlinie von C auf AB ist $y = \frac{x}{13} - {}^9/_{13}$ und die von C auf AB gefällte Höhe ist $h_1 = 2\sqrt{10} = 6{\cdot}3245554$.

Die Schwerlinie von B auf AC ist $y = -\frac{x}{2} - {}^1/_2$ und die von B auf AC gefällte Höhe beträgt $h_2 = \sqrt{10} = 3{\cdot}1622777$, endlich die Schwerlinie von A auf BC ist $y = x - 1$ und die Höhe von A auf BC

$$h_3 = 2\sqrt{2} = 2{\cdot}8284272.$$

26) Nimmt man die Basis des Dreieckes als X-Achse und die im Mittelpunkt der Basis errichtete Normale als Y-Achse an, so haben die Eckpunkte A, B, C die Koordinaten: $-\frac{s}{2}$, 0;

Digitized by Google

$+\frac{s}{2}$, 0; 0, $\frac{s}{2}\sqrt{3}$ und die Gleichungen von

AB AC BC sind

$y = 0$ $y = x\sqrt{3} + \frac{s}{2}\sqrt{3}$ $y = -x\sqrt{3} + \frac{s}{2}\sqrt{3}$,

somit sind die Perpendikel vom Punkte $x_1 y_1$ innerhalb der Fläche des Dreieckes

$$y_1, \quad -\frac{y_1 - x_1\sqrt{3} - \frac{s}{2}\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{y_1 + x_1\sqrt{3} - \frac{s}{2}\sqrt{3}}{2}$$

und die Summe der drei Perpendikel ist $\frac{s}{2}\sqrt{3}$.

Synthetisch kann man diesen Satz leicht nachweisen, wenn man das gegebene Dreieck in drei zerlegt, mit den Perpendikeln als Höhen und dann den Flächeninhalt bestimmt.

$$\frac{sh_1}{2} + \frac{sh_2}{2} + \frac{sh_3}{2} = \frac{sh}{2}, \quad h_1 + h_2 + h_3 = h.$$

27) Die Schwerlinien sind $y = \frac{x}{2}$, $y = -\frac{4x}{7} + {}^{40}/_{7}$, $y = 8x - 40$.

Die Gleichungen der Höhen sind $y = \frac{x}{2}$, $x = 6$, $y = -\frac{3x}{4} + {}^{30}/_{4}$ und die Gleichungen der in den Mittelpunkten der Seiten errichteten Normalen

$$y = \frac{x}{2}, \quad x = 5, \quad y = -\frac{3x}{4} + {}^{25}/_{4},$$

somit sind die Koordinaten des Höhendurchschnittes $x = 6$, $y = 3$, des Schwerpunktes $x = 5{}^{1}/_{3}$, $y = 2{}^{2}/_{3}$, des Kreismittelpunktes $x = 5$, $y = 2{}^{1}/_{2}$. Für diese drei Punkte besteht $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$, daher liegen sie in einer geraden Linie.

Der Abstand des Kreismittelpunktes vom Höhendurchschnitte ist

$${}^{1}/_{2}\sqrt{5}.$$

Der Abstand des Kreismittelpunktes vom Schwerpunkte ist

${}^{1}/_{6}\sqrt{5}$ und es ist $3.{}^{1}/_{6}\sqrt{5} = {}^{1}/_{2}\sqrt{5}$.

28) Die Koordinaten eines Punktes M der Winkelsymmetrale seien η, ξ und p_1, p_2 die Abstände dieses Punktes von den Geraden, so ist

$$p_1 = -\frac{\eta - \frac{3\xi}{4} - \frac{3}{2}}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}}, \quad p_2 = -\frac{\eta - \frac{12\xi}{5} - \frac{24}{5}}{\sqrt{1 + \frac{144}{25}}}.$$

Da die Abstände gleich sein müssen, so ist mit Rücksicht auf die Lage der Punkte M und O zur ersten und zweiten

Digitized by Google

Geraden: $-p_1 = p_2$ oder $\frac{4\eta - 3\xi - 6}{5} = -\frac{5\eta - 12\xi - 24}{13}$ und daraus $7\eta = 9\xi + 18$ oder $7y = 9x + 18$ als Winkelhalbierende.

Der Abstand $P = -\frac{7y - 9x - 18}{\sqrt{49 + 81}}$ und für $x = y = 0$

$P = \frac{18\sqrt{130}}{130} = \frac{9\sqrt{130}}{65} = 1{\cdot}5787.$

29) Die durch A und B gehende Gerade ist $y = x + 2$, die Strecke AB ist $9\sqrt{2}$, die von C auf AB gefällte Höhe ist $\frac{7\sqrt{2}}{2}$, daher ist

$$f = \frac{9\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2}}{4} = 31{\cdot}5.$$

30) $a = 10$, $b = \sqrt{29} = 5{\cdot}3851648$, $c = \sqrt{37} = 6{\cdot}0827625$.

Den Radius des eingeschriebenen Kreises erhält man, wenn man vom Schnittpunkte zweier Winkelsymmetralen auf eine Dreieckseite eine Normale zieht. Die Gleichungen der drei Dreieckseiten sind:

$$AB..y = \frac{4x}{3}$$

$$AC..y = \frac{2x}{5} + {}^{14}/_{5}$$

$$BC..y = 6x + 14.$$

Die Gleichungen zweier Winkelsymmetralen sind:

$$\frac{-3\eta + 4\xi}{5} = \frac{\eta - 6\xi - 14}{\sqrt{37}} = \frac{5\eta - 2\xi - 14}{\sqrt{29}}.$$

Daraus ergeben sich als Koordinaten des Kreismittelpunktes $\xi = -0{\cdot}834138$, $\eta = 1{\cdot}061603$ und somit $r = 1{\cdot}304271$.

Schneller findet man den Radius nach der Formel $r = \frac{2f}{a+b+c}$, wo a, b, c die drei Seiten und f den Flächeninhalt des Dreieckes darstellen.

31) $a = \sqrt{18} = 4{\cdot}2426407$, $b = \sqrt{20} = 4{\cdot}4721360$,
$c = \sqrt{26} = 5{\cdot}0990195$, $F = 9$.
$r = 1{\cdot}3030451$, $f = 5{\cdot}334193$.

32) Die drei Seiten sind $a = \sqrt{26} = 5{\cdot}0990195$, $b = \sqrt{74} = 8{\cdot}6023253$, $c = 8$ und die Fläche des Dreieckes ist 20, daher

$$f = 10{\cdot}67325, \quad F = 60{\cdot}44424.$$

33) Die Gleichungen der drei Geraden sind

$$y = -\frac{12x}{7} - {}^{84}/_{7}, \quad y = \frac{2x}{7} + {}^{22}/_{7}, \quad y = \frac{16x}{7} - {}^{118}/_{7},$$

Digitized by Google

die Längen der Seiten sind

$c = \sqrt{193} = 13{\cdot}892444$, $b = \sqrt{212} = 14{\cdot}5602198$,

$a = \sqrt{305} = 17{\cdot}4642492$,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{2}{7} + \frac{12}{7}}{1 - \frac{24}{49}} = {}^{98}/_{25},\quad \alpha = 75^\circ\,41'\,20{\cdot}25''\ (75^\circ\,41'\,21'').$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{-\frac{12}{7} - \frac{16}{7}}{1 - \frac{192}{49}} = {}^{196}/_{143},\quad \beta = 53^\circ\,53'\,8{\cdot}95''\ (53^\circ\,53'\,10'').$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\frac{16}{7} - \frac{2}{7}}{1 + \frac{32}{49}} = {}^{98}/_{81},\quad \gamma = 50^\circ\,25'\,30{\cdot}8''\ (50^\circ\,25'\,30'').$$

34) $a = \sqrt{8} = 2{\cdot}8284271$, $b = 3$, $c = \sqrt{5} = 2{\cdot}2360680$, $f = 3$.
$\alpha = 63^\circ\,26'\,5{\cdot}8''$ $(63^\circ\,26'\,6'')$, $\gamma = 45^\circ$.
$R = 1{\cdot}5811389$ $(1{\cdot}5812)$.

35) $2\sqrt{2}$, ${}^2/_3\sqrt{2}$, ${}^4/_3\sqrt{5}$ $(2{\cdot}8284272, 0{\cdot}9428091, 2{\cdot}9814240)$; $f = {}^4/_3$; der Winkel, welcher der Seite ${}^4/_3\sqrt{5}$ gegenüberliegt, beträgt 90°, der der Seite $2\sqrt{2}$ gegenüberliegende Winkel $71^\circ\,33'\,54{\cdot}21''$, der dritte Winkel $18^\circ\,26'\,5{\cdot}79''$ $(71^\circ\,33'\,54'', 18^\circ\,26'\,6'')$.

36) Die Eckpunkte des Dreieckes haben die Koordinaten

$x_1 = 2$, $y_1 = 0$; $x_2 = b$, $y_2 = 0$; $x_3 = \frac{b+4}{3}$, $y_3 = \frac{2b-4}{3}$,

daher $6 = 2\,\frac{4-2b}{3} + b\,\frac{2b-4}{3}$, daraus ist $b_1 = 5$, $b_2 = -1$ und $y = -x + 5$, $y = -x - 1$.

37) Nach § 26 Aufgabe 60 ist $V = \frac{2\pi}{3}(p + q + r)\,F$, wo p, q, r die Abstände der Eckpunkte des Dreieckes von der Umdrehungsachse und F die Fläche des Dreieckes bedeuten.

$$V = 7\pi = 21{\cdot}991149.$$

38) Die gegebenen Gleichungen geben als Koordinaten der Eckpunkte des Dreieckes $x_1 = 1$, $y_1 = -2$; $x_2 = 4$, $y_2 = 0$; $x_3 = 2{\cdot}5$, $y_3 = 3$, daher sind die Seiten $a = \sqrt{27{\cdot}25} = 5{\cdot}2201533$, $b = \sqrt{11{\cdot}25} = 3{\cdot}5410195$, $c = \sqrt{13} = 3{\cdot}6055513$, somit $p = 2{\cdot}5$, $q = 4$, $r = 1$ und

$$O = (2q\pi + 2p\pi)\,\frac{b}{2} + (2q\pi + 2r\pi)\,\frac{c}{2} + (2p\pi + 2r\pi)\,\frac{a}{2}$$

oder

$$O = \pi\,(6{\cdot}5b + 5c + 3{\cdot}5a) = 182{\cdot}52639,$$
$$V = 30\pi = 94{\cdot}247779.$$

Digitized by Google

39) $O = [(p + r)\,AB + (q + r)\,AC + (p + q)\,BC]\pi$, $p = 0$, $r = 0$, $q = 3$, daher $O = 3\pi\,(AC + BC)$.
$AB = 10$, $AC = \sqrt{90} = 9{\cdot}4868330$, $BC = \sqrt{10} = 3{\cdot}1622777$,
$O = 12\pi\sqrt{10} = 119{\cdot}215060$, $V = 30\pi = 94{\cdot}247779$.

40) Die Eckpunkte haben die Koordinaten
$x_1 = 2$, $y_1 = 2$; $x_2 = 4$, $y_2 = 2$; $x_3 = 3$, $y_3 = 4$,
die Seiten sind 2, $\sqrt{5}$ und $\sqrt{5}$; $p = 2$, $q = 2$, $r = 4$, daher
$O = (8 + 12\sqrt{5})\,\pi = 109{\cdot}430519$, $V = \frac{32\pi}{3} = 33{\cdot}510322$.

41) Da $AB = CD = \sqrt{5}$ und $y_1 = y_4$, $y_2 = y_3$, so ist das Viereck ein gleichschenkliges Trapez, die Gleichungen der beiden Diagonalen sind $y = x$, $y = -x + 5$ und die Koordinaten des Durchschnittspunktes $X = Y = 2{\cdot}5$.

Die Länge einer Diagonale ist

$$2\sqrt{2},\ \operatorname{tg} v = \frac{1+1}{1-1} = \infty,\ \text{also } v = 90^0$$

und $f = 4$ Flächeneinheiten.

42) Die Seiten sind $a = \sqrt{65} = 8{\cdot}0622577$, $b = \sqrt{52} = 7{\cdot}2111026$
$c = \sqrt{45} = 6{\cdot}7082039$ und $d = \sqrt{8} = 2{\cdot}8284271$.
$\sphericalangle(a, b) = 63^0\,26'\,5{\cdot}8''$; $\sphericalangle(b, c) = 82^0\,52'\,30''$
$\sphericalangle(c, d) = 108^0\,26'\,5{\cdot}8''$; $\sphericalangle(d, a) = 105^0\,15'\,18{\cdot}4''$
$(63^0\,26'\,6''$, $82^0\,52'\,30''$, $108^0\,26'\,6''$, $105^0\,15'\,18'')$.
Die Fläche beträgt 35 Flächeneinheiten.

43) Aus den gegebenen Gleichungen folgen als Koordinaten der Eckpunkte:
$A : x_1 = 2$, $y_1 = 7$; $B : x_2 = 16$, $y_2 = 10$;
$C : x_3 = 5$, $y_3 = 3$; $D : x_4 = 1$, $y_4 = 2$.
Die Gleichungen der beiden Diagonalen sind

$$y = -\frac{4x}{3} + {}^{29}/_{3},\quad y = +\frac{8x}{15} + {}^{22}/_{15},$$

die Länge der Diagonalen beträgt 5 und 17.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{3}{14} - 5}{1 + \frac{15}{14}} = -{}^{67}/_{29},\quad \alpha = 113^0\,24'\,16{\cdot}9''\ (113^0\,24'\,18'').$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{7}{11} - \frac{3}{14}}{1 + \frac{21}{154}} = {}^{13}/_{35},\qquad \beta = 20^0\,22'\,35{\cdot}2''\ (20^0\,22'\,34'').$$

Digitized by Google

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\frac{1}{4} - \frac{7}{11}}{1 + \frac{7}{44}} = -\,{}^{1}/_{3}, \quad \gamma = 161^{\circ}\,33'\,54{\cdot}2'' \;(161^{\circ}\,33'\,54'').$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{5 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{5}{4}} = {}^{19}/_{9}, \qquad \delta = 64^{\circ}\,39'\,13{\cdot}7'' \;(64^{\circ}\,39'\,13'').$$

44) Die Gleichung der Geraden ist $y = \frac{x}{2} + {}^{5}/_{2}$, die Gleichung der darauf senkrechten und durch $x_3 = 3$, $y_3 = 2$ gehenden Geraden ist $y = -2x + 8$.

Die Koordinaten der vier Eckpunkte sind

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0;\ x_2 = 0,\ y_2 = {}^{5}/_{2};\ x_3 = {}^{11}/_{5},\ y_3 = {}^{18}/_{5};$$
$$x_4 = 4,\ y_4 = 0$$

und der Flächeninhalt $9^{19}/_{20}$ Flächeneinheiten.

45) Sind A, B, C, D die Eckpunkte des Viereckes mit den Koordinaten $x_1\,y_1$, $x_2\,y_2$, $x_3\,y_3$, x_4, y_4, so sind die Halbierungslinien der Seiten:

$(AB,\ BC)$ 1) $y = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}\,x - M,$

$(AD,\ CD)$ 2) $y = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}\,x - N,$

$(AB,\ AD)$ 3) $y = \frac{y_4 - y_2}{x_4 - x_2}\,x - P,$

$(BC,\ CD)$ 4) $y = \frac{y_4 - y_2}{x_4 - x_2}\,x - Q,$

daher haben 1 und 2, 3 und 4 gleiche Richtungskonstanten, es sind sonach 1 und 2, 3 und 4 parallel.

46) Ist $y - y' = A\,(x - x')$, wo $A = \operatorname{tang}\gamma$, die durch den Punkt $x'\,y'$ gehende Gerade, so ist der Abschnitt auf dem einen Schenkel (der X-Achse) $\frac{Ax' - y'}{A}$ und auf dem andern Schenkel, dessen Gleichung $y = x\operatorname{tg}\alpha = ax$ ist, $\frac{Ax' - y'}{A - a} \cdot \frac{1}{\cos\alpha}$. Aus $\frac{Ax' - y'}{A} = \frac{Ax' - y'}{A - a} \cdot \frac{1}{\cos\alpha}$ folgt $A_1 = -\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$ und $A_2 = \frac{y'}{x'}$, daher geht die Gleichung $y - y' = A\,(x - x')$ über in $y = -x\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \left(y' + x'\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right)$; $y = \frac{y'}{x'}x$; für $\alpha = 120^{\circ}$, $x' = 1$, $y' = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ ist $\gamma_1 = 150^{\circ}$ und $\gamma_2 = 30^{\circ}$, daher $y = -\frac{x}{3}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{3} = -0{\cdot}5773503\,x + 1{\cdot}1547005$, $y = \frac{x\sqrt{3}}{3} = 0{\cdot}5773503\,x$. Die durch

Digitized by Google

letztere Gleichung dargestellte Gerade geht durch den Scheitel und schneidet von den Schenkeln des Winkels gleiche Stücke 0 ab. Den Wert von A_1 kann man auch erhalten, wenn man beachtet, daß γ ein Außenwinkel eines gleichschenkligen Dreieckes ist, also $\gamma_1 = 90 + \frac{\alpha}{2}$ und $A_1 = \operatorname{tg} \gamma_1 = -\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$. Nimmt man aber beide Schenkel des Winkels α als Koordinatenachsen an, so ist die Gleichung der gesuchten Geraden $y - y_1 = \frac{\sin \gamma}{\sin(\alpha - \gamma)}$ $(x - x_1)$, wo $x_1 y_1$ die Koordinaten des gegebenen Punktes bezogen auf das schiefwinklige Koordinatensystem sind. Speziell $y_1 = {}^2/_3$, $x_1 = {}^4/_3$. Da die Abschnitte auf beiden Achsen gleich sind, so ist $y_1 - x_1 \frac{\sin \gamma}{\sin(\alpha-\gamma)} = x_1 - y_1 \frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin \gamma}$, daher $[\sin \gamma + \sin(\alpha - \gamma)]$ $[x_1 \sin \gamma - y_1 \sin(\alpha - \gamma)] = 0$, $\sin \gamma + \sin(\alpha - \gamma) = 0$ gibt $\operatorname{tg} \gamma_1 = -\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$; $\gamma_1 = 150^0$, daher $y = -x + 2$; $x_1 \sin \gamma - y_1 \sin(\alpha - \gamma) = 0$ gibt $\operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{y_1 \sin \alpha}{x_1 + y_1 \cos \alpha}$; $\gamma_2 = 30^0$, daher $y = \frac{x}{2}$.

§ 30. Der Kreis.

1) $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 6^2$.

Dieser Kreis berührt die Y-Achse im Punkte $y = 8$, die X-Achse wird nicht berührt.

2) $(x - {}^3/_8)^2 + (y + {}^7/_8)^2 = 4$.

$x_1 = 2{\cdot}1734368$; $x_2 = -1{\cdot}4234368$.
$y_1 = 1{\cdot}0895292$; $y_2 = -2{\cdot}8395292$.

3) Die Gleichungen der beiden Kreise sind $x^2 + (y - 1)^2 = 1$, $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, somit haben ihre Mittelpunkte die Koordinaten $x_1 = 0$, $y_1 = 1$; $x_2 = 1$, $y_2 = 0$ und die Gleichung der durch diese zwei Punkte gelegten Geraden ist $y = -x + 1$.

4) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = ({}^7/_2)^2$.

Die Seite des dem Kreise mit dem Radius $r = {}^7/_2$ eingeschriebenen regelmäßigen Dreieckes ist $s = r\sqrt{3}$. $O = s^2\sqrt{3}$ und $V = \frac{s^3}{12}\sqrt{2}$ (siehe § 28, Aufg. 1).

$O = 3r^2\sqrt{3} = 63{\cdot}65287$ Flächeneinheiten.
$V = \frac{r^3\sqrt{6}}{4} = 26{\cdot}255468$ Kubikeinheiten.

Digitized by Google

Gleichung eines Kreises, der durch drei Punkte geht.

5) Sind $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$ die Koordinaten dreier Punkte, durch welche die Peripherie eines Kreises gehen soll, der p und q als Koordinaten des Mittelpunktes und r als Radius hat, so müssen folgende Gleichungen gelten:

$$(x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2 = r^2, \quad (x_2 - p)^2 + (y_2 - q)^2 = r^2,$$
$$(x_3 - p)^2 + (y_3 - q)^2 = r^2,$$

aus denen nun p, q, r zu bestimmen sind.

a) $(x - {}^3/_2)^2 + (y - {}^3/_2)^2 = ({}^3/_2\sqrt{2})^2$;

b) $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$;

c) $(x - {}^9/_{14})^2 + (y - {}^{16}/_7)^2 = ({}^1/_{14}\sqrt{1105})^2$.

6) Es ist der Radius des durch diese drei Punkte gelegten Kreises zu suchen. $(x - {}^2/_{11})^2 + (y - {}^1/_{11})^2 = ({}^1/_{11}\sqrt{1105})^2$, daher $r = {}^1/_{11}\sqrt{1105}$ und $r^2\pi = 28{\cdot}68975$ Flächeneinheiten.

7) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$;
$r^2\pi = 3{\cdot}14159265$ Flächeneinheiten.

8) Da der Kreis die beiden Achsen berührt, so ist $p = q = r$
$(9 - r)^2 + (2 - r)^2 = r^2$, $r = 11 \pm 6$ und
$(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 25$, $(x - 17)^2 + (y - 17)^2 = 289$.

9) Die drei Gleichungen geben als Koordinaten der Eckpunkte
$x_1 = 0$, $y_1 = 2$; $x_2 = 2$, $y_2 = 3$; $x_3 = 1$, $y_3 = 1$.
Die Koordinaten des Kreismittelpunktes sind $\xi = {}^7/_6$, $\eta = {}^{13}/_6$, somit
$$(x - {}^7/_6)^2 + (y - {}^{13}/_6)^2 = ({}^5/_6\sqrt{2})^2.$$

10) Die durch A und B gehende Gerade ist $y = \frac{x}{3} + {}^4/_3$, die im Mittelpunkte von AB auf AB normal errichtete Gerade ist $y = -3x + 13$; der Durchschnittspunkt dieser Geraden mit der X-Achse hat die Koordinaten $y = 0$, $x = {}^{13}/_3$, somit sind wieder drei Punkte gegeben, durch welche ein Kreis gelegt werden soll.
$$(x - {}^{113}/_{30})^2 + (y - {}^{17}/_{10})^2 = ({}^{17}/_{30}\sqrt{10})^2$$
$r^2\pi = 10{\cdot}088003$ Flächeneinheiten.

11) $(x - {}^{19}/_6)^2 + (y - {}^{23}/_6)^2 = ({}^1/_6\sqrt{290})^2$; $r^2 = {}^{290}/_{36}$,
$O = 4r^2\pi = 101{\cdot}2291$ Flächeneinheiten;
$V = \frac{4r^3\pi}{3} = 95{\cdot}7705$ Kubikeinheiten.

Digitized by Google

12) $x^2 + (y - {}^9/_{10})^2 = (2 \cdot 9)^2$.

Bezeichnet man die Kante des Würfels mit a, so ist

$a^2 = 2r^2$, oder $a = r\sqrt{2}$ und

$O = 6a^2 = 12r^2 = 100 \cdot 92$ Flächeneinheiten;

$V = a^3 = 2r^3\sqrt{2} = 68 \cdot 9825$ Kubikeinheiten.

Kreis und Gerade.

13) Die Koordinaten der Durchschnittspunkte findet man, wenn man die Gleichung des Kreises und die der Geraden als koexistierend betrachtet und auflöst.

$x_1 = 3,\ y_1 = 4;\ x_2 = -{}^{117}/_{25},\ y_2 = -{}^{44}/_{25};\ S = 9{}^3/_5;$

$p = {}^7/_5$.

14) Die durch die zwei gegebenen Punkte gehende Gerade ist $y = \frac{x}{3} + 3$; sie hat mit dem Kreise die Punkte $x_1 = 3,\ y_1 = 4$; $x_2 = -4 \cdot 8,\ y_2 = 1 \cdot 4$ gemein, daher ist die Länge der Sehne

$D = 2 \cdot 6\sqrt{10} = 8 \cdot 221922$ $(8 \cdot 2219)$.

Aus $D = 2r \sin \alpha$ folgt $\sin \alpha = \frac{D}{2r}$, $\alpha = 55^0\,18'\,17 \cdot 4''$ $(55^0\,18'\,18'')$, daher

$$\text{Bogen} = \frac{2r\pi \,.\, 2\alpha}{360} = \frac{r\pi\alpha}{90} = 9 \cdot 652516 \quad (9 \cdot 6525).$$

15) $y = 12 \pm 2\sqrt{11},\ x = -6 \pm 4\sqrt{11},\ p = 6\sqrt{5}$.

$x_1 = 7 \cdot 2664992, \quad y_1 = 18 \cdot 6332496;$

$x_2 = -19 \cdot 2664992,\ y_2 = 5 \cdot 3667504;$

$p = 13 \cdot 4164080$.

16) Der eine Kreis hat zu Mittelpunktskoordinaten $\xi = 3,\ \eta = 0$ und als Radius $r = 3$; der andere Kreis hat $\xi = 0,\ \eta = 4$ und $r = 4$, daher sind die beiden Kreise $(x - 3)^2 + y^2 = 9$, $x^2 + (y - 4)^2 = 16$.

Bestimmt man aus der ersten und zweiten Gleichung x, so erhält man

$3 \pm \sqrt{9 - y^2} = \pm\sqrt{8y - y^2}$, $y_1 = 0$ und $y_2 = {}^{72}/_{25}$, daher $x_1 = 0$ und $x_2 = {}^{96}/_{25}$.

Die durch diese beiden Punkte gehende Gerade ist $y = \frac{3x}{4}$ und die gemeinschaftliche Sehne ist $S = 4 \cdot 8$. Allgemein sind die beiden Kreise $x^2 - 2ax + y^2 = 0$, $x^2 - 2by + y^2 = 0$,

Digitized by Google

so ist die durch die Schnittpunkte gehende Gerade $y = \frac{a}{b}x$ und die Sehne $S = \frac{2ab}{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + b^2}$.

17) $x_1 = -2 + {}^1/_5\sqrt{55} = -0{\cdot}5167603;$
$y_1 = 1 + {}^2/_5\sqrt{55} = 3{\cdot}9664794.$
$x_2 = -2 - {}^1/_5\sqrt{55} = -3{\cdot}4832397;$
$y_2 = 1 - {}^2/_5\sqrt{55} = -1{\cdot}9664794.$
Die Sehne $= 2\sqrt{11} = 6{\cdot}6332496.$
Der senkrechte Abstand $P = \sqrt{5} = 2{\cdot}236068.$

18) Die gegebene Gerade und der Kreis haben zwei Punkte gemein, deren Koordinaten sind:
$x_1 = 2 + {}^1/_2\sqrt{2} = 2{\cdot}7071068;$
$y_1 = -(2 - {}^1/_2\sqrt{2}) = -1{\cdot}2928932.$
$x_2 = 2 - {}^1/_2\sqrt{2} = 1{\cdot}2928932;$
$y_2 = -(2 + {}^1/_2\sqrt{2}) = -2{\cdot}7071068.$
Die gesuchte parallele Sehne ist $y = x - 2$, die Durchschnittspunkte derselben mit dem Kreise haben die Koordinaten $x = \frac{2 \pm \sqrt{14}}{2}$, $y = \frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2}$, daher ist die Länge der Sehne $2\sqrt{7} = 5{\cdot}2915026$ und $P = \sqrt{2} = 1{\cdot}4142136.$

19) Der Kreis $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ berührt die X-Achse im Punkte $x = 1$ und die Y-Achse im Punkte $y = 1$; mit der Geraden hat er die Punkte $x_1 = 0$, $y_1 = 1$; $x_2 = 1$, $y_2 = 0$ gemein, die Gerade geht somit durch die Berührungspunkte mit den Achsen.

20) Der geometrische Ort ist die Peripherie des Kreises $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4^2$; die Gerade ist eine Sekante, die Schnittpunkte haben die Koordinaten $x_1 = 2$, $y_1 = 7$; $x_2 = -{}^{22}/_{29}$, $y_2 = {}^3/_{29}$.

21) Die Aufgabe hat dieselbe Lösung wie folgende: in welchen Punkten schneidet die Gerade $y = x + 3$ den Kreis, dessen Mittelpunktskoordinaten $\xi = 3$, $\eta = 1$ sind und dessen Radius $r = 4$ ist? $y = x + 3$ und $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 16$ haben die Punkte $x_1 = {}^1/_2(1 + \sqrt{7})$, $y_1 = {}^1/_2(7 + \sqrt{7})$; $x_2 = {}^1/_2(1 - \sqrt{7})$, $y_2 = {}^1/_2(7 - \sqrt{7})$ oder $x_1 = 1{\cdot}82288$, $y_1 = 4{\cdot}82288$; $x_2 = -0{\cdot}82288$; $y_2 = 2{\cdot}17712$ miteinander gemein.

22) Den Radius des eingeschriebenen Kreises erhält man, wenn man vom Schnittpunkte der Winkelsymmetralen auf eine Dreiecksseite eine Normale zieht.

Digitized by Google

a) Sind ξ, η die Koordinaten des Schnittpunktes der Winkelsymmetralen, so ist der Abstand von der ersten Geraden

$$\varrho_1 = -\frac{\eta + \frac{4\xi}{3} - 5}{\sqrt{1 + \frac{16}{9}}} = -\frac{3\eta + 4\xi - 15}{5},$$ von der zweiten Geraden

$\varrho_2 = -\frac{3\eta - 4\xi - 23}{5}$ und von der dritten $\varrho_3 = \frac{4\eta - 3\xi + 30}{5}$.

Da $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$ ist, so erhält man aus
$3\eta + 4\xi - 15 = 3\eta - 4\xi - 23$ und $-3\eta + 4\xi + 23 = 4\eta - 3\xi + 30$; $\eta = -2$ und $\xi = -1$, daher $\varrho = 5$ und $(y+2)^2 + (x+1)^2 = 25$ als Gleichung des gesuchten eingeschriebenen Kreises.

b) $$\varrho_1 = \frac{\eta + \frac{3\xi}{4} + \frac{15}{4}}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}} = \frac{4\eta + 3\xi + 15}{5}$$

$$\varrho_2 = -\frac{12\eta - 5\xi + 10}{13}, \quad \varrho_3 = \frac{8\eta - 15\xi + 30}{17}$$

und wegen $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3$, $\eta = -{}^{15}/_{7}$, $\xi = -{}^{5}/_{14}$, daher $\varrho = {}^{15}/_{14}$ und $(x + {}^{5}/_{14})^2 + (y + {}^{30}/_{14})^2 = ({}^{15}/_{14})^2$.

23) Die Gleichung des Kreises ist $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 16$, somit hat der Mittelpunkt die Koordinaten $\xi = -2$, $\eta = 3$ und der Radius ist 4.

Der Kreis und die Gerade ergeben $13x^2 - 56x + 96 = 0$, also $x = \frac{28 \pm \sqrt{-464}}{13}$, somit haben sie keinen gemeinsamen Punkt oder die Gerade liegt ganz außerhalb des Kreises.

24) Die Gerade schneidet den Kreis $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$ in den Punkten $x_1 = {}^{27}/_{5}$, $y_1 = {}^{26}/_{5}$; $x_2 = {}^{3}/_{5}$, $y_2 = -{}^{6}/_{5}$. Die Sehne ist gleich 8, somit ein Durchmesser des Kreises.

$f = 4 \cdot 8$ Flächeneinheiten.

Kreis und Tangente.

25) Die Kurve ist ein Kreis $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5^2$.

Setzt man $x = \frac{4y + 19}{3}$ in die Kreisgleichung ein, so erhält man $y^2 + 2y + 1 = 0$, somit für y und für x zwei gleiche Werte, oder die beiden Schnittpunkte fallen zusammen und die Gerade ist eine Tangente im Punkte $x = 5$, $y = -1$.

Digitized by Google

26) Die Gleichung des Kreises ist $(x+1)^2+y^2=25$, daher ist die Gleichung der Tangente $(x+1)(3+1)+3y=25$ und $y=-\frac{4x}{3}+7$.

$$\alpha = 126^\circ 52' 11{\cdot}64'' \ (126^\circ 52' 12'').$$

27) Die Koordinaten des gegebenen Punktes seien ξ und η und die noch unbekannten Koordinaten des Berührungspunktes x_1, y_1, so muß die Gleichung der Tangente $yy_1+xx_1=r^2$ durch ξ und η erfüllt werden, es muß sonach $\eta y_1+\xi x_1=r^2$ und $y_1^2+x_1^2=r^2$ sein; daraus können nun x_1, y_1 bestimmt und dann in $yy_1+xx_1=r^2$ eingesetzt werden.

Speziell erhält man $x_1={}^3/_2$, $y_1=\pm{}^3/_2\sqrt{3}=\pm 2{\cdot}598076$ und die Gleichung der Tangente ist

$$y=-\frac{x_1}{y_1}x+\frac{r^2}{y_1}=\pm\frac{x}{3}\sqrt{3}\mp 2\sqrt{3}.$$

28) Die Berührungspunkte haben die Koordinaten $x_1=4$, $y_1=-3$; $x_2=3$, $y_2=4$, daher sind die Gleichungen der Tangenten

$$y=-\frac{3x}{4}+\frac{25}{4},\quad y=\frac{4x}{3}-\frac{25}{3} \text{ und } v=90^\circ.$$

29) Ist $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=r^2$ der Kreis und sind x_1y_1, x_2y_2 zwei Punkte desselben, so erhält man auf demselben Wege wie in Nr. 26 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{x_1+x_2-2\xi}{y_1+y_2-2\eta}$, somit als Gleichung der Sekante $y-y_1=-\frac{x_1+x_2-2\xi}{y_1+y_2-2\eta}(x-x_1)$; für $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ wird diese zur Tangentengleichung: $y-y_1=-\frac{x_1-\xi}{y_1-\eta}(x-x_1)$ oder $(y-y_1)(y_1-\eta)+(x-x_1)(x_1-\xi)=0$. Addiert man hiezu, da der Punkt x_1y_1 auch auf dem Kreise liegen muß $(y_1-\eta)^2+(x_1-\xi)^2=r^2$, so ergibt sich auch als Tangentengleichung

$$(y-\eta)(y_1-\eta)+(x-\xi)(x_1-\xi)=r^2.$$

In dem speziellen Falle ist $(x-{}^1/_2)^2+y^2={}^1/_4$ die Kreisgleichung, daher $(x-{}^1/_2)(x_1-{}^1/_2)+yy_1={}^1/_4$ die Tangentengleichung. x_1 und y_1 sind zu bestimmen. Aus der letzteren Gleichung folgt: $y=\frac{\frac{1}{2}-x_1}{y_1}x+\frac{1}{y_1}[{}^1/_4-{}^1/_2({}^1/_2-x_1)]$, da diese Gerade parallel sein soll mit $y+x=0$, so muß $\frac{\frac{1}{2}-x_1}{y_1}=-1$, und da x_1y_1 auf der Peripherie des Kreises sich befinden soll, so muß auch $x_1^2+y_1^2-x_1=0$ sein.

Digitized by Google

Aus diesen beiden Gleichungen folgt $x_1 = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}$, $y_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$, daher sind die beiden Tangenten $y = -x + \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$ oder

$$y = -x + \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \quad y = -x + \frac{1-\sqrt{2}}{2}.$$

30) Aus $x^2 + y^2 = 100$ folgt $y = 8$ für $x = 6$.

Die Tangente in diesem Punkte ist $y = -\frac{3x}{4} + {}^{25}/_{2}$, die durch die zwei gegebenen Punkte gehende Gerade ist $y = \frac{x}{2} + {}^{5}/_{2}$, somit

$$\operatorname{tg} v = \frac{-\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{3}{8}} = -2 \text{ und } v = 116^\circ 33' 54{\cdot}18'' \; (116^\circ 33' 54'');$$

$180^\circ - v$.

31) Die Gleichung der Tangente ist $xx_1 + yy_1 = r^2$, die Abschnitte auf den Koordinatenachsen sind $X = \frac{r^2}{x_1}$, $Y = \frac{r^2}{y_1}$, daher sind $\frac{r^2}{y_1} = n \cdot \frac{r^2}{x_1}$, oder $y_1 = \frac{x_1}{n}$ und $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ aufzulösen

$y = -nx + r\sqrt{1+n^2}$.

32) Der durch die drei Punkte gelegte Kreis hat die Gleichung

$$(x-2)^2 + (y + {}^{5}/_{2})^2 = {}^{25}/_{4}.$$

Nach Nr. 29 ist die Gleichung der Tangente im Punkte A ${}^{5}/_{2}(y + {}^{5}/_{2}) - 2(x-2) = {}^{25}/_{4}$ oder $y = \frac{4x}{3}$, die Gleichung der Tangente im Punkte B ${}^{5}/_{2}(y + {}^{5}/_{2}) + 2(x-2) = {}^{25}/_{4}$ oder $y = -\frac{4x}{3} + {}^{16}/_{3}$. Oder $(x-2)^2 + (y + {}^{5}/_{2})^2 = {}^{25}/_{4}$.

Setzt man $x - 2 = \xi$ und $y + {}^{5}/_{2} = \eta$, so $\xi^2 + \eta^2 = {}^{25}/_{4}$ und die Tangentengleichung ist $\xi\xi_1 + \eta\eta_1 = {}^{25}/_{4}$.

Der Punkt A hat dann die Koordinaten $\xi_1 = -2$, $\eta_1 = {}^{5}/_{2}$ und der Punkt B die Koordinaten $\xi_2 = 2$, $\eta_2 = {}^{5}/_{2}$; daher

${}^{5}/_{2}\eta - 2\xi = {}^{25}/_{4}$, ${}^{5}/_{2}\eta + 2\xi = {}^{25}/_{4}$ und

$\eta = \frac{4\xi}{3} + \frac{25}{6}$, $\eta = -\frac{4\xi}{3} + \frac{25}{6}$ als Tangentengleichungen.

Daher ist

$$\operatorname{tg} v = \frac{\frac{4}{3} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{16}{9}} = -{}^{24}/_{7} \text{ und } v = 106^\circ 15' 36{\cdot}72'',$$

$$v_1 = 73^\circ 44' 23{\cdot}28'' \; (106^\circ 15' 37'', \; 73^\circ 44' 23'').$$

Digitized by Google

33) Die Koordinaten der Durchschnittspunkte sind

$$x_1 = 1,\ y_1 = -3;\ x_2 = {}^{49}/_{17},\ y_2 = {}^{77}/_{17}.$$

Da die Kreisgleichung $(x-5)^2 + y^2 = 25$ lautet, so sind nach $(y-\eta)(y_1-\eta) + (x-\xi)(x_1-\xi) = r^2$ (siehe Nr. 29) die Tangenten $y = -\frac{4x}{3} - {}^5/_3$ und $y = \frac{36x}{77} + {}^{35}/_{11}$.

Die Koordinaten des Schnittpunktes der Tangenten sind $X = -{}^{35}/_{13}$, $Y = {}^{25}/_{13}$ und $\operatorname{tg} v = {}^{116}/_{87}$, somit $v = 78^\circ\,11'\,15{\cdot}8''$, $v_1 = 101^\circ\,48'\,44{\cdot}2''$ ($78^\circ\,11'\,16''$, $101^\circ\,48'\,44''$).

34) $(x-11)^2 + (y+6)^2 = 100$; $X_1 = 3$, $X_2 = 19$.

Nach Nr. 29 sind die Tangenten in den Punkten $X_1 = 3$, $Y_1 = 0$ und $X_2 = 19$, $Y_2 = 0$: $y = \frac{4x}{3} - 4$, $y = -\frac{4x}{3} + {}^{76}/_3$.

Aus $\operatorname{tg}\alpha = {}^4/_3$ folgt $\alpha = 53^\circ\,7'\,48{\cdot}36''$ ($53^\circ\,7'\,48''$), daher

$$V = \frac{r^2\pi h}{3} = \frac{r^3\pi}{3}\operatorname{tg}\alpha = \frac{4000\,\pi}{9} = 1396{\cdot}2634 \text{ Kubikeinheiten.}$$

35) Sind $y'\,x'$ die Koordinaten eines Punktes, von dem aus an den Kreis $(y-\eta)^2 + (x-\xi)^2 = r^2$ Tangenten zu ziehen sind, so muß $(y-\eta)(y_1-\eta) + (x-\xi)(x_1-\xi) = r^2$ auch bestehen, wenn man y', x' für y, x setzt, also

$$(y'-\eta)(y_1-\eta) + (x'-\xi)(x_1-\xi) = r^2.$$

Aus dieser Gleichung und aus $(y_1-\eta)^2 + (x_1-\xi)^2 = r^2$ sind nun y_1 und x_1 zu bestimmen und dann in die Tangentengleichung einzusetzen.

Speziell: die Kreisgleichung ist $(y-1)^2 + (x-3)^2 = 2$, daher sind y_1 und x_1 aus $(y_1-1)^2 + (x_1-3)^2 = 2$ und $(0-1)(y_1-1) + (0-3)(x_1-3) = 2$ oder $y_1 + 3x_1 = 8$ zu bestimmen. Man erhält $x_1 = \frac{12 \pm 2}{5}$, $y_1 = 8 - 3x_1$, daher sind die Tangenten $y = x$, $y = -\frac{x}{7}$ und

$$\operatorname{tg} v = \frac{1 + \frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{7}} = {}^4/_3, \quad v = 53^\circ\,7'\,48{\cdot}36'' \ (53^\circ\,7'\,48'').$$

Oder setzt man $x - 3 = \xi$, $y - 1 = \eta$, so ist die Kreisgleichung $\xi^2 + \eta^2 = 2$ und vom Punkte $\xi_1 = -3$, $\eta_1 = -1$ sollen an diesen Kreis die Tangenten gezogen werden.

Die durch $\xi_1\ \eta_1$ gehende Gerade ist $y + 1 = a(x+3)$, somit $\frac{y' + 1 - ax' - 3a}{\sqrt{1+a^2}} = \sqrt{2}$; y', x' sind als Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises $\xi^2 + \eta^2 = 2$ gleich Null, daher

Digitized by Google

$\frac{1-3a}{\sqrt{1+a^2}} = \sqrt{2}$; $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{7}$ und

$$\operatorname{tg} v = \frac{1+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}} = \frac{4}{3}.$$

36) Die Aufgabe kann man auf vier Arten lösen:

1. Die Abstände der Tangenten von den Kreismittelpunkten sind gleich den Radien der Kreise. Daraus ergeben sich für a und b in $y = ax + b$ die Bedingungsgleichungen:

$\frac{b}{\sqrt{1+a^2}} = +1$, $\frac{4a+b}{\sqrt{1+a^2}} = \pm 2$,

daher $b = \sqrt{1+a^2}$ und $\frac{4a+b}{b} = +2$, $4a = b$, somit

$\frac{4a}{\sqrt{1+a^2}} = 1$ und

$a = \pm \frac{1}{15}\sqrt{15}$, $b = \pm \frac{4}{15}\sqrt{15}$; $\frac{4a+b}{b} = -2$,

$4a = -3b$, $b = -\frac{4a}{3}$,

$\frac{-\frac{4a}{3}}{\sqrt{1+a^2}} = 1$ und $a = \pm \frac{3}{7}\sqrt{7}$, $b = \mp \frac{4}{7}\sqrt{7}$,

somit

$y = \pm \frac{x}{15}\sqrt{15} \pm \frac{4}{15}\sqrt{15}$,

$y = \pm \frac{3\sqrt{7}}{7} x \mp \frac{4}{7}\sqrt{7}$.

2. Die Tangenten gehen durch die Ähnlichkeitspunkte der beiden Kreise.

3. Man berechnet zuerst die Tangenten, welche durch den Koordinatenanfangspunkt an den Kreis $(x-4)^2 + y^2 = (R-r)^2 = 1$ und dann an den Kreis $(x-4)^2 + y^2 = (R+r)^2 = 9$ gezogen werden können und zieht dann zu diesen Tangenten im Abstande $\pm r$ Parallele; oder

4. sind ξ, η die Koordinaten des Berührungspunktes des einen und ξ_1, η_1 die des anderen Kreises, so sind die Gleichungen der Tangenten $x\xi + y\eta = 1$, $(x-4)(\xi_1 - 4) + y\eta_1 = 4$; und da die Tangenten beiden Kreisen gleichzeitig angehören sollen, so gehen die Gleichungen über in

1) $\xi\xi_1 + \eta\eta_1 = 1$ 2) $(\xi - 4)(\xi_1 - 4) + \eta\eta_1 = 4$

dazu kommen noch

3) $\xi^2 + \eta^2 = 1$ 4) $(\xi_1 - 4)^2 + \eta_1^2 = 4$,

Digitized by Google

welche vier Gleichungen nun nach ξ, η, ξ_1, η_1 aufzulösen sind. Einfach gestaltet sich auch die Rechnung mit Hilfe der Ähnlichkeitspunkte.

Man bestimmt zunächst den äußeren und inneren Ähnlichkeitspunkt und konstruiert von diesen beiden Punkten an einen der Kreise, etwa den ersteren, die Tangenten. Die Ähnlichkeitspunkte haben die Koordinaten $x' = {}^4/_3$, $y' = 0$; $x' = -4$, $y' = 0$. Nach Nr. 27 sind dann die vier Tangenten: $y = \pm \frac{x\sqrt{15}}{15} \pm \frac{4\sqrt{15}}{15}$

$y = \mp \frac{3\sqrt{7}}{7} x \pm \frac{4\sqrt{7}}{7}$, wo gleichzeitig die oberen oder unteren Zeichen gelten; $v_1 = 14^0\,28'\,39''$ $(165^0\,31'\,21'')$;
$v_2 = 48^0\,35'\,25{\cdot}4''$ $(131^0\,24'\,34{\cdot}6'')$ $(48^0\,35'\,25'',\ 131^0\,24'\,35'')$.

37) Ist $y = Ax + B$ eine solche Tangente, so muß das Perpendikel darauf vom Mittelpunkte des ersten Kreises 10, das vom zweiten Kreis aber 5 sein [da die Gleichung des zweiten Kreises $(x-21)^2 + (y-3)^2 = 5^2$ ist],
daher $\frac{-B}{\sqrt{1+A^2}} = 10$, $\frac{3-21A-B}{\sqrt{1+A^2}} = -5$. Aus diesen beiden Gleichungen folgt $B^2 = 100\,(1+A^2)$ und $2 - 14A = B$, daher $12A^2 - 7A = 12$, $A_1 = {}^4/_3$, $A_2 = -{}^3/_4$ und $B_1 = -{}^{50}/_3$, $B_2 = {}^{25}/_2$, somit $y = \frac{4x}{3} - {}^{50}/_3$; $y = -\frac{3x}{4} + {}^{25}/_2$.

38) Die Gleichung des Kreises ist $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 25$.
Sind ξ, η die Koordinaten des Berührungspunktes, so ist die Tangente $(y-6)(\eta-6) + (x-4)(\xi-4) = 25$ oder

$$y = \frac{4-\xi}{\eta-6} x + \frac{4\xi + 6\eta - 27}{\eta - 6}.$$

Da die Tangente gegen die Koordinatenachsen gleich geneigt ist, so kann der Neigungswinkel nur entweder 45^0 oder 135^0 sein. also $\frac{4-\xi}{\eta-6} = +1$, $\frac{4-\xi}{\eta-6} = -1$. Aus diesen beiden Gleichungen und aus $(\eta-6)^2 + (\xi-4)^2 = 25$ folgt

$$\xi_1 = 4 - {}^5/_2\sqrt{2} = \xi_4 \qquad \xi_2 = 4 + {}^5/_2\sqrt{2} = \xi_3$$
$$\eta_1 = 6 + {}^5/_2\sqrt{2} = \eta_3 \qquad \eta_2 = 6 - {}^5/_2\sqrt{2} = \eta_4,$$

somit genügen vier Tangenten.

39) Die Gleichung des Kreises ist $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 16$ und die Gleichung der Geraden, welche durch $x_1 = 1$, $y_1 = 3$ geht und auf $3y + 4x + 12 = 0$ normal steht, ist $y = \frac{3x}{4} + {}^9/_4$, die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden sind $x_2 = -3$, $y_2 = 0$ und von diesem Punkte sind an den gegebenen Kreis

Digitized by Google

Tangenten zu ziehen. Die Berührung erfolge in ξ, η, so muß wegen $(y-3)(\eta-3)+(x-1)(\xi-1)=16$ die Gleichung $-3(\eta-3)-4(\xi-1)=16$ und $(\xi-1)^2+(\eta-3)^2=16$ bestehen; daraus folgt

$$\xi_1=-{}^3/_{25},\ \eta_1=-{}^{21}/_{25};\ \xi_2=-3,\ \eta_2=3,$$

daher sind die beiden Tangenten $y=-\frac{7x}{24}-{}^7/_8$, $x=-3$.

Der Drehungswinkel ist gleich dem Winkel, den die Tangente mit der Geraden bildet:

$$\operatorname{tg} v=\frac{-\frac{7}{24}+\frac{4}{3}}{1+\frac{28}{72}}=\frac{3}{4},\quad v=36^0\,52'\,11{\cdot}64''\ (36^0\,52'\,12'').$$

Da $\operatorname{tg}\alpha=-{}^4/_3$, also $\alpha=126^0\,52'\,11{\cdot}64''$ der Neigungswinkel der gegebenen Geraden ist und $x=-3$ den Neigungswinkel 90^0 hat, so ist auch bei dieser Tangente der Drehungswinkel $36^0\,52'\,11{\cdot}64''$ $(36^0\,52'\,12'')$.

40) Die beiden Tangenten sind $y=\pm\frac{x\sqrt{15}}{15}\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$.

$y=\frac{x\sqrt{15}}{15}+\frac{\sqrt{15}}{5}$ oder $y=\frac{1}{\sqrt{15}}(x+3)$ hat mit $(x-4)^2+y^2=4$ die Schnittpunkte $x_1={}^9/_2$, $y_1=\frac{\sqrt{15}}{2}$; $x_2={}^{21}/_8$, $y_2=\frac{3\sqrt{15}}{8}$.

Für die andere Tangente ergeben sich:

$$x_1={}^9/_2,\ y_1=-\frac{\sqrt{15}}{2};\ x_2={}^{21}/_8,\ y_2=-\frac{3\sqrt{15}}{8},$$

somit ist in beiden Fällen die Sehne $={}^1/_2\sqrt{15}$. Der dieser Sehne entsprechende Zentriwinkel ist $\alpha=57^0\,54'\,40''$, somit die Fläche des Sektors $f=\frac{r^2\pi\,.\,\alpha}{360}$ und das Segment $=\frac{r^2\pi\alpha}{360}$ weniger dem Dreiecke, dessen Basis die Sehne und dessen Höhe deren Abstand vom Kreismittelpunkte ist.

$\Delta=2{\cdot}0207-1{\cdot}6944=0{\cdot}3263$ Flächeneinheiten.

41) Da der Mittelpunkt des Kreises in der X-Achse liegt, geht die allgemeine Kreisgleichung über in $(x-p)^2+y^2=r^2$; die Gleichung der Tangente ist $y=-\frac{x_1-p}{y_1}x+p\frac{x_1-p}{y_1}+\frac{r^2}{y_1}=2x+3$; daher $\frac{x_1-p}{y_1}=2$; $\frac{p(x_1-p)}{y_1}+\frac{r^2}{y_1}=3$ und $x_1=-1$. Letzterer Wert ergibt $y_1=1$, somit $p=1$ und $r^2=5$; $(x-1)^2+y^2=5$.

Digitized by Google

Oder da der Kreis die Gerade $y = 2x + 3$ im Punkte $x = -1$ berührt, so ist $y = -2 + 3 = 1$, also $x = -1$, $y = 1$ ein Punkt des Kreises, somit $(1 + p)^2 + 1 = r^2$. Da die Gerade auch Tangente ist, so muß ihr Abstand vom Kreismittelpunkt r sein.

$$r = \frac{y' - 2x' - 3}{\sqrt{1+4}},$$

wo für y', x' die Werte 0 und p zu setzen sind, $r = \frac{-2p-3}{\sqrt{5}}$.

Aus $(1 + p)^2 + 1 = r^2$ und $4p^2 + 12p + 9 = 5r^2$ folgt $p = 1$ und $r^2 = 5$.

42) Von $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ ist $q = 0$ und $r = 13$, sonach $(x - p)^2 + y^2 = 169$. Identifiziert man nun $y\eta + (x - p)(\xi - p) = 169$ mit $5y + 12x = 97$, so erhält man $\frac{\xi - p}{\eta} = {}^{12}/_{5}$, $\frac{p(\xi - p)}{\eta} + \frac{169}{\eta} = \frac{97}{5}$ und dazu kommt $(\xi - p)^2 + \eta^2 = 169$.

Eliminiert man zunächst $(\xi - p)$, so erhält man $\eta_1 = 5$, $p_1 = -6$; $\eta_2 = -5$, $p_2 = {}^{133}/_{6}$, somit

$(x + 6)^2 + y^2 = 169$,

$(x - {}^{133}/_{6})^2 + y^2 = 169$.

Oder da die Koordinaten des Kreismittelpunktes (p, o) sind, so ist das auf die Tangente gefällte Perpendikel

$$-\frac{\frac{12p}{5} - \frac{97}{5}}{\sqrt{1 + \frac{144}{25}}} = 13, \text{ somit } p = -6 \text{ und}$$

$$\frac{\frac{12p}{5} - \frac{97}{6}}{\sqrt{1 + \frac{144}{25}}} = 13, \text{ somit } p = {}^{133}/_{6}.$$

43) Weil der Kreis die beiden positiven Achsen tangieren soll, so müssen seine Mittelpunktkoordinaten $\xi = \eta = \varrho$ sein; das Perpendikel von $\xi = \varrho$, $\eta = \varrho$ auf die Gerade ist

$$\pm\frac{\varrho + \frac{5\varrho}{3} - 5}{\sqrt{1 + {}^{25}/_{9}}} = \varrho, \text{ daher } \varrho_1 = \frac{15}{8 - \sqrt{34}} = \frac{8 + \sqrt{34}}{2} \text{ und}$$

$$\varrho_2 = \frac{15}{8 + \sqrt{34}} = \frac{8 - \sqrt{34}}{2}$$

oder $\varrho_1 = 6{\cdot}91547595$, $\varrho_2 = 1{\cdot}08452405$.

Die Kreisgleichung ist sonach:

$$(x - \varrho)^2 + (y - \varrho)^2 = \varrho^2, \text{ wo } \varrho = \frac{8 \pm \sqrt{34}}{2}.$$

Digitized by Google

Die X-Achse wird tangiert im Punkte $x = \varrho$, die Y-Achse im Punkte $y = \varrho$. Die Gleichung der durch den Kreismittelpunkt, d. i. durch den Punkt $x_1 = \varrho_1$, $y_1 = \varrho_1$ gehenden, auf $y = -\frac{5x}{3} + 5$ normalen Geraden ist $y - \varrho_1 = \frac{3}{5}(x - \varrho_1)$, somit erhält man die Koordinaten des Berührungspunktes der Geraden, wenn man die beiden Gleichungen $y = -\frac{5x}{3} + 5$ und $y - \varrho_1 = \frac{3}{5}(x - \varrho_1)$ nach x und y auflöst.

Man erhält so

$x_1 = 0{\cdot}98550424$, $y_1 = 3{\cdot}35749293$, und analog

$x_2 = 2{\cdot}01449575$, $y_2 = 1{\cdot}64250708$.

44) Die Gleichung des Kreises ist $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$. Wegen der Berührung der X- und Y-Achse $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ und wegen der Berührung der Geraden im Punkte $x_1 = 8$, $y_1 = 1$

$(8-r)^2 + (1-r)^2 = r^2$, daher $r_1 = 13$, $r_2 = 5$;

sonach sind die beiden Kreise $(x-13)^2 + (y-13)^2 = 13^2$

$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2$.

Die Tangenten an den einen Kreis sind somit

$(x-13)(\xi-13) + (y-13)(\eta-13) = 169$

oder $y - 13 = -\frac{(x-13)(\xi-13)}{\eta-13} + \frac{169}{\eta-13}$ und wegen des Parallelismus mit der gegebenen Geraden

$$y - 13 = -\frac{4}{3}(x-13) + \frac{169}{\eta-13}.$$

Aus $\frac{\xi-13}{\eta-13} = \frac{4}{3}$ und $(\xi-13)^2 + (\eta-13)^2 = 169$

folgt $\eta_1 = {}^{104}/_5$ und $\eta_2 = {}^{26}/_5$, daher ergeben sich als Gleichungen der Tangenten

$y = -\frac{4x}{3} + 52$ und

$y = -\frac{4x}{3} + {}^{26}/_3$ und bezüglich des zweiten Kreises

$$y = -\frac{4x}{3} + 20 \text{ und}$$

$$y = -\frac{4x}{3} + \frac{10}{3}.$$

45) Die Perpendikel vom Mittelpunkte des Kreises auf die beiden Geraden sind:

$$\frac{q - \frac{3p}{4} - \frac{1}{2}}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}} = -r, \qquad \frac{q + \frac{5p}{12} - 4}{\sqrt{1 + \frac{25}{144}}} = r \text{ oder}$$

$$4q - 3p - 2 = -5r \qquad 12q + 5p - 48 = 13r.$$

Digitized by Google

Aus diesen beiden Gleichungen können q und p, die Mittelpunktskoordinaten des Kreises, durch r, den Radius des Kreises ausgedrückt werden, $p = 3 + 2r$, $q = \frac{r+11}{4}$.

Die Kreisgleichung $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ geht wegen $x = 6$, $y = 3$ über in $(6-p)^2 + (3-q)^2 = r^2$; in dieser Gleichung sind nun die Werte für p und q einzusetzen; man erhält

$r_1 = \frac{145}{49}$, $r_2 = 1$; $p_1 = \frac{437}{49}$, $p_2 = 5$; $q_1 = \frac{171}{49}$, $q_2 = 3$,

oder

$$(x - {}^{437}/_{49})^2 + (y - {}^{171}/_{49})^2 = ({}^{145}/_{49})^2$$
$$(x-5)^2 + (y-3)^2 = 1.$$

46) Durch die beiden Schnittpunkte ist die Gerade $y = -\frac{5x}{4} + 5$ gegeben. Da diese Gerade und die Y-Achse Tangenten sind, so muß der Mittelpunkt des Kreises in der den Winkel beider Geraden Halbierenden liegen. Der Abstand des Mittelpunktes von der Y-Achse ist 1, von der Geraden

$$\frac{y_1 + \frac{5x_1}{4} - 5}{\sqrt{1 + \frac{25}{16}}} = \frac{4y_1 - 15}{\sqrt{41}}, \text{ daher } \frac{4y_1 - 15}{\sqrt{41}} = \pm 1, \text{ somit}$$

$$y_1 = \frac{15 \pm \sqrt{41}}{4} \text{ und } (x-1)^2 + \left(y - \frac{15 \pm \sqrt{41}}{4}\right)^2 = 1.$$

Der geometrische Ort des Kreismittelpunktes ist somit die zur Y-Achse parallele Gerade $x = 1$, und die mit $y = -\frac{5x}{4} + 5$ im Abstande ± 1 parallele Gerade: $y = -\frac{5x}{4} + \frac{20 \pm \sqrt{41}}{4}$.

Oder: Aus $(y-q)^2 + (x-p)^2 = r^2$ folgt als Tangentengleichung:

$$y = -\frac{\xi - p}{\eta - q}(x-p) + \frac{r^2}{\eta - q} + q,$$

wo ξ, η die Koordinaten des Berührungspunktes sind;
für $p = 1$ und $r = 1$ geht die Tangentengleichung über in
$y = -\frac{\xi - 1}{\eta - q}x + \frac{\xi}{\eta - q} + q$; da $y = -\frac{5x}{4} + 5$ Tangente ist, so muß $\frac{\xi - 1}{\eta - q} = {}^5/_4$ und $\frac{\xi}{\eta - q} + q = 5$ sein. Aus
$\eta - q = {}^4/_5(\xi - 1)$ und $(\xi - 1)^2 + (\eta - q)^2 = 1$ folgt
$\xi - 1 = \pm \frac{5}{\sqrt{41}}$ und $\eta - q = \pm \frac{4}{\sqrt{41}}$, dadurch erhält man

Digitized by Google

aus $\frac{\xi}{\eta - q} + q = 5$, $q_1 = \frac{15 + \sqrt{41}}{4}$, $q_2 = \frac{15 - \sqrt{41}}{4}$. Der eine Mittelpunkt liegt in der Halbierenden des spitzen, der andere in der Halbierenden des stumpfen Winkels.

47) Da $y = ax$ eine Tangente an den Kreis ist, muß der Abstand des Kreismittelpunktes von dieser Tangente gleich dem Radius sein, also $\pm \frac{\beta - a\alpha}{\sqrt{1 + a^2}} = r$ und

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \left(\frac{\beta - a\alpha}{\sqrt{1 + a^2}}\right)^2$$

$$(x - 4)^2 + (y - 8)^2 = (2\sqrt{2})^2.$$

48) Die allgemeine Kreisgleichung ist

$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$; weil der Kreis durch den Punkt $x_1 = 1$, $y_1 = 1$ gehen soll, so muß

$(1 - p)^2 + (1 - q)^2 = r^2$ und weil er die X-Achse berühren soll, so muß $q = r$, also

$(1 - p)^2 + (1 - r)^2 = r^2$ oder $2 - 2p - 2r + p^2 = 0$ sein.

Da $2y - x - 3 = 0$ oder $y = \frac{x}{2} + {}^3/_2$ eine Tangente sein soll, so muß das von (p, q) auf diese Gerade gefällte Perpendikel gleich dem Radius sein, also

$$-\frac{q - \frac{p}{2} - \frac{3}{2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}}} = -\frac{2q - p - 3}{\sqrt{5}} = -\frac{2r - p - 3}{\sqrt{5}} = r.$$

Aus dieser Gleichung und aus $2 - 2p - 2r + p^2 = 0$ folgt $r^2 - 2r + 0{\cdot}94738 = 0$, $r_1 = q_1 = 1{\cdot}22940$, $r_2 = q_2 = 0{\cdot}77060$, $p_1 = 2{\cdot}20782$, $p_2 = 0{\cdot}26432$ und die Kreisgleichungen sind

$(x - 2{\cdot}2078)^2 + (y - 1{\cdot}2294)^2 = 1{\cdot}2294^2$

$(x - 0{\cdot}26432)^2 + (y - 0{\cdot}7706)^2 = 0{\cdot}7706^2$.

49) Da die Koordinaten des Mittelpunktes bekannt sind, so ist nur noch die Länge des Radius zu bestimmen und diese ist gleich dem von $p = -1$, $q = 2$ auf die Gerade gefällten Perpendikel.

$$r = \frac{4q + 3p - 30}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{4q + 3p - 30}{5} = 5, \text{ somit}$$

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25.$$

50) Von $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ sind p, q, r zu bestimmen, dazu hat man

$(2 - p)^2 + (9 - q)^2 = r^2$

$(1 - p)^2 + (2 - q)^2 = r^2$ und

Digitized by Google

$-\frac{q-\frac{3p}{4}-\frac{30}{4}}{\sqrt{\frac{25}{16}}}=r$. Die beiden ersten Gleichungen geben $p=40-7q$; dieser Wert, in die dritte Gleichung gesetzt, gibt $q=\frac{30-r}{5}$, $p=\frac{7r-10}{5}$ und hiemit aus einer der ersten Gleichungen

$$r=5, \text{ daher } (x-5)^2+(y-5)^2=25.$$

51) Die Basis sei Abszissenachse und die im Mittelpunkte der Basis errichtete Senkrechte die Ordinatenachse, so sind, wenn die Koordinaten des Scheitels des Winkels mit x und y bezeichnet werden, die Gleichungen der beiden Schenkel

$$Y=\frac{y}{x+a}(X+a),\ Y=\frac{y}{x-a}(X-a), \text{ daher}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{y}{x+a},\ \operatorname{tg}\alpha_2=\frac{y}{x-a},\ \operatorname{tg}\delta=\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2};$$

somit $x^2+(y-a\operatorname{cotg}\delta)^2=\left(\frac{a}{\sin\delta}\right)^2$, also ein Kreis.

Speziell: $x^2+(y-3\sqrt{3})^2=6^2$.

52) Die Verbindungslinie AB sei die X-Achse, die im Mittelpunkte darauf errichtete Senkrechte die Y-Achse, so ist

$(x+a)^2+y^2+(a-x)^2+y^2=b^2$ oder $x^2+y^2=\frac{b^2-2a^2}{2}$, somit die Gleichung eines Kreises, worin a den Abstand des Punktes A oder B vom Anfangspunkt und b^2 das gegebene Quadrat bedeutet.

Für $b<a\sqrt{2}$ genügt kein Punkt, für $b=a\sqrt{2}$ geht der Kreis in einen Punkt — Koordinatenanfangspunkt — über, für $b=2a$ ist $r=a$.

53) Liege AB in der X-Achse und sei die im Punkte C darauf errichtete Senkrechte die Ordinatenachse, so sind die Gleichungen der drei Strahlen:

$$y=\frac{\eta}{\xi+m}x+\frac{m\eta}{\xi+m},\ y=\frac{\eta}{\xi}x,\ y=\frac{\eta}{\xi-n}x-\frac{n\eta}{\xi-n};$$

aus der Gleichsetzung der Winkel ergibt sich

$$\frac{\frac{\eta}{\xi}-\frac{\eta}{\xi+m}}{1+\frac{\eta^2}{\xi(\xi+m)}}=\frac{\frac{\eta}{\xi-n}-\frac{\eta}{\xi}}{1+\frac{\eta^2}{\xi(\xi-n)}}$$

und daraus als Gleichung des Kreises:

$$\eta^2+\xi^2-2\frac{mn}{m-n}\xi=0.\quad (\xi-6)^2+\eta^2=6^2.$$

Digitized by Google

54) Liege $AB = 2a$ in der Abszissenachse und sei die im Mittelpunkte von AB errichtete Senkrechte die Ordinatenachse, so ergibt sich als Gleichung des geometrischen Ortes:

$$(a^2 + x^2 + 2ax + y^2) : (a^2 + x^2 - 2ax + y^2) = m^2 : n^2$$

und daraus

$$2(a^2 + x^2 + y^2) : 4ax = (m^2 + n^2) : (m^2 - n^2),$$

$$y^2 + x^2 - 2ax\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2} + a^2\left(\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\right)^2 = a^2\left(\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\right)^2 - a^2 \text{ oder}$$

$$y^2 + \left[x - \frac{a(m^2+n^2)}{m^2-n^2}\right]^2 = \left(\frac{2amn}{m^2-n^2}\right)^2.$$

Speziell: $y^2 + (x - {}^{41}/_3)^2 = ({}^{40}/_3)^2$.

55) Die Gleichung des gesuchten Kreises sei

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2.$$

Damit dieser Kreis die Achsen berühre, muß

$\alpha = \beta = r$ sein, also $(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$.

Der Zentralabstand beider Kreise ist $r - 2$, wenn der gegebene Kreis innerhalb des gesuchten, $r + 2$ aber, wenn der gegebene Kreis außerhalb des gesuchten Kreises liegt, daher ist

$$(r - 2)^2 = (r - 4)^2 + (r - 3)^2 \text{ und}$$

$$(r + 2)^2 = (r - 4)^2 + (r - 3)^2;$$

daraus folgt $r_1 = 7$, $r_2 = 3$,

$r_{3,4} = 9 \pm \sqrt{60}$, $r_3 = 16{\cdot}7459667$, $r_4 = 1{\cdot}2540333$.

56) Die Gleichung des gesuchten Kreises sei $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$.

Weil die Y-Achse tangiert wird, ist $\alpha = r$, und weil der Kreis $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ von außen berührt wird, ist der Zentralabstand beider Kreise $r + 1$, daher $(r + 1)^2 = (\alpha - 2)^2 + \beta^2$ oder $(\alpha + 1)^2 = (\alpha - 2)^2 + \beta^2$ und $(4 - \alpha)^2 + (3 - \beta)^2 = \alpha^2$. Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 3$, $r_1 = 2$; $\alpha_2 = 74$, $\beta_2 = -21$, $r_2 = 74$,

daher sind die beiden Kreise:

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$, $(x - 74)^2 + (y + 21)^2 = 74^2$

und ihre Flächen

$12{\cdot}5663706$, $17203{\cdot}36135$ Flächeneinheiten.

57) $x^2 + y^2 = 9$ (1), $(x - 6)^2 + y^2 = 1$ (2), $(x - 10)^2 + y^2 = 4$ (3).

(1) und (2) sollen den gesuchten Kreis von innen berühren, also innerhalb des gesuchten Kreises liegen, (3) soll den gesuchten Kreis von außen berühren. Sind α, β die Koordinaten des Mittelpunktes des gesuchten Kreises, so ist der Zentralabstand des gesuchten Kreises und der gegebenen Kreise $(r - 3)$, $(r - 1)$,

Digitized by Google

$(r+2)$ und da diese mit den Unterschieden der Mittelpunktskoordinaten rechtwinklige Dreiecke bilden, so muß

$$(r-3)^2 = \alpha^2 + \beta^2,\ (r-1)^2 = (\alpha-6)^2 + \beta^2,$$
$$(r+2)^2 = (\alpha-10)^2 + \beta^2 \text{ sein.}$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\alpha = {}^1/_2,\ r = 9{}^1/_2,\ \beta = \pm\sqrt{42} = \pm 6{\cdot}4807407,$$

somit ist die Kreisgleichung:

$$(x - {}^1/_2)^2 + (y \mp \sqrt{42})^2 = (9{}^1/_2)^2.$$

58) Wegen der äußeren Berührung der Kreise muß

$$\alpha^2 + \beta^2 = (r+3)^2 \ldots\ldots\ldots 1$$
$$(\alpha-6)^2 + \beta^2 = (r+1)^2 \ldots 2$$

und wegen des Punktes muß

$$(13-\alpha)^2 + (8-\beta)^2 = r^2 \ldots 3$$

sein. Aus den Gleichungen 1 und 2 folgt

$$\alpha = \frac{r+11}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4$$

und aus 1 und 3 folgt $121 - 13\alpha - 8\beta = -3r$. Setzt man in diese Gleichung den Wert von α ein, so erhält man

$$\beta = \frac{55-r}{6} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5$$

und mit diesen Werten von α und β folgt aus 1

$$31r^2 + 238r = 3185,\ r_1 = 7,\ r_2 = -\frac{455}{31}$$

und die beiden Kreise sind

$$(x-6)^2 + (y-8)^2 = 49$$
$$\left(x + \frac{38}{11}\right)^2 + \left(y - \frac{360}{31}\right)^2 = \left(-\frac{455}{31}\right)^2.$$

59) Die drei gegebenen Kreise sind

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25,\ (x-18)^2 + (y-3)^2 = 25,$$
$$(x-11)^2 + (y-20)^2 = 25.$$

Daher müssen für die Berührung von außen die Gleichungen

$$(\alpha-4)^2 + (\beta-3)^2 = (r+5)^2,\ (\alpha-18)^2 + (\beta-3)^2 = (r+5)^2,$$
$$(\alpha-11)^2 + (\beta-20)^2 = (r+5)^2$$

bestehen. Aus den beiden ersten Gleichungen folgt $\alpha = 11$, damit gibt die zweite und dritte Gleichung zusammen $\beta = {}^{171}/_{17}$, und somit $r = -5 \pm {}^{169}/_{17},\ r_1 = {}^{84}/_{17},\ r_2 = {}^{254}/_{17}$,

$$(x-11)^2 + (y - {}^{171}/_{17})^2 = (-5 \pm {}^{169}/_{17})^2.$$

60) Die Gleichung des zweiten Kreises ist $(x - 10{\cdot}5)^2 + y^2 = 25$, daher ist der Zentralabstand der beiden Kreise $d = 10{\cdot}5$. Setzt man $x^2 + y^2 = 72{\cdot}25$ in die zweite Gleichung ein, so erhält

Digitized by Google

man $x = 7{\cdot}5$, daher ist $y = \pm 4$ und die gemeinschaftliche Sehne $s = 8$. Der Inhalt des Viereckes ist

$f = \frac{ds}{2} = 42$ Flächeneinheiten, die Seiten sind $8{\cdot}5$, $8{\cdot}5$, 5, 5.

$O = 2\pi \frac{s}{2} \cdot \frac{8{\cdot}5 + 5}{2} = 54\pi = 169{\cdot}646$ Flächeneinheiten.

$V = \frac{s^2}{4} \cdot \frac{\pi}{3} d = 56\pi = 175{\cdot}92019$ Kubikeinheiten.

§ 31. Die Ellipse.

1) *a*) $9(x-2)^2 + 16(y-3)^2 = 144$, diese Gleichung stellt eine Ellipse vor, die ihren Mittelpunkt im ersten Quadranten hat ($p = +2$, $q = +3$) und deren Halbachsen $a = 4$, $b = 3$ sind.

b) $(x+3)^2 + 9y^2 = 9$ oder $\left(\frac{x+3}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{1}\right)^2 = 1$, somit die Gleichung einer Ellipse, deren Mittelpunkt auf der negativen X-Achse im Abstande $p = 3$ sich befindet; da ein Scheitel durch den Koordinatenanfangspunkt geht, so heißt die Gleichung auch Scheitelgleichung.

2*a*) $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$; $\varepsilon = \frac{e}{a} = {}^4/_5$, $2p = \frac{2b^2}{a} = {}^{18}/_5$; verschiebt man den Mittelpunkt der Ellipse auf der X-Achse um $a = 5$, setzt also $x \pm 5$ statt x, so erhält man

$$y^2 = \mp \frac{18x}{5} - \frac{9x^2}{25} \text{ als Scheitelgleichung.}$$

2*b*) Da die Ellipse die große Achse 10 hat, so ist $r_1 + r = 10$ und $r_1 - r = 4$, somit $r_1 = 7$, $r = 3$. Sind ξ, η die Koordinaten des entsprechenden Punktes, so ist

$$r_1^2 = (\xi + e)^2 + \eta^2, \qquad r^2 = (\xi - e)^2 + \eta^2$$

und da $e = 4$ ist, so

$$49 = (\xi + 4)^2 + \eta^2, \qquad 9 = (\xi - 4)^2 + \eta^2.$$

Aus diesen Gleichungen folgt $\xi = \frac{5}{2}$, $\eta = \frac{3}{2}\sqrt{3}$,

somit sind die Gleichungen der Leitstrahlen für diesen Punkt:

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{13}(x + 4), \qquad y = -\sqrt{3}(x - 4)$$

und $\operatorname{tg} v = \dfrac{\frac{3\sqrt{3}}{13} + \sqrt{3}}{1 - \frac{9}{13}} = 4\sqrt{3}$; $v = 81^\circ 47' 13''$.

Digitized by Google

3) Über FF_1 ist sonach ein rechter Winkel zu errichten mit dem Scheitel in der Peripherie der Ellipse, also auch in der Peripherie des Kreises mit $r = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$, daher sind

$$x^2 + y^2 = 5, \qquad 4x^2 + 9y^2 = 36$$

aufzulösen. $\quad x = \pm \frac{3}{5}\sqrt{5}, \quad y = \pm \frac{4}{5}\sqrt{5}.$

Oder ξ, η sei der gesuchte Punkt, so sind die Leitstrahlen

$$y - \eta = \frac{\eta}{\xi + e}(x - \xi), \quad y - \eta = \frac{\eta}{\xi - e}(x - \xi)$$

und da sie aufeinander normal sein sollen

$\frac{\eta}{\xi + e} = -\frac{\xi - e}{\eta}$, daher $\eta^2 + \xi^2 = e^2$, somit sind

$\xi^2 + \eta^2 = 5$ und $4\xi^2 + 9\eta^2 = 36$ aufzulösen.

Ellipse und Gerade.

4) Da $\operatorname{tg} 45^0 = 1$ ist, so ist die Gleichung der durch $x_1 = \mp 8$, $y_1 = 0$ gelegten Sehne: $y = x \pm 8$. Die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes sind

$x_2 = \mp {}^{24}/_5$, $y_2 = \pm {}^{16}/_5$, somit $D = \sqrt{(-8 + {}^{24}/_5)^2 + ({}^{16}/_5)^2} = {}^{16}/_5\sqrt{2} = 4{\cdot}5254835.$

5) $9x^2 + 4(y-3)^2 = 36$, somit hat die Ellipse ihren Mittelpunkt in der Ordinatenachse in der Entfernung 3 vom Anfangspunkte der Koordinaten.

$$y = \frac{33 \pm \sqrt{279}}{20}, \quad y_1 = 2{\cdot}485165, \quad y_2 = 0{\cdot}814835$$

$$x_1 = -1{\cdot}970329, \quad x_2 = 1{\cdot}370329.$$

6) $9(y-1)^2 + 4(x-3)^2 = 36.$

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 1; \quad x_2 = 3, \quad y_2 = 3.$$

7) $25(x-3)^2 + 9(y-2)^2 = 225$ oder $\left(\frac{x-3}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{5}\right)^2 = 1.$

Da der Mittelpunkt der Ellipse die Koordinaten $x = 3$, $y = 2$ hat und $e = \pm 4$ ist, so haben die Brennpunkte die Koordinaten $x_1 = 3$, $y_1 = 6$; $x_2 = 3$, $y_2 = -2$, daher sind die durch diese Punkte und $x = o$, $y = o$ gelegten Geraden $y = 2x$, $y = -{}^2/_3 x$.

$$\operatorname{tg} v = \frac{2 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{4}{3}} = -8, \quad v = 97^0\,7'\,30{\cdot}6'' \ (97^0\,7'\,30'').$$

Digitized by Google

Ellipse und Tangente.

8) Die Gerade ist eine Tangente der Ellipse im Punkte
$$x = 3,\ y = {}^{16}/_{5}.$$

9) Sind $y = Ax + B$ und $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ die Gleichungen einer Geraden und einer Ellipse, so kann man beide Gleichungen als koexistierend auffassen und nach x und y auflösen, welche Werte dann beiden Linien zugleich angehören.

Aus $b^2x^2 + a^2(A^2x^2 + 2ABx + B^2) = a^2b^2$ erhält man
$$x = \frac{-ABa^2 \pm ab\sqrt{A^2a^2 + b^2 - B^2}}{A^2a^2 + b^2}.$$

Ist die Gerade eine Tangente, so muß der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen Null also $A^2a^2 + b^2 = B^2$ sein. Die Koordinaten des Berührungspunktes sind dann
$$\xi = -\frac{ABa^2}{A^2a^2 + b^2} = -\frac{ABa^2}{B^2} = -\frac{Aa^2}{B}$$
$$\text{und } \eta = A\xi + B = \frac{-A^2a^2}{B} + B = \frac{b^2}{B}.$$

Aus den beiden Gleichungen $\xi = -\frac{Aa^2}{B}$ und $\eta = \frac{b^2}{B}$ ergibt sich $B = \frac{b^2}{\eta}$ und $A = -\frac{b^2\xi}{a^2\eta}$, daher geht die Gleichung $y = Ax + B$ als Tangentengleichung über in $y = -\frac{b^2\xi}{a^2\eta}x + \frac{b^2}{\eta}$ oder in $a^2\eta y + b^2\xi x = a^2b^2$.

Oder sind x_1y_1, x_2y_2 zwei Punkte der Ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, so ist die durch sie gelegte Sekante $y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$ und wegen $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$, $b^2x_2^2 + a^2y_2^2 = a^2b^2$ ist $b^2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + a^2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0$,
also $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)}$ und $y - y_1 = -\frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)}(x - x_1)$.

Für $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ geht die Sekantengleichung in die Tangentengleichung über
$$y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1) \text{ oder}$$
$$a^2yy_1 + b^2xx_1 = a^2y_1^2 + b^2x_1^2 = a^2b^2.$$
Dem $x_1 = 2$ entspricht $y_1 = {}^2/_3\sqrt{5}$. Die Tangente in diesem Punkte ist
$$4xx_1 + 9yy_1 = 36 \text{ oder } 8x + 6y\sqrt{5} = 36,$$
$$y = -\frac{4\sqrt{5}}{15}x + \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

Digitized by Google

Die Brennpunkte haben die Koordinaten $x_2 = \sqrt{5}$, $y_2 = 0$; $x_3 = -\sqrt{5}$, $y_3 = 0$, daher sind die Gleichungen der beiden Normalen $y = \frac{3\sqrt{5}}{4} x \pm {}^{15}/_{4}$.

Ihren Abstand, d. i. das zwischen den beiden Normalen liegende Stück der Tangente, findet man am einfachsten, wenn man von dem einen Brennpunkte auf die durch den andern Brennpunkt gehende Normale ein Perpendikel fällt:

$$P = \frac{30\sqrt{61}}{61} = 3{\cdot}841106.$$

10) Die Ellipse sei $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$,
dann ist $36b^2 + 16a^2 = a^2b^2$ und
wegen $a^2A^2 + b^2 = B^2$; $\frac{9}{64} a^2 + b^2 = \frac{2500}{64}$.
Aus beiden Gleichungen folgt $a^2 = 100$, $b^2 = 25$, somit
$25x^2 + 100y^2 = 2500$ die gesuchte Ellipsengleichung.

11) Nach der Berührungsbedingung $a^2A^2 + b^2 = B^2$ erhält man aus
$y = \frac{4}{5} x + 5$ und $y = -\frac{9x}{20} + \frac{15}{4}$
$\frac{16a^2}{25} + b^2 = 25$
$\frac{81}{400} a^2 + b^2 = \frac{225}{16}$ und daraus $a^2 = 25$, $b^2 = 9$.
Somit ist $9x^2 + 25y^2 = 225$ die Gleichung der Ellipse.

Identifiziert man die Tangentengleichung
$25y\eta + 9x\xi = 225$ oder $y = -\frac{9\xi}{25\eta} x + \frac{9}{\eta}$
mit den gegebenen Tangentengleichungen, so erhält man
1) $\frac{9\xi}{25\eta} = -\frac{4}{5}$, $\frac{9}{\eta} = 5$ und daraus $\eta = \frac{9}{5}$, $\xi = -4$;
2) $\frac{9\xi}{25\eta} = \frac{9}{20}$, $\frac{9}{\eta} = \frac{15}{4}$ und daraus $\eta = \frac{12}{5}$, $\xi = 3$.

12) Mit Hilfe der Berührungsbedingung $a^2A^2 + b^2 = B^2$
ergibt sich wegen $y = -\frac{3x}{5} + 10$ und wegen $a = 10$,
der Wert für $b^2 = 64$, somit

$$100y^2 + 64x^2 = 6400.$$

Diese Gleichung und $y = -\frac{3x}{5} + 10$ ergeben dann

$$x_1 = 6,\ y_1 = {}^{32}/_{5}.$$

Oder man identifiziert die Ellipsentangente
$y = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1} x + \frac{b^2}{y_1}$ mit $y = -\frac{3x}{5} + 10$,

Digitized by Google

somit $\frac{b^2 x_1}{100 y_1} = \frac{3}{5}$, $\frac{b^2}{y_1} = 10$, daraus folgt

$\frac{x_1}{10} = \frac{3}{5}$, $x_1 = 6$, $y_1 = -\frac{3x_1}{5} + 10 = \frac{32}{5}$

und $b^2 = 10 . y_1 = 64$.

13) Sind ξ, η die noch unbekannten Koordinaten des Berührungspunktes, so ist die Gleichung der Tangente $a^2 y\eta + b^2 x\xi = a^2 b^2$; da diese Tangente durch $x_1 y_1$ geht, so muß $a^2 y_1 \eta + b^2 x_1 \xi = a^2 b^2$ bestehen und weil ξ, η ein Punkt der Ellipse ist, muß auch $a^2\eta^2 + b^2\xi^2 = a^2 b^2$ sein. Aus diesen beiden Gleichungen kann man ξ und η bestimmen und dann in die Tangentengleichung einsetzen. Speziell erhält man $\xi = {}^3/_2 \sqrt{3}$ und $\eta = 1$, somit ist die Gleichung der Tangente $y = -\frac{2\sqrt{3}}{3} x + 4$. Die Normale geht durch ξ, η und steht auf der Tangente senkrecht, daher ist ihre Gleichung $y - \eta = \frac{a^2 \eta}{b^2 \xi}(x - \xi)$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2} x - {}^5/_4$.

Unter Länge der Tangente versteht man die Strecke der Tangente zwischen dem Berührungspunkte und der Abszissenachse. Setzt man in $a^2 y\eta + b^2 x\xi = a^2 b^2$, $y = 0$, so erhält man $x = \frac{a^2}{\xi}$, daher ist

$$T = \sqrt{\eta^2 + \left(\frac{a^2}{\xi} - \xi\right)^2} = \frac{\eta}{b^2 \xi} \sqrt{a^4 \eta^2 + b^4 \xi^2}.$$

Nun ist $a^2\eta^2 = a^2 b^2 - b^2\xi^2$, daher $a^4\eta^2 = a^4 b^2 - a^2 b^2 \xi^2$ und $a^4\eta^2 + b^4\xi^2 = a^4 b^2 - a^2 b^2 \xi^2 + b^4 \xi^2 = b^2 [a^4 - \xi^2 (a^2 - b^2)] = b^2 [a^4 - e^2 \xi^2]$, daher

$$T = \frac{b\eta}{b^2 \xi} \sqrt{a^4 - e^2 \xi^2} = \frac{\eta}{b\xi} \sqrt{a^4 - e^2 \xi^2}.$$

Unter Länge der Subtangente versteht man die Strecke $\frac{a^2}{\xi} - \xi$.

daher $$S_t = \frac{a^2}{\xi} - \xi = \frac{a^2 - \xi^2}{\xi}.$$

Unter Länge der Normalen versteht man die Strecke der Normalen zwischen dem Berührungspunkte und der Abszissenachse; für $y = 0$ gibt die Gleichung der Normalen $x = \frac{a^2\xi - b^2\xi}{a^2}$, daher ist $\xi - x = \frac{b^2 \xi}{a^2}$;

$$N = \sqrt{\eta^2 + \frac{b^4 \xi^2}{a^4}} = \frac{1}{a^2} \sqrt{a^4 \eta^2 + b^4 \xi^2} = \frac{b}{a^2} \sqrt{a^4 - e^2 \xi^2}.$$

Digitized by Google

Unter Länge der Subnormalen versteht man die Strecke

$$x - \xi = \frac{a^2\xi - b^2\xi}{a^2} - \xi = -\frac{b^2\xi}{a^2} = S_n.$$

Speziell: $T = {}^1/_2\sqrt{7} = 1{\cdot}3228756$, $S_t = {}^1/_2\sqrt{3} = 0{\cdot}8660254$,

$N = {}^1/_3\sqrt{21} = 1{\cdot}5275252$, $S_n = {}^2/_3\sqrt{3} = 1{\cdot}1547005$.

14) Der Punkt habe die Koordinaten ξ, η, so ist die Tangente $16x\xi + 64y\eta = 1024$, somit für $y = o$ ist $x = \frac{64}{\xi}$ und die Subtangente ist $\frac{64}{\xi} - \xi$.

Da die Tangente den Richtungs-Koeffizienten $\left(-\frac{\xi}{4\eta}\right)$ hat, so ist die Normale $y = \frac{4\eta}{\xi}x - 3\eta$ und für $y = o$ ist $x = \frac{3\xi}{4}$, somit die Subnormale $\xi - \frac{3\xi}{4} = \frac{\xi}{4} = 1$, $\xi = 4$; Subtangente 12.

15) Die Tangente im Punkte $\xi\eta$ ist $y = -\frac{4\xi}{25\eta}x + \frac{4}{\eta}$.

Daher die Normale $y - \eta = \frac{25\eta}{4\xi}(x - \xi)$.

Da diese Normale parallel sein muß mit $y = \frac{15}{8}x$,

so ist $\frac{25\eta}{4\xi} = \frac{15}{8}$ und $4\xi^2 + 25\eta^2 = 100$,

daher $\xi_1 = 4$, $\eta_1 = {}^6/_5$; $\xi_2 = -4$, $\eta_2 = -{}^6/_5$.

Beide Normalen liegen symmetrisch, die eine hat die Gleichung $y = \frac{15x}{8} - \frac{63}{10}$ und ihr Abstand vom Mittelpunkt der Ellipse ist $p = \frac{63.8}{17.10}$, somit der Abstand der beiden parallelen Normalen

$$2p = \frac{63.8}{17.5} = 5\frac{79}{85}.$$

16) Die durch den Punkt $x_1 y_1$ gehende Gerade hat $y - 6 = A(x - 1)$ zur Gleichung, somit folgt aus $a^2A^2 + b^2 = B^2$

$16A^2 + 9 = (6 - A)^2$, daraus $A_1 = -{}^9/_5$, $A_2 = 1$,

somit $\operatorname{tg} v = \dfrac{1 + \frac{9}{5}}{1 - \frac{9}{5}} = -{}^7/_2$; die beiden

Tangenten sind $y - 6 = x - 1$; $y - 6 = -{}^9/_5(x - 1)$.

Digitized by Google

17) Da $e = \pm 4$ und $y = \pm {}^{9}/_{5}$ ist, so sind vier Tangenten möglich

$$y = -\frac{4x}{5} + 5,\quad y = \frac{4x}{5} + 5,\quad y = \frac{4x}{5} - 5,\quad y = -\frac{4x}{5} - 5$$

und bei allen ist der Flächeninhalt $15^{5}/_{8}$ Flächeneinheiten.

18) Dem $x = e = \sqrt{a^2 - b^2}$ entspricht $y = \pm \frac{b^2}{a}$. Die durch $x_1 = e,\ y_1 = \frac{b^2}{a}$ gelegte Tangente ist $ay + ex = a^2$ oder $y = -\frac{ex}{a} + a$ und die von den Brennpunkten $(-e, o;\ +e, o)$ darauf gefällten Perpendikel sind

$$P_1 = \frac{a^2 + e^2}{\sqrt{a^2 + e^2}},\quad P_2 = \frac{a^2 - e^2}{\sqrt{a^2 + e^2}},\quad \text{daher } P_1 P_2 = b^2.$$

19) Da $e = 3$ ist, so sind $x_1 = 3,\ y_1 = 0;\ x_2 = 0,\ y_2 = -2$ die beiden Punkte, durch welche die Sehne geht, ihre Gleichung ist sonach $y = \frac{2x}{3} - 2$.

Die Gleichung der Tangente ist $16x\xi + 25y\eta = 400$ oder $y = -\frac{16\xi}{25\eta}x + \frac{16}{\eta}$. Da die Tangente parallel mit der Sehne sein soll, so muß $\frac{16\xi}{25\eta} = -{}^{2}/_{3}$ sein, daraus und aus $16\xi^2 + 25\eta^2 = 400$ folgt

$$\xi = \pm {}^{25}/_{61}\sqrt{61} = \pm 3 \cdot 200922,$$

$$\eta = \mp {}^{24}/_{61}\sqrt{61} = \mp 3 \cdot 072885.$$

Die Tangenten sind $y = {}^{2}/_{3}x - {}^{2}/_{3}\sqrt{61};\ y = {}^{2}/_{3}x + {}^{2}/_{3}\sqrt{61}$.

Die im Berührungspunkte auf der Tangente errichteten Normalen sind:

$$y = -\frac{3x}{2} + {}^{27}/_{122}\sqrt{61},\quad y = -\frac{3x}{2} - {}^{27}/_{122}\sqrt{61}.$$

20 *a*) Aus $4x\xi + 9y\eta = 36$ folgt für $x = 0$ $Y = \frac{36}{9\eta}$ und für $y = 0$ $X = \frac{36}{4\xi}$. Daher $4\xi = 9\eta$ und $4\xi^2 + 9\eta^2 = 36$.

$\xi = {}^{9}/_{13}\sqrt{13},\ \eta = {}^{4}/_{13}\sqrt{13}$, somit ist die Tangentengleichung $y = -x + \sqrt{13}$. Oder: da die Tangente von den Achsen gleiche Stücke abschneidet, muß ihr Neigungswinkel 135^0 oder $\frac{4\xi}{9\eta} = 1$ sein.

Digitized by Google

20*b*) Die Tangente ist $16x\xi + 25y\eta = 400$

für $x = 0$ folgt daraus $y = \frac{16}{\eta}$ und für $y = 0$ folgt $x = \frac{25}{\xi}$ als Abschnitte auf den Koordinatenachsen.

$\frac{16}{\eta} \cdot \frac{25}{\xi} = 2.20\frac{5}{6} = \frac{125}{3}$, daher $\xi\eta = \frac{48}{5}$.

Aus dieser Gleichung und aus $16\xi^2 + 25\eta^2 = 400$ sind nun ξ und η zu bestimmen und dann sind deren Werte in die Tangentengleichung einzusetzen.

$16x + 15y = 100$, $3x + 5y = 25$.

21) $e = -3$ und $\operatorname{tg} 30^0 = {}^1/_3 \sqrt{3}$, daher ist die Gleichung der Sehne $y = \frac{x}{3}\sqrt{3} + \sqrt{3}$. Die Gleichung der Tangente ist

$$25y\eta + 16x\xi = 400 \text{ oder } y = -\frac{16\xi}{25\eta} + \frac{16}{\eta};$$

$\frac{16\xi}{25\eta} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $25\eta^2 + 16\xi^2 = 400$

sind nun nach η aufzulösen, man erhält

$$\eta = \pm 16\sqrt{\frac{3}{73}} = \pm 3{\cdot}24354,$$

somit sind die Tangenten

$$y = \frac{x}{3}\sqrt{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{219} = \frac{x}{3}\sqrt{3} \pm 4{\cdot}9329$$

oder $y = Ax + B$ sei die Tangente, dann ist $A = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ und wegen $a^2A^2 + b^2 = B^2$ ist $\frac{25}{3} + 16 = B^2$, $B = \pm\frac{1}{3}\sqrt{219}$ also $y = \frac{x}{3}\sqrt{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{219}$.

22) Sind ξ, η die Koordinaten des Berührungspunktes, so ist $y_1 = o$, $x_1 = -e$, $y_2 = \eta$, $x_2 = \xi$ und $y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$ geht über in $y = \frac{\eta}{e + \xi}(x + e)$, somit ist $\frac{\eta}{e+\xi}$ die Richtungskonstante des Vektors. Die Richtungskonstante der Tangente ist $-\frac{b^2\xi}{a^2\eta}$, somit

$$\operatorname{tg} v = \frac{\frac{\eta}{e+\xi} + \frac{b^2\xi}{a^2\eta}}{1 - \frac{b^2\xi\eta}{(e+\xi)a^2\eta}} = \frac{b^2(a^2 + \xi e)}{e\eta(a^2 + \xi e)} = \frac{b^2}{e\eta}$$

und wegen $v = 45^0$ $\eta = \frac{b^2}{e} = \frac{9}{4}$; für den anderen Vektor ist $\eta = -\frac{9}{4}$.

Digitized by Google

Somit sind die Koordinaten des Berührungspunktes

$$\eta_{1,2} = \frac{9}{4},\ \xi_{1,2} = \pm\frac{5}{4}\sqrt{7};$$

$$\eta_{3,4} = -\frac{9}{4},\ \xi_{3,4} = \pm\frac{5}{4}\sqrt{7}.$$

Die Gleichungen der Tangenten sind:

$$y = \pm\frac{x}{5}\sqrt{7} + 4;\ y = \mp\frac{x}{5}\sqrt{7} - 4$$

und die Länge der Tangente $T = \frac{9}{7}\sqrt{14}$.

23) Bezüglich des Punktes ξ, η ist die Tangente $y = -\frac{b^2\xi}{a^2\eta}x + \frac{b^2}{\eta}$ und der eine Vektor $y = \frac{\eta}{\xi+e}x + \frac{e\eta}{\xi+e}$. Ist v der Winkel, den beide miteinander einschließen, so ist

$$\operatorname{tg} v = \frac{\frac{\eta}{\xi+e} + \frac{b^2\xi}{a^2\eta}}{1 - \frac{b^2\xi\eta}{a^2\eta(\xi+e)}} = \frac{b^2}{\eta e}.$$

Für $v = 60^0$ ist $\operatorname{tg} v = \sqrt{3}$ und da $e = \sqrt{5}$, so

$$\eta = \frac{b^2}{\sqrt{15}} = \frac{4\sqrt{15}}{15} = \pm 1{\cdot}032796.$$

Aus $9\eta^2 + 4\xi^2 = 36$ folgt dann $\xi = \pm\sqrt{\frac{33}{5}} = \pm 2{\cdot}569047$. Somit gibt es vier Berührungspunkte, also auch vier Tangenten.

$T = \frac{\eta}{b\xi}\sqrt{a^4 - e^2\xi^2}$ (siehe Nr. 13) $= \frac{8\sqrt{33}}{33} = 1{\cdot}392621.$

24) Die Tangente ist $y = -\frac{16\xi}{25\eta}x + \frac{16}{\eta}$ und $y = -\frac{3x}{5} + 5$, somit muß $\frac{16\xi}{25\eta} = {}^3/_5$ und $\frac{16}{\eta} = 5$ sein. Die Koordinaten des Berührungspunktes sind darnach $\xi = 3$, $\eta = 3^1/_5$.

Die Gleichungen der Leitstrahlen zu dem Berührungspunkte sind $x = 3$ und $y = \frac{8x}{15} + {}^8/_5$. Da $\operatorname{tg}\alpha = {}^8/_{15}$, also $\alpha = 28^0\,4'\,21''$ ($28^0\,4'\,22''$) ist, so ist $v = 90 - \alpha = 61^0\,55'\,39''$ ($61^0\,55'\,38''$).

25) Die Tangente ist $y = -\frac{9\xi}{25\eta}x + \frac{9}{\eta}$ und $y = -x + b$; daher muß $\frac{9\xi}{25\eta} = 1$ und $\frac{9}{\eta} = b$ sein. Aus $9\xi = 25\eta$ und $9\xi^2 + 25\eta^2 = 225$ folgt

$\eta = \pm\frac{9\sqrt{34}}{34}$, daher $b = \pm\sqrt{34} = 5{\cdot}8309519$. Oder $y = ax + b$ ist eine Tangente an $\alpha^2 y^2 + \beta^2 x^2 = \alpha^2\beta^2$, wenn $a^2\alpha^2 + \beta^2 = b^2$ also $25 + 9 = b^2$ ist, somit $b = \pm\sqrt{34}$.

Digitized by Google

26) Die Gleichung der Ellipse ist $(x+2)^2 + 2y^2 = 48$ oder $\left(\frac{x+2}{\sqrt{48}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{24}}\right)^2 = 1$. Setzt man $x+2=X$, so ist $X^2 + 2y^2 = 48$ und die Tangente

$$X.\xi + 2y\eta = 48,\ y = -\frac{\xi}{2\eta}X + \frac{24}{\eta}.$$

Wegen $y = -\frac{1}{2}x = -\frac{X}{2} + 1$ muß $\frac{\xi}{2\eta} = \frac{1}{2}$, also $\xi = \eta$ sein, daher $\xi^2 + 2\eta^2 = 3\xi^2 = 48$, $\xi = \pm 4$. Die Tangenten sind daher $y = -\frac{X}{2} \pm 6$, oder wegen $X = x+2$, $y = -\frac{x}{2} + 5$ und $y = -\frac{x}{2} - 7$.

Oder $a^2A^2 + b^2 = B^2$, $\frac{48}{4} + 24 = B^2$, $B = \pm 6$

$y = -\frac{X}{2} + B$; $y = -\frac{x}{2} - 1 \pm 6$,

$y = -\frac{x}{2} + 5$, $y = -\frac{x}{2} - 7$.

27*a*) Da die Basis des Dreieckes parallel zur X-Achse ist, so ist ein Schenkel gegen die X-Achse unter 60^0 geneigt, daher seine Gleichung $y = x\sqrt{3} + B$; weil diese Gerade Tangente sein soll, so $a^2A^2 + b^2 = B^2$, somit $y = x\sqrt{3} + \sqrt{3a^2 + b^2}$, $b + \sqrt{3a^2 + b^2}$ ist sonach die Höhe des gleichseitigen Dreieckes und die Fläche ist $f = \frac{\sqrt{3}}{3}(3a^2 + 2b^2 + 2b\sqrt{3a^2 + b^2})$.

27*b*) Da die Achsen der Ellipse in den Diagonalen des Quadrates liegen, so könnte die Aufgabe auch lauten: Wie heißen die Gleichungen der Tangenten, welche von den Achsen gleiche Stücke abschneiden?

$a^2y\eta + b^2x\xi = a^2b^2$, für $y=0$ folgt daraus $X = \frac{a^2}{\xi}$ und für $x=0$ folgt $Y = \frac{b^2}{\eta}$ und $\frac{a^2}{\xi} = \frac{b^2}{\eta}$.

Die Seite des Quadrates ist $\sqrt{\frac{a^4}{\xi^2} + \frac{b^4}{\eta^2}} = \sqrt{2 \cdot \frac{a^4}{\xi^2}}$,

daher ist die Fläche des Quadrates $f = 2 \cdot \frac{a^4}{\xi^2}$.

Aus $b^2\xi^2 + a^2\eta^2 = a^2b^2$ folgt für $\eta = \frac{b^2}{a^2}\xi$,

$\xi^2 + \frac{b^2\xi^2}{a^2} = a^2$ und $a^2 + b^2 = \frac{a^4}{\xi^2}$, daher

$$f = 2(a^2 + b^2).$$

Digitized by Google

28) Da die Tangente im Punkte $x_1\ y_1$ $y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x + \frac{b^2}{y_1}$ ist, so sind die Perpendikel aus den Brennpunkten

$$\pm \frac{y + \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} x - \frac{b^2}{y_1}}{\sqrt{1 + \frac{b^4 x_1^2}{a^4 y_1^2}}},$$ wo $y = 0,\ x = +e;\ x = 0,\ x = -e$

zu setzen ist. Wegen $a^2 b^2 > b^2 x_1 e$ ist das untere Vorzeichen zu nehmen, daher:

$$m_1 = \frac{a^2 b^2 - b^2 x_1 e}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}},\quad m_2 = \frac{a^2 b^2 + b^2 x_1 e}{\sqrt{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}},$$

$m_1 m_2 = \frac{a^4 b^4 - b^4 x_1^2 e^2}{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2}$ und wegen $e^2 = a^2 - b^2$ ist

$a^4 b^4 - b^4 x_1^2 e^2 = a^4 b^4 - a^2 b^4 x_1^2 + b^6 x_1^2 =$

$a^2 b^2 (a^2 b^2 - b^2 x_1^2) + b^6 x_1^2 = a^4 b^2 y_1^2 + b^6 x_1^2$, sonach

$m_1 m_2 = \frac{b^2 (a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2)}{a^4 y_1^2 + b^4 x_1^2} = b^2.$

Oder ist $A^2 a^2 + b^2 = B^2$, so ist (Aufgabe 9) $y = Ax + B$ eine Tangente an die Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ und die von den Brennpunkten $(0, -e)$, $(0, +e)$ auf die Tangente gezogenen Perpendikel sind

$$m_1 = \frac{Ae - B}{\sqrt{1 + A^2}},\quad m_2 = -\frac{Ae + B}{\sqrt{1 + A^2}},$$ somit

$m_1 m_2 = -\frac{(A^2 e^2 - B^2)}{1 + A^2}$ und wegen $B^2 = A^2 a^2 + b^2$

$m_1 m_2 = -\frac{(A^2 a^2 - A^2 b^2 - A^2 a^2 - b^2)}{1 + A^2} = \frac{b^2 (1 + A^2)}{1 + A^2} = b^2.$

29) Hat der Punkt M die Koordinaten ξ, η, so ist die Tangente $y = -\frac{b^2 \xi}{a^2 \eta} x + \frac{b^2}{\eta}$ und die durch den Brennpunkt (e, o) darauf errichtete Normale

$$y = \frac{a^2 \eta}{b^2 \xi} x - \frac{a^2 \eta}{b^2 \xi} e.$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes beider sind:

$$x_1 = \frac{a^2 (b^4 \xi + a^2 \eta^2 e)}{a^4 \eta^2 + b^4 \xi^2},\quad y_1 = \frac{a^2 b^2 \eta (a^2 - \xi e)}{a^4 \eta^2 + b^4 \xi^2}.$$

$$D = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \frac{a^2}{a^4 \eta^2 + b^4 \xi^2} \sqrt{(b^4 + \eta^2 e^2)(a^4 \eta^2 + b^4 \xi^2)} =$$

$$\frac{a^2}{a^4 \eta^2 + b^4 \xi^2} \sqrt{b^4 + \eta^2 e^2} = a \sqrt{\frac{a^2 b^4 + a^2 \eta^2 e^2}{a^4 \eta^2 + b^4 \xi^2}}.$$

Da $a^2 b^4 = a^2 b^2 \eta^2 + b^4 \xi^2$ und $a^2 \eta^2 e^2 = a^4 \eta^2 - a^2 b^2 \eta^2$ ist, so ist $a^2 b^4 + a^2 \eta^2 e^2 = a^4 \eta^2 + b^4 \xi^2$ und $D = a$.

Oder ist $y = Ax + B$ die Gleichung der Tangente, so ist die Gleichung der zu ihr normalen und etwa durch den Brennpunkt

Digitized by Google

$(0, +e)$ gehenden Geraden $y = -\frac{1}{A}(x - e)$, somit sind die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden

$$X = \frac{e - AB}{1 + A^2}, \quad Y = \frac{Ae + B}{1 + A^2};$$ sonach ist

$$D = \sqrt{X^2 + Y^2} =$$

$$= \frac{1}{1 + A^2}\sqrt{e^2 - 2ABe + A^2B^2 + A^2e^2 + 2ABe + B^2}$$

da aber $B^2 = A^2a^2 + b^2$ ist, so

$$D = \frac{1}{1 + A^2}\sqrt{a^2 + A^4a^2 + A^2a^2 + A^2a^2} = a.$$

30) Dem e entspricht $y = \pm\frac{b^2}{a}$, daher ist eine Tangente im Punkte $e, \frac{b^2}{a}$ zu errichten, dieselbe ist $y = -\frac{e}{a}x + a$ (1); die Gleichung der Normale ist $y = \frac{a}{e}x - \frac{e^2}{a}$ (2). Da der andere Brennpunkt die Koordinaten $-e, o$ hat, so ist das Perpendikel von diesem Brennpunkt auf (1) $\sqrt{a^2 + e^2}$ und auf (2) $\frac{e}{a}\sqrt{a^2 + e^2}$, daher ist

$$F = \frac{e}{a}\sqrt{a^2 + e^2} \cdot \sqrt{a^2 + e^2} = \frac{e}{a}(a^2 + e^2) = \frac{2a^2 - b^2}{a}\sqrt{a^2 - b^2}.$$

31) Die Tangente ist $9y\eta + 4x\xi = 36$; sie soll durch den Punkt $x' = 6$, $y' = 0$ gehen, daher muß $\xi = {}^{36}/_{24} = {}^{3}/_{2}$ sein und dafür ergibt sich aus $9\eta^2 + 4\xi^2 = 36$, daß $\eta = \pm\sqrt{3}$ ist.

Die Tangente kann auch durch $x' = -6$ und $y' = 0$ gehen und dann erhält man $\xi = -{}^{3}/_{2}$, $\eta = \pm\sqrt{3}$, daher gibt es vier Tangenten und vier Normalen.

Die vier Tangenten sind:

$$y = \pm\frac{2\sqrt{3}}{9}x + \frac{4\sqrt{2}}{3}; \quad y = \pm\frac{2\sqrt{3}}{9}x - \frac{4\sqrt{3}}{3};$$

die vier Normalen sind:

$$y = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}x - \frac{5\sqrt{3}}{4}; \quad y = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2}x + {}^{5}/_{4}\sqrt{3}.$$

Die Länge der Tangente ist bestimmt durch die beiden Punkte $\xi = {}^{3}/_{2}$, $\eta = \sqrt{3}$ und $x' = 6$, $y' = 0$, daher

$$T = {}^{1}/_{2}\sqrt{93} = 4{\cdot}8218254.$$

Die Länge der Normale ist bestimmt durch die beiden Punkte $\xi = {}^{3}/_{2}$, $\eta = \sqrt{3}$ und $x'' = {}^{5}/_{6}$, $y'' = 0$, daher

$N = {}^{1}/_{3}\sqrt{31} = 1{\cdot}8559215$ und $f = {}^{1}/_{2}\,T.N = {}^{31}/_{12}\sqrt{3}$.

Oder das Dreieck hat die Eckpunkte $\xi = {}^{3}/_{2}$, $\eta = \sqrt{3}$; $x' = 6$, $y' = 0$; $x'' = {}^{5}/_{6}$, $y'' = 0$, daher ist

$$f = {}^{31}/_{12}\sqrt{3} = 4{\cdot}4744646.$$

Digitized by Google

32) Die Tangente ist $9x\xi + 25y\eta = 225$; da sie durch den Punkt $x = -1$, $y = 4^1/_5$ geht, so muß $-9\xi + 105\eta = 225$ und $9\xi^2 + 25\eta^2 = 225$ gleichzeitig bestehen, d. h. es muß die Berührung in den Punkten $\xi_1 = 3$, $\eta_1 = {}^{12}/_5$; $\xi_2 = -4$, $\eta_2 = {}^9/_5$ erfolgen.

Die Tangenten sind:

$$20y + 9x = 75,$$
$$5y - 4x = 25.$$

Die Sehne ist $y - \eta_1 = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\xi_1 - \xi_2}(x - \xi_1)$, $y = {}^3/_{35}\,x + {}^{15}/_7$.

33) Sind ξ, η die Koordinaten des Berührungspunktes, so ist $a^2\eta^2 + b^2\xi^2 = a^2b^2$ und die Gleichung der Tangente verwandelt sich in $a^2\eta y_1 + b^2\xi x_1 = a^2b^2$.

Aus diesen Gleichungen können nun ξ und η bestimmt werden. Man erhält:

$$\xi = \frac{a^2b^2x_1 \pm a^2y_1\sqrt{a^2y_1^2 + b^2x_1^2 - a^2b^2}}{a^2y_1^2 + b^2x_1^2},$$

$$\eta = \frac{a^2b^2y_1 \mp b^2x_1\sqrt{a^2y_1^2 + b^2x_1^2 - a^2b^2}}{a^2y_1^2 + b^2x_1^2}.$$

Setzt man diese Werte in die Tangentengleichung

$$y = -\frac{b^2\xi}{a^2\eta}x + \frac{b^2}{\eta}$$

ein, so erhält man als Richtungskonstante

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{-(b^2x_1 + y_1\sqrt{a^2y_1^2 + b^2x_1^2 - a^2b^2})}{a^2y_1 - x_1\sqrt{a^2y_1^2 + b^2x_1^2 - a^2b^2}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{-(b^2x_1 - y_1\sqrt{a^2y_1^2 + b^2x_1^2 - a^2b^2})}{a^2y_1 + x_1\sqrt{a^2y_1^2 + b^2x_1^2 - a^2b^2}}$$

und wegen $\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 = -1$

$$b^4x_1^2 - a^2y_1^4 - b^2x_1^2y_1^2 + a^2b^2y_1^2 =$$
$$- a^4y_1^2 + a^2x_1^2y_1^2 + b^2x_1^4 - a^2b^2x_1^2,$$
$$(b^2 - y_1^2)\,a^2y_1^2 + b^2x_1^2) = (x_1^2 - a^2)\,(a^2y_1^2 + b^2x_1^2),$$

daher $b^2 - y_1^2 = x_1^2 - a^2$ und $x_1^2 + y_1^2 = a^2 + b^2$.

Oder die Gleichung der Geraden, welche durch den Punkt x_1y_1 geht, ist $y = Ax + (y_1 - Ax_1)$, soll diese eine Tangente sein, so muß $A^2a^2 + b^2 = B^2 = (y_1 - Ax_1)^2$ sein, daraus folgt

$$A = \frac{-x_1y_1 \pm \sqrt{x_1^2y_1^2 - (b^2 - y_1^2)\,(a^2 - x_1^2)}}{a^2 - x_1^2},$$

d. h. es sind zwei Tangenten möglich mit den Richtungskonstanten A_1 und A_2. Sollen diese Tangenten aufeinander normal sein, so muß $A_1A_2 = -1$ sein, daher

Digitized by Google

$$\frac{-[x_1 y_1 - \sqrt{x_1^2 y_1^2 - (b^2 - y_1^2)(a^2 - x_1^2)}]}{a^2 - x_1^2} \times$$
$$\frac{-[x_1 y_1 + \sqrt{x_1^2 y_1^2 - (b^2 - y_1^2)(a^2 - x_1^2)}]}{a^2 - x_1^2} = -1$$

und daraus $x_1^2 + y_1^2 = a^2 + b^2$.

Oder

$A^2 a^2 + b^2 = (y_1 - A x_1)^2$; $A^2(a^2 - x_1^2) + 2A x_1 y_1 + (b^2 - y_1^2) = 0$.

$A^2 + \frac{2A x_1 y_1}{a^2 - x_1^2} + \frac{b^2 - y_1^2}{a^2 - x_1^2} = o$; $A_1 A_2 = \frac{b^2 - y_1^2}{a^2 - x_1^2} = -1$, daher $x_1^2 + y_1^2 = a^2 + b^2$.

34) Seien ξ, η die Koordinaten eines Punktes des geometrischen Ortes, so ist $y - \eta = A(x - \xi)$ die durch diesen Punkt gehende Gerade; soll diese Tangente sein, so muß wegen $a^2 A^2 + b^2 = B^2$

$a^2 A^2 + b^2 = A^2 \xi^2 - 2A\xi\eta + \eta^2$ oder

$a^2 A^2 + b^2 - A^2 \xi^2 + 2A\xi\eta - \eta^2 = o$ sein, (I

die durch den Brennpunkt (e, o) und durch (ξ, η) gehende Gerade ist $y = \frac{\eta}{\xi - e}(x - e)$, da diese auf der Tangente normal sein soll, so $\frac{\eta}{e - \xi} = \frac{1}{A}$ oder $A\eta + \xi = e = \sqrt{a^2 - b^2}$, daraus

$a^2 - b^2 - \xi^2 - 2A\eta\xi - A^2\eta^2 = 0$. (II

Addiert man die Gleichung II zu der I, so

$a^2(A^2 + 1) - \xi^2(A^2 + 1) - \eta^2(A^2 + 1) = o$, $\xi^2 + \eta^2 = a^2$.

35) Seien ξ, η die Koordinaten des Mittelpunktes des gesuchten Kreises und ϱ dessen Radius, so ist

$\xi^2 + \eta^2 = (6 - \varrho)^2$ und $(\xi - 2)^2 + \eta^2 = (2 + \varrho)^2$.

Eliminiert man die Variable ϱ und subtrahiert zu dem Zwecke die eine Gleichung von der anderen, so erhält man $\varrho = \frac{9 - \xi}{4}$; dieser Wert ist in die beiden Gleichungen einzusetzen und so erhält man $\frac{(\xi - 1)^2}{16} + \frac{\eta^2}{15} = 1$ als Gleichung des geometrischen Ortes.

36) Ist $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ die Ellipse und $y = mx + n$ die Gerade, so erhält man aus

$$x^2 + \frac{2a^2 mn}{a^2 m^2 + b^2} x + \frac{a^2 n^2 - a^2 b^2}{a^2 m^2 + b^2} = 0$$

für den Mittelpunkt der Sehne die Abszisse

$\xi = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{a^2 mn}{a^2 m^2 + b^2}$ und daher $\eta = m\xi + n = \frac{b^2 n}{a^2 m^2 + b^2}$.

Für andere parallele Sehnen ändert sich diese Beziehung nicht, daher $\frac{\eta}{\xi} = -\frac{b^2}{a^2 m}$, sonach erhält man als Relation für

Digitized by Google

die Mittelpunkte aller parallelen Sehnen, deren Richtungskonstante m ist, $\eta = -\frac{b^2}{a^2 m}\xi$ oder $y = -\frac{b^2}{a^2 m}x$; die Gleichung des damit konjugierten Durchmessers ist $y = mx$. Die Durchschnittspunkte der Durchmesser mit der Ellipse sind

$$x = \pm\frac{a^2 m}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}},\quad y = \mp\frac{b^2}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}};$$

$$x = \pm\frac{a b}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}},\quad y = \pm\frac{a b m}{\sqrt{a^2 m^2 + b^2}},$$

daher sind die Längen der Durchmesser

$$D_1 = 2\sqrt{\frac{a^4 m^2 + b^4}{a^2 m^2 + b^2}},\quad D_2 = 2ab\sqrt{\frac{1+m^2}{a^2 m^2 + b^2}}$$

und aus $D_1 = D_2$ folgt $m = \pm\frac{b}{a}$ und $D = \sqrt{2(a^2 + b^2)}$.

$D = \sqrt{178} = 13{\cdot}3416641$. $\operatorname{tg}\varphi = {}^5/_8$, somit

$v = 2\varphi = 64^\circ\,0'\,38{\cdot}8'',\quad 115^\circ\,59'\,21{\cdot}2''$

$\quad\quad (64^\circ\,0'\,40''\quad\quad 115^\circ\,59'\,20'')$,

oder $\operatorname{tg} v = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$.

37) Die Koordinaten der Schnittpunkte sind $x = \pm\,{}^5/_4\sqrt{7}$, $y = \pm\,{}^9/_4$, somit gibt es vier Schnittpunkte. Die vier Tangenten der Ellipse sind:

$$y = -\frac{x}{5}\sqrt{7} \pm 4,\quad y = \frac{x}{5}\sqrt{7} \pm 4.$$

Die vier Tangenten des Kreises sind:

$$y = -\frac{5\sqrt{7}}{9}x \pm {}^{64}/_9,\quad y = \frac{5\sqrt{7}}{9}x \pm {}^{64}/_9.$$

$\operatorname{tg} v = {}^1/_5\sqrt{7}$, $v = 27^\circ\,53'\,8''$.

38) Die Berührung erfolgt in den Punkten $x = \pm 9$, $y = \pm 4$. Die vier Tangenten an die Ellipse sind: $y = \pm\frac{x}{4} \pm {}^{25}/_4$, an den Kreis: $y = \pm\,{}^9/_4 x \pm {}^{97}/_4$. Die Winkel der Ellipsentangente: $14^\circ\,2'\,10{\cdot}5''$, $165^\circ\,57'\,49{\cdot}5''$ ($14^\circ\,2'\,10''$, $165^\circ\,57'\,50''$), der Kreistangente: $66^\circ\,2'\,15{\cdot}04''$, $113^\circ\,57'\,44{\cdot}96''$ ($66^\circ\,2'\,15''$, $113^\circ\,57'\,45''$).

39) Die Tangente an den Kreis ist $xx_1 + yy_1 = 4$ oder

$$y = -\frac{x_1}{y_1}x + \frac{4}{y_1}.$$

Die Tangente an die Ellipse ist $x\xi + 9y\eta = 9$ oder $y = -\frac{\xi}{9\eta}x + \frac{1}{\eta}$. Da durch beide Gleichungen dieselbe Tangente dargestellt sein soll, so muß

Digitized by Google

$\frac{1}{\eta} = \frac{4}{y_1}$ und $\frac{\xi}{9\eta} = \frac{x_1}{y_1}$ sein, d. h. $y_1 = 4\eta$ und $x_1 = \frac{4\xi}{9}$, mit diesen Werten geht die Kreisgleichung $x_1^2 + y_1^2 = 4$ über in $\frac{16\xi^2}{81} + 16\eta^2 = 4$, welche mit $\xi^2 + 9\eta^2 = 9$ $\xi = \pm {}^9/_8 \sqrt{6}$, $\eta = \pm {}^1/_8 \sqrt{10}$ gibt, daher geht $y = -\frac{\xi}{9\eta} x + \frac{1}{\eta}$ über in $y = \pm \frac{x}{5}\sqrt{15} \pm {}^4/_5 \sqrt{10}$; somit genügen vier Tangenten.

Oder ist $y = Ax + B$ die Gleichung der Tangente, so muß ihr Abstand vom Mittelpunkte des Kreises r sein und es muß $A^2a^2 + b^2 = B^2$ betragen, d. h. es muß $\frac{B}{\sqrt{1+A^2}} = 2$ und $9A^2 + 1 = B^2$ sein, daraus folgt $A = \pm {}^1/_5 \sqrt{15}$ und $B = \pm {}^4/_5 \sqrt{10}$, somit

$$y = \pm \frac{x}{5}\sqrt{15} \pm {}^4/_5 \sqrt{10}.$$

40) $\frac{x^2}{\frac{400}{9}} + \frac{y^2}{9} = 1$, $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; die Tangente sei $y = Ax + B$.

Wegen $a^2A^2 + b^2 = B^2$ muß ${}^{400}/_9 A^2 + 9 = B^2$ und $25A^2 + 16 = B^2$ sein, daraus $A = \pm {}^3/_5$, $B = \pm 5$; die gemeinsamen Tangenten sind sonach $y = \pm {}^3/_5 x \pm 5$.

Die Koordinaten der Berührungspunkte sind ($x = \pm 5^1/_3$, $y = \pm 1^4/_5$) und ($x = \pm 3$, $y = \pm 3^1/_5$).

41) Die Tangenten an den Kreis sind:

$$y = \frac{5\sqrt{6}}{12} x + \frac{35\sqrt{6}}{12}, \quad y = -\frac{5\sqrt{6}}{12} x - \frac{35\sqrt{6}}{12};$$

die Tangenten an die Ellipse sind:

$$y = \frac{x}{4}\sqrt{6} + \frac{7\sqrt{6}}{4}, \quad y = -\frac{x}{4}\sqrt{6} - {}^7/_4 \sqrt{6}.$$

$$\operatorname{tg} v = \frac{\frac{5\sqrt{6}}{12} - \frac{\sqrt{6}}{4}}{1 + \frac{30}{48}} = \frac{4\sqrt{6}}{39}, \quad v = 14^\circ 6' 9{\cdot}15'' \ (14^\circ 6' 9'').$$

$$S = 2 \sin \frac{v}{2} = 0{\cdot}245515.$$

42) Bestimmt man aus beiden Gleichungen x, so erhält man $x_1 = {}^{15}/_4$, $x_2 = {}^{35}/_4$. Die zweite Wurzel ist unbrauchbar, da sie für y imaginäre Werte ergibt, somit sind $x = {}^{15}/_4$, $y = \pm {}^3/_4 \sqrt{7}$ die Koordinaten der Schnittpunkte.

Digitized by Google

Die Tangenten an die Ellipse sind: $y = \mp \frac{9\sqrt{7}}{35} x \pm \frac{12\sqrt{7}}{7}$,

an den Kreis: $y = \pm \frac{x}{21}\sqrt{7} \pm {}^4/_7\sqrt{7}$.

Die gemeinschaftliche Sehne oder der eine Durchmesser des Viereckes hat die Länge ${}^3/_2\sqrt{7}$, der andere Durchmesser hat die Länge ${}^{56}/_3$, daher ist $F = 14\sqrt{7} = 37{\cdot}0405182$ Flächeneinheiten.

43*a*) Sind $x\ y$ die Koordinaten eines Eckpunktes des Rechteckes, so ist $f = 2x \,.\, 2y$ und $y = \frac{f}{4x}$, daher

$b^2x^2 + \frac{a^2f^2}{16x^2} = a^2b^2$ und daraus $x =$

$\pm\sqrt{\frac{a^2}{2} \pm \sqrt{\frac{a^4}{4} - \frac{a^2f^2}{16b^2}}}$

x muß reell sein und ist es, wenn

$\frac{a^4}{4} \geq \frac{a^2f^2}{16b^2}$ und der größte Wert, den f^2 annehmen kann, ist $4a^2b^2$, also $f = 2ab$.

Für diesen Wert ist $x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ und aus $f = 4xy$ folgt dann $y = \frac{b}{2}\sqrt{2}$.

43*b*) Die Seiten des Rhombus müssen Tangenten der Ellipse sein.

$b^2x\xi + a^2y\eta = a^2b^2$.

Für $x = 0$ folgt $Y = \frac{b^2}{\eta}$ und für $y = 0$ folgt $X = \frac{a^2}{\xi}$.

X und Y sind die Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes, das ein Viertel der Fläche des Rhombus ist. Die Fläche des Dreieckes ist

$f = \frac{X \,.\, Y}{2} = \frac{a^2b^2}{2\xi\eta}$, daher $\xi\eta = \frac{a^2b^2}{2f}$ und $b^2\xi^2 + a^2\eta^2 = a^2b^2$

$b^2 \,.\, \frac{a^4b^4}{4\eta^2f^2} + a^2\eta^2 = a^2b^2$, $\eta^4 - b^2\eta^2 + \frac{a^2b^6}{4f^2} = 0$,

daraus $\eta^2 = \frac{b^2}{2} \pm \frac{b^2}{2f}\sqrt{f^2 - a^2b^2}$.

Der kleinste Wert, den f^2 annehmen kann, ist $f^2 = a^2b^2$, daher $f = ab$,

dafür wird $\eta^2 = \frac{b^2}{2}$, $\eta = \pm \frac{b}{2}\sqrt{2}$, $\xi = \pm \frac{a}{2}\sqrt{2}$ und die Fläche des Rhombus ist $4ab$.

Digitized by Google

44) $MC^2 : MA^2 = BD^2 : BM^2$,

$y^2 : b^2 = (a^2 - x^2) : a^2$

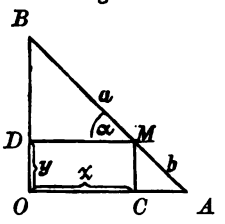
$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$,

somit eine Ellipse mit den Achsen

$2a$ und $2b$.

Oder: $\frac{x}{a} = \cos\alpha$, $\frac{y}{b} = \sin\alpha$

Fig. 35.



eliminiert man nun die überflüssige Variable α dadurch, daß man quadriert und addiert, so $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

45) Der Abstand des gegebenen Punktes von der gegebenen Geraden ist $\frac{y+x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$. Wenn man die gegebene Gerade als Ordinatenachse und die darauf durch den Punkt $x = y = \sqrt{2}$ gezogene Normale als Abszissenachse betrachtet, so hat A die Koordinaten

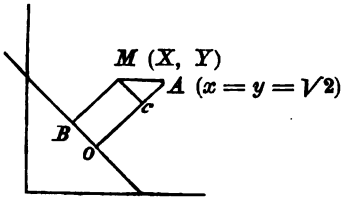
$x = 1$, $x = 0$.

$MB = 2\,MA$ oder

$X = 2\sqrt{Y^2 + (1 - X)^2}$

und daraus folgt:

Fig. 36.



$4Y^2 + 3(X - {}^4/_3)^2 = {}^4/_3$ oder $\frac{Y^2}{{}^1/_3} + \frac{(X - {}^4/_3)^2}{{}^4/_9} = 1$.

Behält man aber das gegebene Achsensystem bei und bezeichnet die Koordinaten von M mit ξ und η, so ist

$$MB = \frac{\eta + \xi - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\,MA \text{ und}$$

$$MA = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}, \text{ somit}$$

$$\frac{\eta + \xi - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$$

$$\xi^2 + {}^2/_7\,\xi\eta - \eta^2 - 2\xi\sqrt{2} - 2\eta\sqrt{2} + {}^{30}/_7 = 0,$$

somit die Gleichung einer Ellipse, da $4AC - B^2$ positiv ist.

46) $f = \pi ab = 50\pi$ gibt $ab = 50$.

$a^2A^2 + b^2 = B^2$ gibt wegen $A = -{}^3/_8$, $B = {}^{50}/_8$ aus

$y = -{}^3/_8\,x + {}^{50}/_8$

$\frac{9a^2}{64} + b^2 = \frac{2500}{64}$; aus dieser Gleichung und aus

$ab = 50$ folgt: $a_1 = {}^{40}/_5$, $b_1 = {}^{15}/_4$; $a_2 = 10$, $b_2 = 5$,

daher $\frac{225}{16}x^2 + \frac{1600}{9}y^2 = \frac{225}{16} \cdot \frac{1600}{9} = 2500$

$$25x^2 + 100y^2 = 25 \cdot 100 = 2500.$$

Digitized by Google

47) Da $e = 3$ ist, so ist $2p = {}^{32}/_{5}$.

Man beschreibt mit der großen Halbachse einen Kreis und berechnet das dem Segmente der Ellipse entsprechende Segment des Kreises, es ist 11·1823354, dann ist das Ellipsensegment $= {}^{4}/_{5}$ 11·1823354 = 8·9458683 Flächeneinheiten.

48) Im Scheitelkreis $x^2 + y^2 = 9$ entspricht dem $x = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ der Wert $Y = \frac{3}{2}\sqrt{2}$, daher ist bezüglich des Zentriwinkels des Kreissegmentes:

$Y = x \operatorname{tg} \varphi$, $\frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \operatorname{tg} \varphi$, $\operatorname{tg} \varphi = 1.$, $\varphi = 45^0$, $2\varphi = 90^0$,

somit ist der Kreissektor gleich $\frac{9\pi}{4}$,

das Kreissegment ist $\frac{9\pi}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9}{4}(\pi - 2)$

und das Ellipsensegment $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}(\pi - 2) = \frac{3}{2}(\pi - 2)$.

49) Der Scheitelkreis ist $x^2 + y^2 = 16$, für $x = 2$ ist daraus $y = 2\sqrt{3}$; der dem Kreisausschnitt entsprechende Zentriwinkel sei 2φ, so ist $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, also $\varphi = 60^0$ und $2\varphi = 120^0$; der Kreisausschnitt ist daher $\frac{r^2\pi}{3} = \frac{16\pi}{3}$ und Kreisausschnitt:

Ellipsenausschnitt $= a : b = 4 : 2$, somit Ellipsenausschnitt $= \frac{8\pi}{3}$.

50) Setzt man $\sqrt[3]{x - 3} = y$, so gibt $y^2 = 4(3 + y)$, $y = 6$ als größere Wurzel, oder $x = 219$, daher ist $a = 73$ und

$$b = \sqrt{73^2 - 48^2} = 55.$$

Die Ellipse ist sonach $\left(\frac{x}{73}\right)^2 + \left(\frac{y}{55}\right)^2 = 1$ und deren Fläche

$$F = \pi ab = \pi \,.\, 73 \,.\, 55.$$

Die Mantelfläche des gleichseitigen Kegels ist $2r^2\pi$, daher $2r^2\pi = \pi \,.\, 73 \,.\, 55$, $r = 44{\cdot}8051$ und $d = 89{\cdot}6102$.

§ 32. Die Hyperbel.

1) $16(x + 2)^2 - 25y^2 = 400$ oder $\left(\frac{x+2}{5}\right)^2 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$ stellt eine Hyperbel vor, deren Mittelpunkt auf der negativen Abszissenachse im Abstande 2 vom Anfangspunkte liegt und deren Halbachsen 5 und 4 sind.

Digitized by Google

2) $\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1.$

$$x_1 = 1,\ y_1 = 1;\ x_2 = -\,{}^{19}/_{5},\ y_2 = {}^{29}/_{5}.$$

3) Ist $y = Ax + B$ die Gleichung einer Geraden, so gibt die Koexistenz dieser Gleichung und $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

$$x = \frac{AB a^2 \pm ab\sqrt{B^2 - (A^2a^2 - b^2)}}{b^2 - a^2A^2},$$

somit für den Fall, daß $y = Ax + B$ Tangente ist, $A^2a^2 - b^2 = B^2$ und $\xi = -\frac{Aa^2}{B}$, $\eta = -\frac{b^2}{B}$ als Koordinaten des Berührungspunktes, somit $B = -\frac{b^2}{\eta}$ und $A = \frac{b^2\xi}{a^2\eta}$, daher $y = \frac{b^2\xi}{a^2\eta}x - \frac{b^2}{\eta}$ oder $b^2x\xi - a^2y\eta = a^2b^2$ als Gleichung der Tangente.

Oder sind x_1y_1, x_2y_2 zwei Punkte der Hyperbel, so ist die durch diese Punkte gelegte Gerade $y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$, aus $b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2$ und $b^2x_2^2 - a^2y_2^2 = a^2b^2$ folgt $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)}$, daher $y - y_1 = \frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)}(x - x_1)$; für $x_2 = x_1 = \xi$, $y_2 - y_1 = \eta$ geht diese Gleichung in die Gleichung der Tangente über $b^2x\xi - a^2y\eta = a^2b^2$.

Soll vom Punkte x', y' an die Hyperbel eine Tangente gezogen werden, so müssen $b^2x'\xi - a^2y'\eta = a^2b^2$, $b^2\xi^2 - a^2\eta^2 = a^2b^2$ gleichzeitig bestehen. Aus diesen beiden Gleichungen können nun ξ und η ermittelt und dann in die Tangentengleichung eingesetzt werden.

Aus $9x\xi - 16y\eta = 144$ folgt für $x = 8$, $y = 5{}^{1}/_{4}$, $72\xi - 84\eta = 144$, daraus und aus $9\xi^2 - 16\eta^2 = 144$ ergeben sich die Berührungskoordinaten.

$\eta_1 = 4$, $\eta_2 = {}^{36}/_{5}$, $\xi_1 = {}^{20}/_{3}$, $\xi_2 = {}^{52}/_{5}$. Daher sind die Tangenten $16y = 13x - 20$, $16y = 15x - 36$; die Sehne ist $7y = 6x - 12$ und $D = {}^{8}/_{15}\sqrt{85}$.

4) Die Tangente sei $y = Ax + B$,
A und B folgen aus $A = \frac{4\sqrt{3}}{9}$ und
$a^2A^2 - b^2 = B^2$, $9.{}^{48}/_{91} - 4 = B^2$.
$B = \pm\,{}^{2}/_{3}\sqrt{3}$, $y = \frac{4\sqrt{3}}{9}x \pm {}^{2}/_{3}\sqrt{3}$.

Oder aus $4x\xi - 9y\eta = 36$ folgt $y = \frac{4\xi}{9\eta}x - \frac{4}{9}$,

Digitized by Google

daher $\frac{4\xi}{9\eta} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$. Aus dieser Gleichung und aus $4\xi^2 - 9\eta^2 = 36$ folgt $\eta = \pm 2\sqrt{3}$, daher

$$y = \frac{4\sqrt{3}}{9}x - \frac{4}{\eta} = \frac{4\sqrt{3}}{9}x \pm {}^2/_3\sqrt{3}.$$

5) Aus $a^2A^2 - b^2 = B^2$ und $y = \frac{b}{a}x$ sind a und b zu berechnen. $3y^2 - 12x^2 = 36$.

6) Die Gleichung der Hyperbel ist $4(y-1)^2 - 9x^2 = 36$, daher ist die Gleichung der Tangente $4(y-1)(\eta-1) - 9x\xi = 36$ oder $y = \frac{9\xi}{4(\eta-1)}x - \left(\frac{9}{\eta-1} + 1\right)$. Da die Tangente normal sein soll auf der Geraden, so muß $\frac{9\xi}{4(\eta-1)} = {}^9/_{10}$ sein, somit $y = {}^9/_{10}x - \left(\frac{9}{\eta-1} + 1\right)$. Aus $\frac{9\xi}{4(\eta-1)} = {}^9/_{10}$ und aus

$$4(\eta-1)^2 - 9\xi^2 = 36 \text{ folgt } \eta - 1 = \pm {}^{15}/_4;$$

diese Werte geben, in die Tangentengleichung eingesetzt:

$$y = \frac{9x}{10} + {}^{17}/_5,\quad y = \frac{9x}{10} - {}^7/_5.$$

7) $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ hat die Tangentengleichung $y = \frac{b^2\xi}{a^2\eta}x - \frac{b^2}{\eta}$, daher muß $b^2\xi^2 - a^2\eta^2 = a^2b^2$ und $\frac{b^2\xi}{a^2\eta} = \operatorname{tg}\alpha$ sein, daraus folgt:

$$y = \pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2\operatorname{tg}^2\alpha - b^2}},\quad \xi = \pm\frac{a^2\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{a^2\operatorname{tg}^2\alpha - b^2}}.$$

Speziell: $\eta = \pm 14{\cdot}4$, $\xi = \pm 16{\cdot}9$.

8) $x^2 - y^2 = 25$ hat die Tangente $x\xi - y\eta = 25$. Da die Tangente durch $x = 3$, $y = 0$ geht, so muß $3\xi = 25$ und $\xi^2 - \eta^2 = 25$ sein, daher $\eta = \pm {}^{20}/_3$, $\xi = {}^{25}/_3$. Die Gleichungen der Tangenten sind $y = \frac{5x}{4} - {}^{15}/_4$, $y = -\frac{5x}{4} + {}^{15}/_4$. Im ersten Quadranten liegt nur die erste Tangente, daher auch diese hier nur in Betracht kommt.

Die Länge der Tangente ist bestimmt durch die Punkte $x = 3$, $y = 0$; $x = {}^{25}/_3$, $y = {}^{20}/_3$, daher

$$T = {}^4/_3\sqrt{41};\quad S_t = {}^{25}/_3 - 3 = {}^{16}/_3.$$

Die im Punkte ${}^{25}/_3$, ${}^{20}/_3$ auf die Tangente errichtete Normale ist $y = -\frac{4x}{5} + {}^{40}/_3$; für $y = 0$ folgt daraus $x = {}^{50}/_3$, daher ist die Länge der Normale

$$N = {}^5/_3\sqrt{41} \text{ und } S_n = {}^{50}/_3 - {}^{25}/_3 = {}^{25}/_3.$$

Digitized by Google

9) Aus $y = \frac{b}{a}x = \frac{5x}{12}$ und aus $e^2 = a^2 + b^2 = 169$, folgt

$b = \frac{5a}{12}$, $a^2 = 144$, $b^2 = 25$ und

$25x^2 - 144y^2 = 25.144.$

$25\xi x - 144\eta y = 25.144$ geht für $\xi = 13$, $\eta = {}^{25}/_{12}$ über in $13x - 12y = 144$, oder $y = \frac{13x}{12} - 12$.

10) Aus $a^2A^2 - b^2 = B^2$ und $e^2 = a^2 + b^2$ folgt
für $A = {}^{15}/_{16}$, $B = {}^{9}/_{4}$ und $e = 5$
${}^{225}/_{256}\,a^2 - b^2 = {}^{81}/_{16}$, $a^2 + b^2 = 25$, daher $a^2 = 16$, $b^2 = 9$,
somit $9x^2 - 16y^2 = 9.16 = 144$.

Die Tangenten in den Punkten $\xi = 5$, $\eta = \pm\,{}^{9}/_{4}$ sind $y = \frac{5x}{4} - 4$ und $y = -\frac{5x}{4} + 4$; Fläche $= 7.2$.

11) Aus $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ folgt $b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2$,
$y = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}x - \frac{b^2}{y_1}$ und $\frac{b^2x_1}{a^2y_1} = \frac{5}{6}$, $\frac{b^2}{y_1} = \frac{16}{3}$, wegen $x_1 = 10$, $y_1 = 3$
folgt daraus $b^2 = 16$, $a^2 = 64$.

12) Die durch den gegebenen Punkt gehende Gerade ist
$y - 3 = A(x - 12)$. Aus $y = Ax + (3 - 12A)$ und
$9x^2 - 16y^2 = 144$ folgt
$x^2 + \frac{16.24\,A^2 - 6.16\,A}{9 - 16\,A^2}x + \,.\, = 0,$
da $-(x_1 + x_2) = \frac{16.24.A^2 - 6.16\,A}{9.16\,A^2} = -24 = -2\xi$,
so $A = {}^{9}/_{4}$ und $y = {}^{9}/_{4}x - 24$.

13) Die Tangente im Punkte ξ, η ist $y = \frac{b^2\xi}{a^2\eta}x - \frac{b^2}{\eta}$; die durch einen Brennpunkt (etwa $x = e$, $y = 0$) gehende und auf der Tangente normale Gerade ist $y = -\frac{a^2\eta}{b^2\xi}x + \frac{a^2\eta e}{b^2\xi}$; die durch das Zentrum und den Punkt ξ, η gehende Gerade ist $y = \frac{\eta}{\xi}x$, somit muß $\frac{\eta}{\xi}x = -\frac{a^2\eta}{b^2\xi}x + \frac{a^2\eta e}{b^2\xi}$ und daher $x = \frac{a^2}{e}$ sein, x ist sonach unabhängig von ξ, η, d. h. vom Berührungspunkte, daher ergeben alle Tangenten dasselbe x oder $x = \frac{a^2}{e}$ ist der geometrische Ort.
$x = \frac{a^2}{e} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ stellt eine zur Y-Achse parallele Gerade vor.

Digitized by Google

14) Die Hyperbel ist $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ und der Kreis $x^2 + y^2 = b^2$. Die Koordinaten der Schnittpunkte sind:

$$x = \pm\sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}},\quad y = \pm b\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}}.$$

Die Tangenten in $x_1 = \sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}}$, $y_1 = b\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}}$ sind:

$$y = -x\sqrt{\frac{2a^2}{b^2-a^2}} + b\sqrt{\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}} \text{ (an den Kreis),}$$

$$y = \frac{bx}{a}\sqrt{\frac{2b^2}{b^2-a^2}} - b\sqrt{\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}} \text{ (an die Hyperbel);}$$

$$\operatorname{tg} v = \frac{-a\sqrt{\frac{2}{b^2-a^2}} - \frac{b^2}{a}\sqrt{\frac{2}{b^2-a^2}}}{1 - \frac{2b^2}{b^2-a^2}} = \sqrt{\frac{2(b^2-a^2)}{a^2}};$$

speziell: $\operatorname{tg} v = \sqrt{{}^{32}/_{9}}$.

$v = 62^0\,3'\,41{\cdot}74''$ $(62^0\,3'\,42'')$.

15) L stellt die Hyperbel $({}^{3}/_{2})^2(x+4)^2 - y^2 = ({}^{3}/_{2})^2$ und $10^{x-1} = \sqrt[2y]{100^{xy-2}}$ oder $x - 1 = \frac{xy-2}{y}$ stellt die Gerade $y = 2$ vor. Diese Gerade schneidet die Hyperbel in den Punkten $y_1 = 2$, $x_1 = -{}^{7}/_{3}$; $y_2 = 2$, $x_2 = -{}^{17}/_{3}$.

Wegen der Bedingung, daß Kreis und Hyperbel auf entgegengesetzten Seiten der Tangente liegen sollen, entspricht nur y_2, x_2. Die Tangente in diesem Punkte ist $y = -\frac{15x}{8} - {}^{69}/_{8}$; da diese auch gleichzeitig Tangente an den Kreis ist, so fällt der Radius des letzteren in die Gerade, welche durch x_2y_2 geht und auf der Tangente normal ist. Diese Gerade ist $y = \frac{8x}{15} + {}^{226}/_{45}$ und sie schneidet die Gerade $x = 1$ im Punkte $x = 1$ und $y = {}^{50}/_{9}$, daher hat der Mittelpunkt des Kreises die Koordinaten $\alpha = 1$, $\beta = {}^{50}/_{9}$ und

$$r = \sqrt{(\beta - y_2)^2 + (\alpha - x_2)^2} = \sqrt{({}^{50}/_{9} - 2)^2 + (1 + {}^{17}/_{3})^2} = {}^{68}/_{9}.$$

Die gesuchte Kreisgleichung ist sonach:

$$(x-1)^2 + (y - {}^{50}/_{9})^2 = ({}^{68}/_{9})^2.$$

16) Sei die Verbindungslinie des gegebenen Punktes mit dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises $= 2a$ und liege dieselbe in der Abszissenachse, die im Mittelpunkte dieser Verbindungslinie errichtete Senkrechte sei die Ordinatenachse, so ist, wenn ξ, η die Koordinaten des Mittelpunktes des gesuchten Kreises sind:

$\varrho^2 = (\xi + a)^2 + \eta^2$; $(\varrho + r)^2 = (\xi - a)^2 + \eta^2$, oder

$\varrho^2 = (a - \xi)^2 + \eta^2$ und $(\varrho + r)^2 = (\xi + a)^2 + \eta^2$.

Digitized by Google

Durch Elimination von ϱ erhält man:

$$\xi^2(16a^2 - 4r^2) - 4r^2\eta^2 = 4a^2r^2 - r^4 \text{ oder}$$

$$\frac{\xi^2}{\frac{r^2}{4}} - \frac{\eta^2}{a^2 - \frac{r^2}{4}} = 1.$$

So lange $a > \frac{r}{2}$ ist, so lange also der gegebene Punkt außerhalb des gegebenen Kreises liegt, ist der geometrische Ort eine Hyperbel.

Für $a = \frac{r}{2}$ ist $\eta = 0$ die Gleichung der Abszissenachse.

Für $a < \frac{r}{2}$ stellt obige Gleichung eine Ellipse vor.

17) Der geometrische Ort habe die Koordinaten ξ, η, so ist eine durch ξ, η gehende Gerade $y - \eta = A(x - \xi)$ oder $y = Ax + (\eta - A\xi)$.

Damit diese Gerade Tangente an $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ sei, muß $(\eta - A\xi)^2 = a^2A^2 - b^2$ oder $\eta^2 - 2A\eta\xi + A^2\xi^2 - a^2A^2 + b^2 = 0$ sein. (I)

Die Gleichung der durch ξ, η und den Brennpunkt e, o gehenden Geraden ist $y = \frac{\eta}{\xi - e}(x - e)$, und da diese Gerade auf der Tangente normal sein soll, so muß $\frac{\eta}{\xi - e} = -\frac{1}{A}$ oder $A\eta = e - \xi$, $A\eta + \xi = e = \sqrt{a^2 + b^2}$ sein, daher

$$A^2\eta^2 + 2A\eta\xi + \xi^2 - a^2 - b^2 = 0. \quad \text{(II)}$$

Aus I und II kann man nun die überflüssige Variable eliminieren; indem man beide Gleichungen addiert, erhält man

$\eta^2(1 + A^2) + \xi^2(1 + A^2) - a^2(1 + A^2) = 0$, somit

$$\eta^2 + \xi^2 = a^2.$$

18) Die Grundlinie $2a$ liege in der Abszissenachse, die in der Mitte von $2a$ errichtete Normale sei die Ordinatenachse und die Koordinaten der Spitze seien ξ und η, so ist die Länge der Scheitelseiten:

$\sqrt{(a + \xi)^2 + \eta^2}$ und $\sqrt{(\xi - a)^2 + \eta^2}$, daher muß

$\sqrt{(a + \xi)^2 + \eta^2} - \sqrt{(\xi - a)^2 + \eta^2} = 2d$, daraus

$d^4 - a^2d^2 = \eta^2d^2 + \xi^2d^2 - a^2\xi^2$.

Da in jedem Dreiecke die Differenz zweier Seiten kleiner ist als die dritte Seite, also $d < a$, so

$\xi^2(a^2 - d^2) - \eta^2d^2 = d^2(a^2 - d^2)$ oder

$(a^2 - d^2)x^2 - d^2y^2 = (a^2 - d^2)d^2$, $\left(\frac{x}{d}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{a^2 - d^2}}\right)^2 = 1.$

Digitized by Google

19) Sind ξ und η die Koordinaten des Mittelpunktes des gesuchten Kreises, so ergibt sich bei der Aufgabe α aus

$$\xi^2 + \eta^2 = (3 + \varrho)^2,\ (\xi - 5)^2 + \eta^2 = (2 + \varrho)^2$$

und bei der Aufgabe β aus

$$\xi^2 + \eta^2 = (4 + \varrho)^2$$
$$(\xi - 5)^2 + \eta^2 = (1 + \varrho)^2$$

durch Elimination von ϱ das erstemal

$$24\xi^2 - 120\xi - \eta^2 + 144 = 0, \text{ oder}$$
$$24\,(\xi - {}^5/_2)^2 - \eta^2 = 6, \text{ und das zweitemal}$$
$$16\,(\xi - {}^5/_2)^2 - 9\eta^2 = 36 \text{ als Gleichung der Hyperbel.}$$

20) $2a$ liege in der X-Achse und die in der Mitte von $2a$ errichtete Normale sei die Y-Achse. Der Rand sei A, die Scheibe B, der gesuchte Punkt sei M mit den Koordinaten x, y. Der Schall muß von A nach M in derselben Zeit kommen wie der Schall der in B aufschlagenden Kugel von B nach M. Also die Zeit des Schalles von A nach M muß gleich sein der Zeit der Kugel von A nach B, vermehrt um die Zeit des Schalles von B nach M.

$$AM = ct,\quad AB = \gamma t_1,\quad BM = ct_2, \text{ daher}$$
$$\frac{AM}{c} = \frac{AB}{\gamma} + \frac{BM}{c}.$$

Da $AM = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$, $AB = 2a$, $BM = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$ ist, so

$$\frac{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}{c} = \frac{2a}{\gamma} + \frac{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}}{c},$$

daraus $x^2(\gamma^4 - c^2\gamma^2) - y^2c^2\gamma^2 = a^2c^2(\gamma^2 - c^2)$

oder $x^2\left[\frac{a^2(\gamma^2 - c^2)}{\gamma^2}\right] - y^2\left[\frac{a^2c^2}{\gamma^2}\right] = \frac{a^2(\gamma^2 - c^2)}{\gamma^2} \cdot \frac{a^2c^2}{\gamma^2}.$

21) $b^2x\xi - a^2y\eta = a^2b^2$ und $y = \frac{b}{a}x$ geben

$$x_1 = \frac{a^2b}{b\xi - a\eta},\quad y_1 = \frac{ab^2}{b\xi - a\eta}.$$

$b^2x\xi - a^2y\eta = a^2b^2$ und $y = -\frac{b}{a}x$ geben

$$x_2 = \frac{a^2b}{b\xi + a\eta},\quad y_2 = \frac{ab^2}{b\xi + a\eta}.$$

(ξ, η), (x_1, y_1), (x_2, y_2) sind die Eckpunkte des Dreieckes, somit sind die Werte in $\pm 2f = \xi(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - \eta) + x_2(\eta - y_1)$ einzusetzen.

22) Der Mittelpunkt der Tangente hat die Koordinaten $\frac{x_1 + x_2}{2}$, $\frac{y_1 + y_2}{2}$, wenn mit $(x_1\ y_1)$, $(x_2\ y_2)$ die Koordinaten des Schnitt-

Digitized by Google

punktes der Tangente $b^2 x\xi - a^2 y\eta = a^2 b^2$ mit $y = \pm \frac{b}{a} x$ bezeichnet werden. Nun ist nach der vorigen Aufgabe:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{a^2 b}{2}\left[\frac{1}{b\xi - a\eta} + \frac{1}{b\xi + a\eta}\right] = \frac{a^2 b}{2} \cdot \frac{2b\xi}{b^2\xi^2 - a^2\eta^2} = \frac{a^2 b^2 \xi}{a^2 b^2} = \xi$$

und ebenso $\frac{y_1 + y_2}{2} = \eta$.

§ 33. Die Parabel.

1) Betrachtet man $y^2 = 2px$ und $y = Ax + B$ als koexistierend, so ergibt sich daraus $A^2x^2 + 2ABx + B^2 = 2px$,

$$x = \frac{p - AB \pm \sqrt{p^2 - 2ABp}}{A^2}.$$

Soll die Gerade $y = Ax + B$ Tangente sein, so muß $p^2 - 2ABp = 0$ also $p = 2AB$ sein. Für diesen Fall ist

$x_1 = \frac{p - AB}{A^2} = \frac{AB}{A^2} = \frac{B}{A}$,

$y_1 = Ax_1 + B = \frac{AB}{A} + B = 2B$; daraus folgt

$B = \frac{y_1}{2}$ und aus $p = 2AB$ $A = \frac{p}{2B} = \frac{p}{y_1}$, somit

$y = Ax + B = \frac{px}{y_1} + \frac{y_1}{2}$,

$yy_1 = px + \frac{y_1^2}{2} = px + px_1 = p(x + x_1)$,

wo x_1 und y_1 die Koordinaten des Berührungspunktes sind.

Oder sind $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ zwei Punkte der Parabel $y^2 = 2px$, so ist die Gleichung der durch diese zwei Punkte gelegten Sekante

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1),$$

wegen $y_1^2 = 2px_1$ und $y_2^2 = 2px_2$ ist

$y_1^2 - y_2^2 = 2p(x_1 - x_2)$ und $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2p}{y_1 + y_2}$, daher $y - y_1 = \frac{2p}{y_1 + y_2}(x - x_1)$. Für $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ geht die Sekante in die Tangente über:

$$y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1) \text{ oder } yy_1 = p(x + x_1).$$

Dem $y_1 = 6$ entspricht $x_1 = 12$, die Tangente im Punkte $x_1 y_1$ ist $y = \frac{x}{4} + 3$; $\operatorname{tg}\alpha = 1/4$, $\alpha = 14^0\,2'\,10{\cdot}48''$ $(14^0\,2'\,10'')$.

Digitized by Google

2) Aus $yy_1 = p(x + x_1)$ oder $y = \frac{p}{y_1}x + \frac{p}{y_1}x_1$ und $y = 2{\cdot}5x + 1$ folgt $\frac{p}{y_1} = {}^5/_2$, $\frac{p}{y_1}x_1 = 1$ und daraus durch Multiplikation $\frac{p^2x_1}{y_1^2} = \frac{5}{2} = \frac{p^2x_1}{2px_1} = \frac{p}{2}$, somit $p = 5$, daher ist die Gleichung der Parabel $y^2 = 10x$.

Oder $p = 2AB = 2.{}^5/_2.1 = 5$, somit $2p = 10$ und $y^2 = 10x$.

3) Zieht man an die Parabel eine Tangente parallel zu der gegebenen Geraden, so ist der Berührungspunkt der gesuchte Punkt.

Da $y = \frac{p}{y_1}x + \frac{p}{y_1}x_1$ parallel sein soll mit $y = 5x + 40$, so muß $\frac{p}{y_1} = 5$ und wegen $p = 75$, $y_1 = 15$ sein. Aus $15^2 = 150.x_1$ folgt $x_1 = {}^3/_2$. Der Abstand dieses Punktes von der gegebenen Geraden beträgt

$$D = \frac{5\sqrt{26}}{4} = 6{\cdot}3738 \text{ Kilometer.}$$

4) Die Tangente an die Parabel $y^2 = 2px$ ist: $y\eta = p(x + \xi)$, wenn mit ξ und η die noch unbekannten Koordinaten des Berührungspunktes bezeichnet werden. Aus $y_1\eta = p(x_1 + \xi)$ und $\eta^2 = 2p\xi$ sind nun ξ und η zu bestimmen und dann ihre Werte in die Tangentengleichung einzusetzen.

a) $\xi = 4 \pm 2\sqrt{3}$, $\eta = 3 \pm \sqrt{3}$, daher sind zwei Tangenten möglich $y = \frac{3 \mp \sqrt{3}}{4}x + \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}$ oder

$y = 1{\cdot}1830127x + 0{\cdot}6339746$, $y = 0{\cdot}3169873x + 2{\cdot}3660254$, oder die Gerade, welche durch den Punkt $x = 2$, $y = 3$ geht, ist $y - 3 = A(x - 2)$, $y = Ax + (3 - 2A)$.

Soll diese eine Tangente sein, so muß $p = 2AB$ sein, und da $p = \frac{3}{2}$ ist, so $\frac{3}{2} = 2A(3 - 2A)$, daraus $A = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{4}$ und $y = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{4}x + \frac{3 \mp \sqrt{3}}{2}$ als Tangentengleichung.

b) $\xi = 8 \pm 2\sqrt{15}$, $\eta = 3 \pm \sqrt{15}$

$$y = -\frac{3 \mp \sqrt{15}}{4}x + \frac{3 \pm \sqrt{15}}{2} \text{ oder}$$

$y = 0{\cdot}2182458x + 3{\cdot}4364916$,
$y = -1{\cdot}7182458x - 0{\cdot}4364916$.

Oder die durch den Punkt $x = -2$, $y = 3$ gehende Gerade ist $y = Ax + (3 + 2A)$, daher $\frac{3}{2} = 2A(3 + 2A)$

Digitized by Google

und daraus $A = \frac{-3 \pm \sqrt{15}}{4}$, somit

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{15}}{4} x + \frac{3 \pm \sqrt{15}}{2}.$$

5) Die Parabel ist $(y-4)^2 = 20x$, daher ist die Tangente $(y-4)(\eta-4) = 10(x+\xi)$. Da diese durch den gegebenen Punkt gehen soll, so ist $(1{\cdot}5-4)(\eta-4) = 10(\xi-3{\cdot}3)$ und $(\eta-4)^2 = 20\xi$.

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$\xi_1 = {}^9/_5$, $\xi_2 = {}^{121}/_{20}$ und $\eta_1 = 10$, $\eta_2 = -7$,

somit sind die Gleichungen der beiden Tangenten

$$y = \frac{5x}{3} + 7, \quad y = -\frac{10x}{11} - {}^5/_2.$$

6) Dem $x = 32$ entspricht $y = \pm 16$, somit ist im Punkte $x = 32$, $y = 16$ eine Tangente zu errichten, ihre Gleichung ist $y = \frac{x}{4} + 8$.

Da der Brennpunkt die Koordinaten 2 und 0 hat, so ist die durch ihn normal auf die Tangente gelegte Gerade $y = -4x + 8$ und die Koordinaten des Schnittpunktes der Tangenten und Normalen sind $x = 0$, $y = 8$.

Die drei Eckpunkte des Dreieckes sind sonach:

(0, 8), (2, 0), (32, 16), daher ist $f = 136$.

7) $y\eta = p(x+\xi)$ geht für $p = 3$, $y = 1$, $x = -3$ über in $\eta = -9 + 3\xi$; daraus und aus $\eta^2 = 6\xi$ folgt $\eta = 1 \pm \sqrt{19}$, $\xi = \frac{10 \pm \sqrt{19}}{3}$, daher sind die Tangenten

$$y = -\frac{1 \mp \sqrt{19}}{6} x + \frac{1 \pm \sqrt{19}}{2}.$$

Die Länge der Sehne ist $D = {}^2/_3 \sqrt{190}$; die Gleichung der Sehne lautet:

$y = 3x - 9$, $\operatorname{tg} \varphi = 3$, $\varphi = 71^\circ 33' 54{\cdot}2''$ $(71^\circ 33' 54'')$.

8) In horizontaler Richtung ist der Weg in der Zeit t: $y = ct$, in vertikaler Richtung: $x = \frac{gt^2}{2}$; eliminiert man t, so ergibt sich $y^2 = \frac{2c^2}{g} x$, somit die Gleichung einer Parabel.

Ist $x = h$, so ist $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ und $Y = c\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Im Momente t_1 ist $x_1 = \frac{g t_1^2}{2}$, $y_1 = ct_1$, daher ist die Tangente in diesem Punkte

$$yy_1 = p(x + x_1) \text{ oder } y = \frac{c}{g t_1} x + \frac{c t_1}{2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{c}{g t_1}.$$

Digitized by Google

Speziell: $y^2 = 73409 \cdot 462\,x$, $T = 2 \cdot 0195$ Sekunden,
$Y = 1211 \cdot 69\ m$.

$$y = \frac{600\,x}{9 \cdot 808} + \frac{600}{2},\quad \varphi = 89^0\,3'\,48 \cdot 56''\ (89^0\,3'\,48 \cdot 5'').$$

9) Ein Punkt der Leitlinie habe die Koordinaten y_1 und $x_1 = -\frac{p}{2}$, so ist die durch ihn gehende Gerade $y - y_1 = A\,(x - x_1)$ oder $y = Ax + \left(y_1 + \frac{Ap}{2}\right)$, somit nach Nr. 1 $p = 2AB$, oder $p = 2A\left(y_1 + \frac{Ap}{2}\right)$ und daraus folgt $A^2p + 2Ay_1 = p$,

$$A_1 = \frac{-y_1 + \sqrt{y_1^2 + p^2}}{p}$$

$$A_2 = \frac{-y_1 - \sqrt{y_1^2 + p^2}}{p}$$

und $A_1 A_2 = -1$.

Oder ein Punkt der Leitlinie habe $x_1 y_1$ zu Koordinaten und die Tangierung erfolge im Punkte ξ, η, so muß wegen $y\eta = p\,(x + \xi)$ auch $y_1\eta = p\,(x_1 + \xi)$ und $\eta^2 = 2p\xi$ sein; aus den beiden letzteren Gleichungen folgt:

$$\eta = y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 2px_1}$$

und da für die Leitlinie $x_1 = -\frac{p}{2}$, so

$$\eta = y_1 \pm \sqrt{y_1^2 + p^2},\quad \xi = \frac{\eta^2}{2p};$$

die Gleichungen der beiden Tangenten sind:

$y\,(y_1 + \sqrt{y_1^2 + p^2}) = px + p\xi_1$, $y\,(y_1 - \sqrt{y_1^2 + p^2}) = px + p\xi_2$;

$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{p}{y_1 + \sqrt{y_1^2 + p^2}}$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{p}{y_1 - \sqrt{y_1^2 + p^2}}$, $\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 = -1$

oder $\operatorname{tg} v = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \infty$ und $v = 90^0$.

10) Sind $x_1 y_1$ die Koordinaten eines Punktes außerhalb der Parabel und ξ, η die Koordinaten des Berührungspunktes der durch $x_1 y_1$ gelegten Tangenten, so ist $\eta = y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 2px_1}$ und es sind die beiden Tangenten $y\,(y_1 + \sqrt{y_1^2 - 2px_1}) = px + p\xi_1$,

$y\,(y_1 - \sqrt{y_1^2 - 2px_1}) = px + p\xi^2$,

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{p}{y_1 + \sqrt{y_1^2 - 2px_1}},\quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{p}{y_1 - \sqrt{y_1^2 - 2px_1}}$$

und aus $\operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{p^2}{y_1^2 - y_1^2 + 2px_1} = \frac{p}{2x_1} = -1$ folgt

$x_1 = -\frac{p}{2}$ oder $x = -\frac{p}{2}$, somit ist die Leitlinie der geometrische Ort.

Digitized by Google

Oder: die Gerade, die durch den Punkt $x_1 y_1$ geht, ist $y = Ax + (y_1 - Ax_1)$; soll diese Tangente sein, so muß wegen $p = 2AB$

$p = 2A(y_1 - Ax_1)$, $A^2 x_1 - A y_1 + \frac{p}{2} = 0$, $A^2 - \frac{A y_1}{x_1} + \frac{p}{2x_1} = 0$

da die Tangenten aufeinander normal sein sollen, so muß $A_1 A_2 = -1$ und infolge der Eigenschaften der quadratischen Gleichung muß $A_1 A_2 = \frac{p}{2x_1}$ sein, daher $-1 = \frac{p}{2x_1}$, $x_1 = -\frac{p}{2}$, d. h. die Leitlinie ist der geometrische Ort.

11) Ist d der Abstand des gegebenen Punktes von der gegebenen Geraden und nimmt man die Gerade als Y-Achse, den Abstand d in der X-Achse an, so erhält man $y^2 = 2d\left(x - \frac{d}{2}\right)$.

Bezeichnet man die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises mit X, Y, so ist $(x - X)^2 + (y - Y)^2 = r^2$ die Gleichung des Kreises. Da der Kreis durch den Punkt $x = d$, $y = o$ gehen soll, so geht die Kreisgleichung über in $(d - X)^2 + Y^2 = r^2$ und da ferner der Kreis die Gerade berühren soll, so muß $r = X$ sein, sonach $(d - X)^2 + Y^2 = X^2$, daher $d^2 - 2dX + Y^2 = o$ oder $Y^2 = 2d\left(X - \frac{d}{2}\right)$ oder aber $y^2 = 2d\left(x - \frac{d}{2}\right)$.

Nimmt man den Mittelpunkt von d als Koordinatenanfangspunkt, so ist $y^2 = 2dx$.

12) Legt man die Grundlinie in die positive Abszissenachse vom Anfangspunkte an, bezeichnet die Koordinaten der Spitze des Dreieckes mit ξ, η und die gegebene Gerade mit $y = ax + b$, so ist $\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{\eta - a\xi - b}{\sqrt{1 + a^2}}$, somit

$$\xi^2 + 2a\eta\xi + a^2\eta^2 - 2ab\xi + 2b\eta - b^2 = 0$$

und da $B^2 - 4AC = 0$, so ist der geometrische Ort eine Parabel. Oder zieht man vom Endpunkte der Grundlinie auf die gegebene Gerade ein Perpendikel, nimmt dieses als Abszissenachse und die Gerade als Ordinatenachse an, so ist, wenn die Koordinaten des Scheitelpunktes wieder mit ξ, η und der Abstand des Endpunktes der Grundlinie von der gegebenen Geraden mit d bezeichnet wird,

$$\xi = \sqrt{\eta^2 + (d - \xi)^2},\quad \eta^2 = 2d\left(\xi - \frac{d}{2}\right).$$

13) Nimmt man den Durchmesser $2p$ als Ordinatenachse und die im Mittelpunkte darauf errichtete Senkrechte als Abszissenachse, so ist, wenn ξ, η die Koordinaten des geometrischen Ortes bedeuten, $\xi = p - \sqrt{\eta^2 + \xi^2}$ und somit die Gleichung des geometrischen

Digitized by Google

Ortes $\eta^2 = 2p\left(\frac{p}{2} - \xi\right)$; ändert man die Richtung der X-Achse so $\eta^2 = 2p\left(\xi - \frac{p}{2}\right)$, somit die Gleichung einer Parabel, die ihren Brennpunkt im Mittelpunkte des gegebenen Kreises hat und deren Parameter gleich dem gegebenen Durchmesser ist.

14a) Die Schnittpunkte haben $x = 1$ und $y = \pm 2$. Für $x_1 = 1$, $y_1 = 2$ sind die Tangenten $3x + 2y = 7$ und $y = x + 1$, welche die X-Achse in $x = \frac{7}{3}$, beziehungsweise $x = -1$ schneiden, daher $f = \left(\frac{7}{3} + 1\right)\frac{y_1}{2} = \frac{10}{3}$.

14b) Der Kreis und die Parabel schneiden sich in den Punkten $x = 3$, $y = \pm 4$. Die Tangenten sind $y = -\,{}^3/_4 x + {}^{25}/_4$ und $y = {}^2/_3 x + 2$ oder $y = {}^3/_4 x - {}^{25}/_4$, $y = -\frac{2x}{3} - 2$, daher ist

$$\operatorname{tg} v = \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{6}{12}} = {}^{17}/_6 \text{ und}$$

$v = 70^0\,33'\,35{\cdot}9''$ oder $180^0 - v$ $(70^0\,33'\,36'')$.

15) Die Koordinaten der Schnittpunkte sind $x = \frac{p}{2}$, $y = \pm p$. Die Tangenten sind $y = p$, $y = x + \frac{p}{2}$;

$$y = -p, \quad y = -x - \frac{p}{2};$$

$$\operatorname{tg} v = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1, \text{ somit } v = 45^0,\ v_1 = 135^0.$$

16) Setzt man in $y^2 = 2px$, $x = 3$, $y = 4$, so erhält man $2p = {}^{16}/_3$, somit ist die Gleichung der Parabel $y^2 = \frac{16x}{3}$.

Die Koordinaten der Schnittpunkte sind $x_1 = 3$, $y_1 = \pm 4$. Die Tangenten in diesen Punkten an den Kreis sind $y = \mp\frac{3x}{4} \pm {}^{25}/_4$, an die Parabel $y = \pm\frac{2x}{3} \pm 2$.

Die Fläche setzt sich zusammen aus dem Kreissektor und zwei gleichen Parabelsegmenten. Da die gemeinschaftliche Sehne 8 und deren Abstand vom Anfangspunkte 3 ist, so ist die Fläche der beiden Parabelsegmente $2.{}^2/_3 x_1 y_1 - 4.3 = 4$.

Da $\operatorname{tg}\alpha = {}^4/_3$, also $\alpha = 53^0\,7'\,48{\cdot}36''$ $(53^0\,7'\,48'')$ ist, so

$$f_1 : F = 2\alpha : 360^0,\ f_1 = \frac{F\alpha}{180^0} \text{ und } f = 4 + f_1.$$

$f = 27{\cdot}18238$ $(27{\cdot}182)$ Flächeneinheiten.

Digitized by Google

17) Die Schnittpunkte der Parabel $y^2 = \frac{9x}{2}$ und des Kreises $(x+1)^2 + y^2 = 18$ sind $x_1 = 2$, $y_1 = \pm 3$; die Tangenten an die Parabel sind $y = \frac{3x}{4} + {}^3/_2$, $y = -\frac{3x}{4} - {}^3/_2$; die Tangenten an den Kreis sind $y = -x + 5$, $y = x - 5$.

Da die halbe Sehne 3, ihr Abstand vom Kreismittelpunkte auch 3 ist, so ist $\alpha = 45^0$ und der Kreissektor ein Quadrant; das Dreieck, dessen Eckpunkte der Kreismittelpunkt und die beiden Schnittpunkte sind, hat die Fläche $\frac{6.3}{2} = 9$, das Parabelstück zwischen der Sehne und dem Parabelbogen hat die Fläche $2.{}^2/_3 x_1 y_1 = 8$, daher ist

$$f = \frac{r^2\pi}{4} - 9 + 8 = 4{\cdot}5\pi - 1 = 13{\cdot}137167 \text{ Flächeneinheiten.}$$

18) Dem $x = 2{}^1/_4$ entspricht $y = \pm 3$, die Tangente in $x_1 = 2{}^1/_4$ und $y_1 = 3$ ist $y = \frac{2x}{3} + {}^3/_2$, die Normale in diesem Punkte ist $y = -\frac{3x}{2} + {}^{51}/_8$. Für $y = 0$ ist daraus $x = {}^{17}/_4$, daher hat der Kreismittelpunkt die Koordinaten $\alpha = {}^{17}/_4$ und $\beta = 0$ und der Radius ist

$$r = \sqrt{(2{}^1/_4 - 4{}^1/_4)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13};$$

somit ist der Kreis

$$(x - 4{}^1/_4)^2 + y^2 = 13.$$

19) Die Schnittpunkte der Ellipse und der Parabel sind

$$y_1 = \pm\sqrt{72\,(\sqrt{2}-1)} = \pm 5{\cdot}4610786,$$
$$x_1 = 9\,(\sqrt{2}-1) = 3{\cdot}7279224.$$

Die gemeinschaftliche Sehne ist $S = 2y_1 = 10{\cdot}922157$.

$f = 2.{}^2/_3 x_1 y_1 = 27{\cdot}144637$ Flächeneinheiten.

20) Da $e = \sqrt{25-16} = 3$ ist, so ist $2p = 12$ und $y^2 = 12x$ die Gleichung der Parabel. Die Schnittpunkte beider Kurven sind

$$x_1 = 1{\cdot}25,\ y_1 = \pm\sqrt{15} = \pm 3{\cdot}8729833,$$

die Ellipsentangenten sind $y = \mp\frac{4\sqrt{15}}{75}x \pm \frac{16\sqrt{15}}{15}$,

die Parabeltangenten sind $y = \pm\frac{2\sqrt{15}}{5}x \pm \frac{\sqrt{15}}{2}$.

$$\operatorname{tg} v = \frac{\frac{2\sqrt{15}}{5} + \frac{4\sqrt{15}}{75}}{1 - \frac{8.15}{5.75}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$$

$$v_1 = 68^0\,49'\,43{\cdot}3''\ (68^0\,49'\,44'').$$
$$v_2 = 111^0\,10'\,16{\cdot}7''\ (111^0\,10'\,16'').$$

Digitized by Google

21) Die Schnittpunkte sind $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = 9$, $y_2 = -6$. Die Tangenten sind $y = x + 1$, $y = -\frac{x}{3} - 3$ und diese schneiden sich im Punkte $x_3 = -3$, $y_3 = -2$, womit die Koordinaten der drei Eckpunkte des Dreieckes bekannt sind.

$f = 32$ Flächeneinheiten.

22) Dem $x_1 = 2$ entspricht $y_1 = \pm 4$, die Tangente ist $y = x + 2$, oder $y = -x - 2$. $y = x + 2$ schneidet die Y-Achse in $y = 2$. Das Trapez hat die Fläche 6, das vom Parabelbogen, der Ordinate $y = 4$ und der Abszisse $x = 2$ begrenzte Parabelstück ist $^{16}/_3$, daher $f = {}^2/_3$ und $F = 2f = {}^4/_3$ Flächeneinheiten.

23) $f = {}^1/_6 (x_2 y_2 - x_1 y_1) + {}^1/_2 (x_1 y_2 - x_2 y_1)$, und setzt man $x_2 = \frac{y_2^2}{2p}$, $x_1 = \frac{y_1^2}{2p}$, so $f = \frac{1}{12p}(y_2 - y_1)^3$.

Die Koordinaten der Schnittpunkte sind

a) $x_1 = 5$, $y_1 = 10$; $x_2 = {}^1/_5$, $y_2 = 2$;

b) $x = 18 \pm 8\sqrt{5}$, $y = 10 \pm 4\sqrt{5}$, daher

a) $f = 4^4/_{15}$; *b)* $f = {}^{128}/_3\sqrt{5} = 95{\cdot}405568$ Flächeneinheiten.

24) Da der Brennpunkt die Koordinaten $x_1 = \frac{p}{2}$, $y = 0$ und der Punkt der Leitlinie die Koordinaten $x_2 = -\frac{p}{2}$, $y_2 = \frac{3p}{4}$ hat, so ist die Sekante

$y = -\frac{3x}{4} + \frac{3p}{8}$. Für $p = 2$ ist sie $y = -\frac{3x}{4} + {}^3/_4$.

Setzt man in $y^2 = 2px$ für x den Wert aus der Sekantengleichung, so erhält man $y^2 + \frac{8py}{3} - p^2 = 0$. Daher sind die Schnittpunkte

$$y_1 = \frac{p}{3},\quad x_1 = \frac{p}{18};\quad y_2 = -3p,\quad x_2 = \frac{9p}{2}$$

und nach der in Nr. 23 angegebenen Flächenformel

$f = 3^7/_{81}\, p^2 = 12^{28}/_{81}$ Flächeneinheiten.

25) $y^2 = 2px$, für $x = 2{\cdot}4$, $y = 12$ ergibt sich $2p = 60$, somit ist die Gleichung der Parabel $y^2 = 60x$. Nach der in Nr. 23 angegebenen Formel ist $f = 12{\cdot}478125\ m^2$.

Die durch die zwei gegebenen Punkte gelegte Gerade hat die Gleichung $y = 8x - 7{\cdot}2$.

26) Da der Abstand des Brennpunktes von der Leitlinie $p = 2{\cdot}5$ ist, so ist die Parabel $y^2 = 5x$. Dem $y = 5$ entspricht $x = 5$, daher ist für $x_1 = 5$, $y_1 = 5$ die Gleichung der Tangente und Normale aufzustellen.

Digitized by Google

Die Tangente ist $y = \frac{x}{2} + {}^5/_2$; für $y = 0$ ist $x = -5$, daher $T = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5} = 11{\cdot}18034$ und $S_t = 5 + 5 = 10$.

Die Normale ist $y = -2x + 15$, für $y = 0$ ist $x = 7{\cdot}5$, daher

$$N = \frac{\sqrt{125}}{2} = 5{\cdot}59017 \text{ und } S_n = 7{\cdot}5 - 5 = 2{\cdot}5,$$

Der Brennpunkt hat die Koordinaten $x_2 = {}^5/_4$, $y_2 = 0$ und die durch $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ gehende Gerade ist $y = \frac{4x}{3} - {}^5/_3$; ihr zweiter Schnittpunkt mit der Parabel ist $y_3 = -{}^5/_4$, $x_3 = {}^5/_{16}$, daher ist

$$f = 8^{53}/_{384} \text{ Flächeneinheiten.}$$

27) Sind x und y die Koordinaten des Eckpunktes in der Kurve, so muß $y^2 = 2px$ sein, und da y die Höhe des gleichseitigen Dreieckes, also $y = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ ist und x die halbe Basis $\frac{a}{2}$ vorstellt, so ist

$${}^3/_4 a^2 = 2p \cdot \frac{a}{2} \text{ und } p = \frac{3a}{4}, \quad y^2 = \frac{3a}{2} x.$$

$$f = {}^2/_3 xy + \frac{xy}{2} = {}^7/_6 xy = \frac{7a^2\sqrt{3}}{24}.$$

Speziell: $a = 19{\cdot}3456\ m$, $2p = 29{\cdot}0184\ m$,

$$f = 189{\cdot}0652\ (189{\cdot}07)\ m^2.$$

28) Da $2p = 12$ ist, so hat der Endpunkt der Sehne die Koordinaten $x = 3$, $y = 6$ oder $x = 3$, $y = -6$, die Tangenten sind $y = x + 3$, $y = -x - 3$ und ihr Durchschnittspunkt ist $x = -3$, $y = 0$.

$$f = 12 \text{ Flächeneinheiten.}$$

29) Die beiden Kurven schneiden sich in $x = 2\sqrt{2}$ und $y = \pm 2\sqrt[4]{2}$. Die Fläche besteht aus dem Parabelsegment, das vom Parabelbogen und der gemeinschaftlichen Sehne begrenzt ist, dann aus dem zu dieser Sehne gehörigen Kreissegmente. Das letztere ist gleich dem Kreissektor weniger einem Dreiecke, das die Sehne zur Basis und deren Abstand vom Kreismittelpunkte zur Höhe hat. Da die Sehne $4\sqrt[4]{2}$, ihr Abstand vom Kreismittelpunkte $(2\sqrt{2} - 1)$ oder $\sqrt{9 - 4\sqrt{2}}$ und der Zentriwinkel $104°53'48{\cdot}4''$ ist, so beträgt die Fläche

$$f = 8{\cdot}96956 + 3{\cdot}88982 = 12{\cdot}85938 \text{ Flächeneinheiten.}$$

Digitized by Google

30) Die Berührung erfolge im Punkte $x_1\, y_1$, so muß die in diesem Punkte auf die Parabeltangente errichtete Normale durch den Kreismittelpunkt gehen.

$y^2 = \frac{2x}{3}$ hat die Tangente $y = \frac{x}{3y_1} + \frac{x_1}{3y_1}$, die darauf errichtete Normale ist $y = -3y_1x + 3x_1y_1 + y_1$; da diese durch $x = 4$, $y = 0$ gehen muß, so ist $x_1 = {}^{11}/_{3}$ und dem entspricht aus $y^2 = \frac{2x}{3}\, y_1 = \pm \frac{\sqrt{22}}{3} = \pm 1{\cdot}5634719$, somit ist $r^2 = (x_1 - 4)^2 + y_1^2 = \frac{23}{9}$ und $r = \frac{\sqrt{23}}{3}$ und $(x-4)^2 + y^2 = {}^{23}/_{9}$.

Oder die Kreistangente muß auch Parabeltangente sein. Der Kreis ist $y^2 + (x-4)^2 = r^2$, daher ist die Tangente $yy_1 = -(x-4)(x_1-4) + r^2 = -x(x_1-4) + 4(x_1-4) + r^2$. Die Parabeltangente ist $yy_1 = \frac{x}{3} + \frac{x_1}{3}$, somit ${}^{1}/_{3} = -(x_1 - 4)$ und $\frac{x_1}{3} = 4(x_1-4) + r^2$, daraus $x_1 = {}^{11}/_{3}$, $r^2 = {}^{29}/_{9}$.

$$f = \frac{4x_1y_1}{3} = \frac{44\sqrt{22}}{27} = 7{\cdot}6436406 \text{ Flächeneinheiten.}$$

31) Setzt man $y^2 = 4x$ in die erste Gleichung ein, so erhält man $x = \frac{-9 \pm 3\sqrt{13}}{2}$, und da x der Parabel wegen nur positiv sein kann, so $x_1 = \frac{3(\sqrt{13}-3)}{2}$ und $y_1 = \pm\sqrt{6(\sqrt{13}-3)}$.

Konstruiert man mit der großen Halbachse einen Kreis, so ist die dem x_1 entsprechende Kreisordinate

$$Y = {}^{3}/_{2}\, y_1 = \pm {}^{3}/_{2}\sqrt{6(\sqrt{13}-3)}.$$

Bedeutet α den der halben Kreissehne Y entsprechenden Zentriwinkel, so ist $Y = x_1 \operatorname{tg}\alpha$ und

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Y}{x_1} = {}^{1}/_{2}\sqrt{6(\sqrt{13}+3)},\ \alpha = 72^\circ\, 22'\, 32'',$$

daher ist das Kreissegment $8{\cdot}7716468$ und das Ellipsensegment $5{\cdot}8477646$.

Das von der Parabel und der Sehne eingeschlossene Stück ist ${}^{4}/_{3}\, x_1\, y_1 = 2{\cdot}3085115$, somit der von der Parabel und der Ellipse begrenzte Teil $8{\cdot}1562761$ und der andere Teil

$$\pi ab - 8{\cdot}1562761 = 10{\cdot}6932795.$$

Digitized by Google

32) Die Asymptoten sind $y = \frac{2x}{3}$, $y = -\frac{2x}{3}$.

$f = 600 = 2\frac{xy}{2} = xy = \frac{2x^2}{3}$, daher $x^2 = 900$, $x = 30$.

Für $x_1 = 30$ erhält man aus $y^2 = 30x$ $y_1 = 30$ und somit

$$f = {}^4/_3\, x_1\, y_1 = 1200\ cm^2.$$

33) Angenommen, die Gerade schneide die Parabel in den Punkten $x_1\ y_1$, $x_2\ y_2$, so ist $f = \frac{1}{12p}(y_2 - y_1)^3$.

Aus $4y + 7x - 4b = 0$ folgt $x = \frac{4b - 4y}{x}$,

dies in $2y^2 - 9x = 0$ eingesetzt, gibt $y^2 + \frac{18y}{7} = \frac{18b}{7}$,

daher $y = -\frac{9}{7} \pm \sqrt{\frac{81}{49} + \frac{18b}{7}}$,

$y_2 - y_1 = 2\sqrt{\frac{81}{49} + \frac{18b}{7}}$ und da $f = 8$ ist, so

$8 = \frac{8}{27}\left(\sqrt{\frac{81}{49} + \frac{18b}{7}}\right)^3$, daraus $3 = \sqrt{\frac{81}{49} + \frac{18b}{7}}$ und $b = \frac{20}{7}$.

34) Sind ξ, η die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes, so ist die Gleichung der Sekante $y = \frac{\eta}{\xi}x$.

Die Gleichung der Tangente in diesem Punkte ist

$$y\eta = p(x + \xi) \text{ oder } y = \frac{p}{\eta}x + \frac{p\xi}{\eta},$$

der Winkel, welchen die Sekante mit dieser Tangente bildet, ist auch der Winkel, den die Sekante mit der Parabel einschließt,

daher $\operatorname{tg} v = \frac{\frac{\eta}{\xi} - \frac{p}{\eta}}{1 + \frac{p\eta}{\xi\eta}} = \frac{p\xi}{\xi\eta + p\eta}$ und wegen $\xi = \frac{\eta^2}{2p}$

$\operatorname{tg} v = \frac{p\eta}{\eta^2 + 2p^2}$ und $\eta^2 - \frac{p\eta}{\operatorname{tg} v} + 2p^2 = 0$,

$\eta = \frac{p}{2\operatorname{tg} v}(1 \pm \sqrt{1 - 8\operatorname{tg}^2 v})$.

Das Maximum hat $\operatorname{tg}^2 v$ für $1 = 8\operatorname{tg}^2 v$, daher

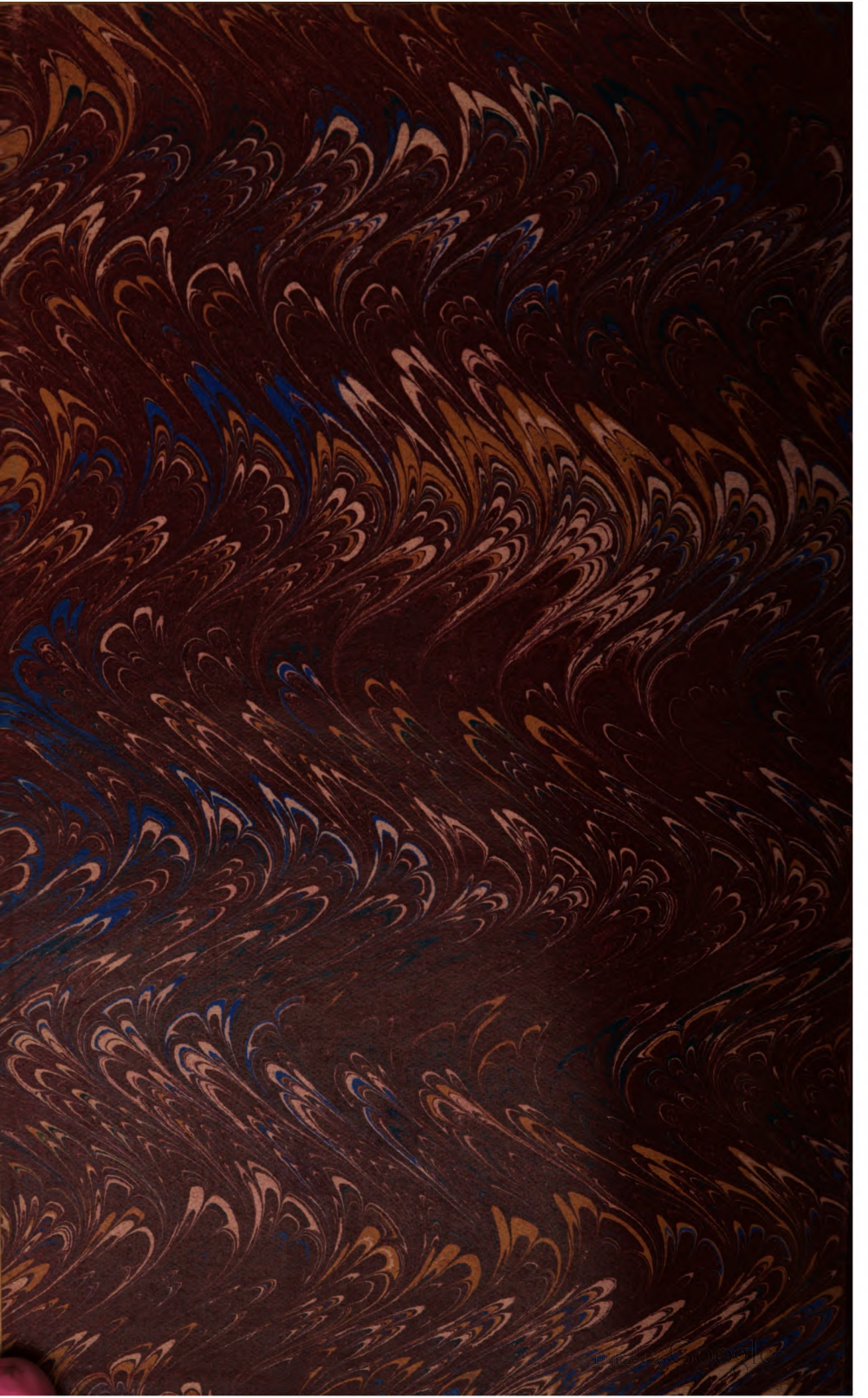
$$\operatorname{tg} v = {}^1/_4\sqrt{2}.$$

MAR 25 192?

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google